

Integrální transformace obrazu

David Bařina

26. února 2013

Obsah

- 1 Zpracování signálu
- 2 Časově-frekvenční rozklad
- 3 Diskrétní Fourierova transformace
- 4 Diskrétní kosinová transformace
- 5 Gaborova transformace
- 6 Vlnková transformace
 - Diskrétní vlnková transformace
 - Dvourozměrná diskrétní vlnková transformace
 - Používané vlnky
 - Aplikace

Motivace

Cíle

- dekorelace dat, rozklad signálu na stavební kameny
- získat časově frekvenční popis signálu

Aplikace

- zjištění polohy a trvání daného jevu
- detekce hran
- komprese
- odstranění šumu
- vodoznaky (watermarking)
- doplnění chybějících částí (inpainting)

Značení a zkratky

$f(t)$ spojité signál

$f[n]$ diskrétní signál

$\hat{f}(\omega)$, $\hat{f}[k]$ Fourierova transformace

z^* komplexní sdružení k z

ψ vlnka

FT, DFT (diskrétní) Fourierova transformace

CT, DCT (diskrétní) kosinová transformace

WT, DWT (diskrétní) vlnková transformace

Signál

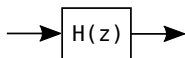
- veličina závislá na čase (t), frekvenci (f), poloze (x, y)



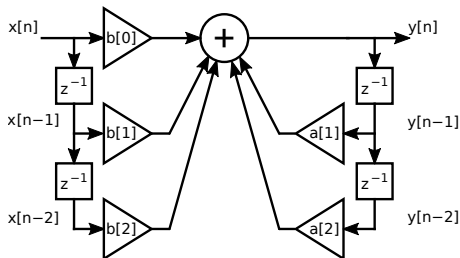
- stacionární vs. nestacionární signál
- filtrace: potlačuje/zesiluje komponenty signálu
- lineární vs. nelineární filtrace

Lineární filtrace

- filtr



- impulsní charakteristika, frekvenční charakteristika
- filtr FIR, IIR



- konvoluce
- podle účelu: dolní/horní/pásmová propust

- odezva LTI systému

$$\begin{aligned}(f * g)(t) &= \int f(\tau) g(t - \tau) d\tau \\ &= \int f(t - \tau) g(\tau) d\tau\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(f * g)[n] &= \sum_m f[m] g[n - m] \\ &= \sum_m f[n - m] g[m]\end{aligned}$$

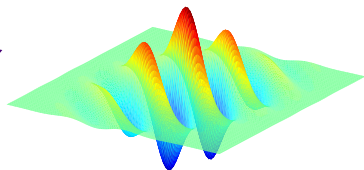
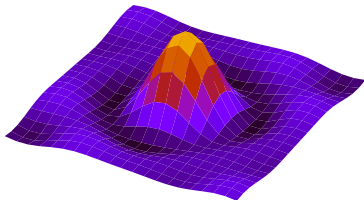
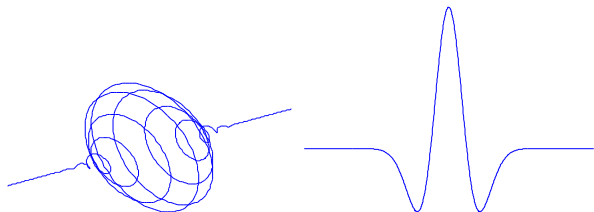
Vzájemná korelace (cross korelace)

- podobnost tvarů signálů, odpovídá skalárnímu součinu

$$\begin{aligned}(f \star g)(t) &= \int f^*(\tau) g(t + \tau) d\tau \\ &= \int f^*(\tau - t) g(\tau) d\tau\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(f \star g)[n] &= \sum_m f^*[m] g[n + m] \\ &= \sum_m f^*[m - n] g[m]\end{aligned}$$

Konvoluční jádra



Integrální transformace

- jednotící koncept

$$F(n) = \int f(t) \psi(t, n) dt$$

ψ ... jádro transformace

$$f(t) = \int F(n) \psi^{-1}(n, t) dn$$

ψ^{-1} ... inverzní jádro (nemusí existovat)

Fourierova transformace

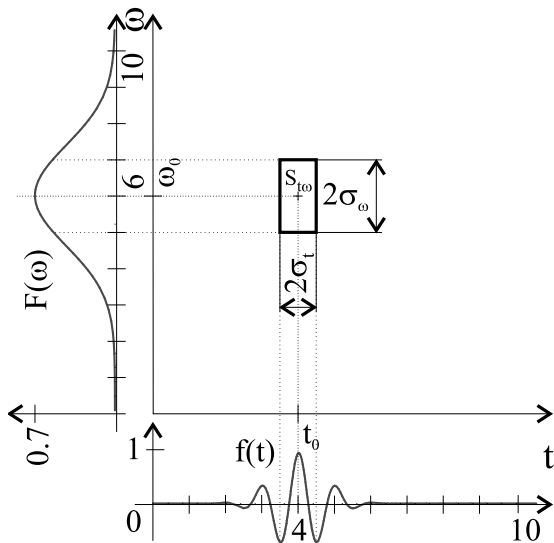
- převod mezi časovou a frekvenční oblastí

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

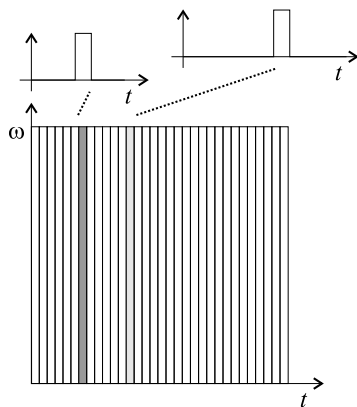
- frekvence
- spektrum

Časově-frekvenční rovina



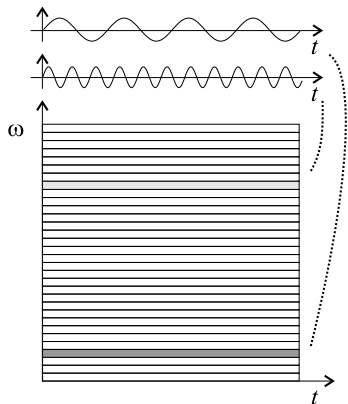
Časová oblast

Diracův nebo jednotkový impulz



Frekvenční analýza

Fourierova transformace



Časově-frekvenční analýza

Krátkodobá Fourierova transformace (STFT)

- reálné symetrické okno

$$g_{u,\omega}(t) = e^{i\omega t} g(t - u)$$

$$Sf(u, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) g(t - u) e^{-i\omega t} dt$$

- spektrogram

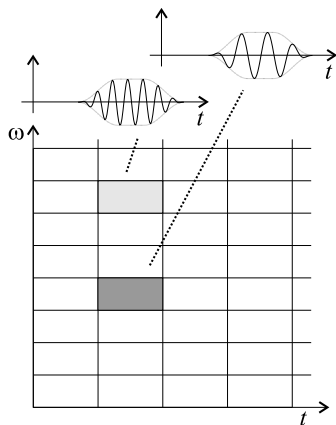
$$|Sf(u, \omega)|^2$$

- Gaborova transformace

$$g(x) = \sqrt{\alpha/\pi} e^{-\alpha t^2} \quad \alpha \in \mathbb{R}^+$$

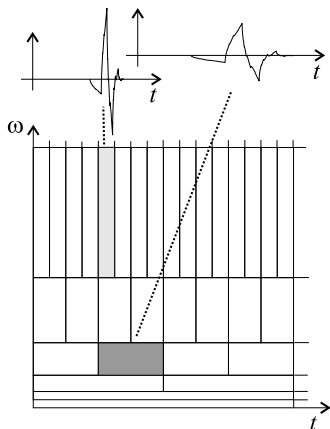
Časově-frekvenční analýza

krátkodobá Fourierova transformace



Časově-frekvenční analýza

vlnková transformace



Diskrétní Fourierova transformace (DFT)

- diskrétního (komplexního) signálu délky N

$$\hat{f}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} f[n] e^{-i\frac{2\pi}{N}kn}$$

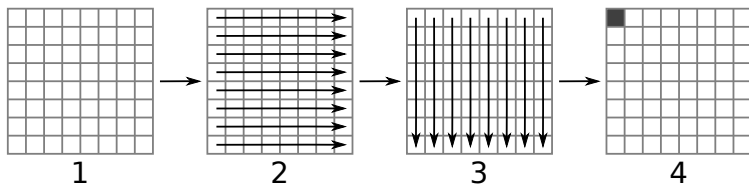
pro $0 \leq k < N$, \hat{f} komplexní

$$f[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{f}[k] e^{i\frac{2\pi}{N}kn}$$

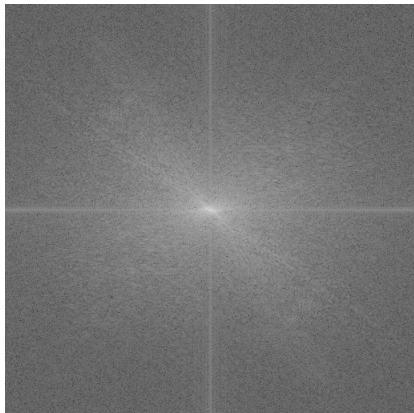
- stejnosměrná složka (DC) pro $k = 0$
- složitost $O(N^2)$, FFT $O(N \log_2 N)$

2D DFT

- separabilní



2D DFT



- modul, logaritmicky

Diskrétní kosinová transformace (DCT)

- DFT tvoří pro reálný signál komplexní koeficienty, symetrická

$$c[k] = \sum_{n=0}^{N-1} f[n] g_k[n]$$

$$f[n] = \sum_{k=0}^{N-1} c[k] g_k[n]$$

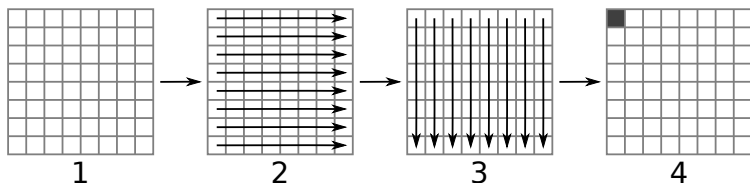
pro $0 \leq k < N$, kde

$$g_k[n] = \lambda_k \sqrt{\frac{2}{N}} \cos \left[\frac{k\pi}{N} \left(n + \frac{1}{2} \right) \right]$$

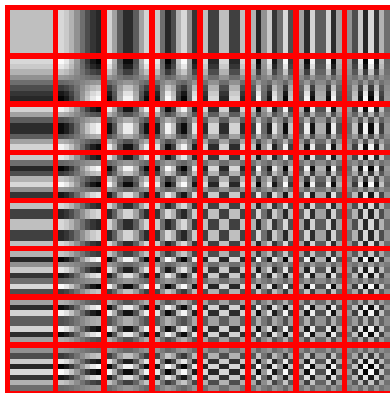
$$\lambda_k = \begin{cases} 1/\sqrt{2} & : k = 0 \\ 1 & : k \neq 0 \end{cases}$$

2D DCT

- separabilní
- JPEG



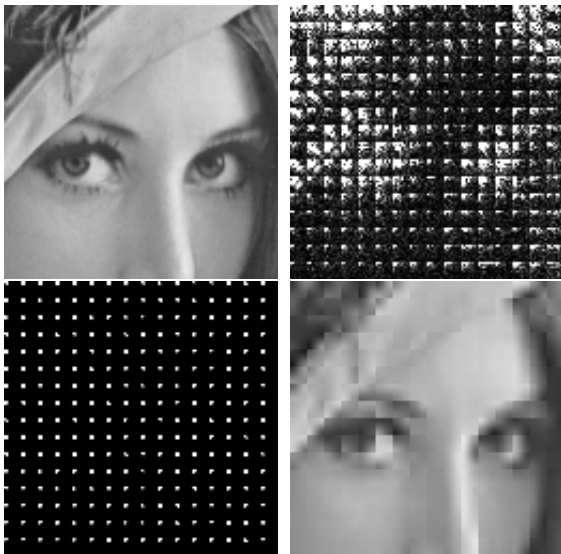
Báze 2D DCT



2D DCT



2D DCT 8×8



2D Gaborova transformace

- extrakce příznaků, segmentace, detekce hran
- 1D

$$g_{\alpha,\xi}(x) = \sqrt{\alpha/\pi} e^{-\alpha x^2} e^{-i\xi x}$$

$\alpha \in \mathbb{R}^+$, $\xi, x \in \mathbb{R}$, kde $\alpha = (2\sigma^2)^{-1}$, σ^2 je rozptyl, ξ je frekvence

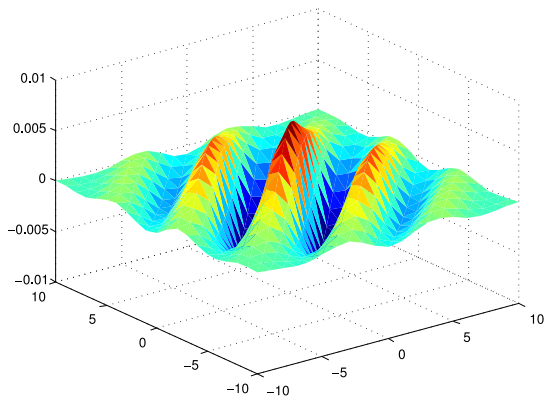
- 2D separabilní

$$g_{\alpha,\xi}(\mathbf{x}) = g_{\alpha,\xi_0}(x_0) g_{\alpha,\xi_1}(x_1)$$

$$\xi = (\xi_0, \xi_1), \mathbf{x} = (x_0, x_1)$$

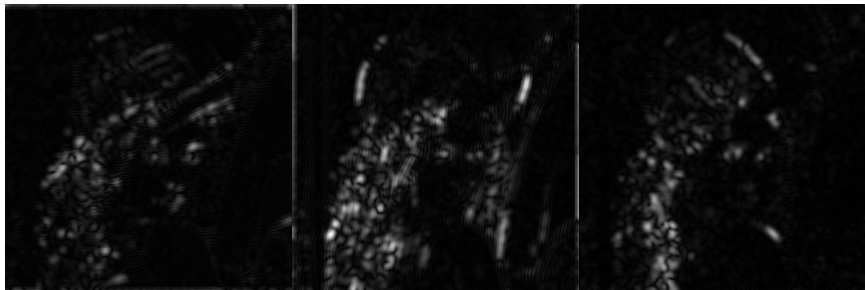
2D Gaborova transformace

jádro

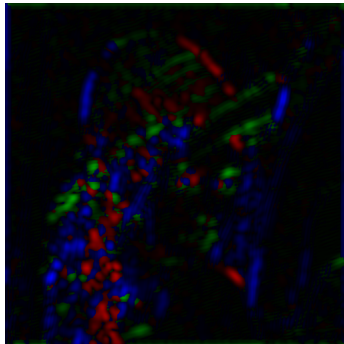


2D Gaborova transformace

směry 17, 77 a 137 stupňů



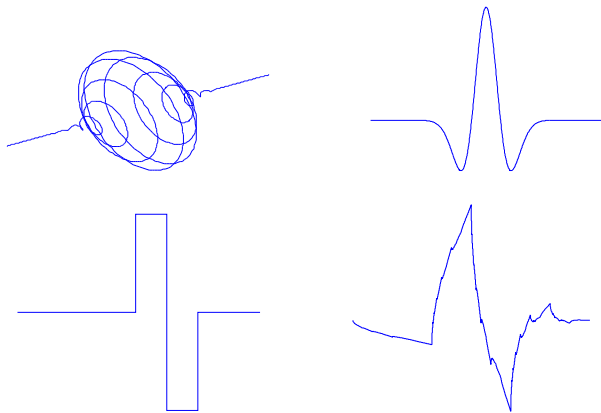
2D Gaborova transformace



Vlnka

angl. *wavelet*, fr. *ondelette*

$$\psi \in L^2(\mathbb{R})$$



Podmínky

- přípustnost

$$C_\psi = \int_0^{+\infty} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{\omega} d\omega < +\infty$$

- nulový průměr

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) dt = 0$$

- jednotková plocha

$$\|\psi\| = 1$$

Vlastnosti

- existence nosiče
- nulové momenty

$$m(k) = \int t^k \psi(t) dt$$

- hladkost (regularita)

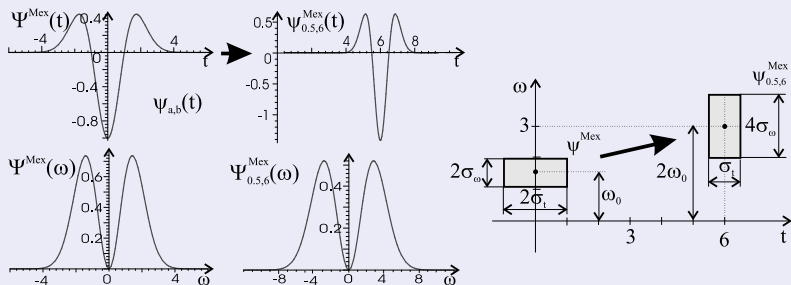
$$f = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \langle f, \psi_{j,n} \rangle \psi_{j,n}$$

- symetrie

Atomy

- roztažené a posunuté vlnky
- báze

$$\psi_{u,s}(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{t-u}{s}\right)$$



Vlnková transformace

- spojitá vlnková transformace

$$\begin{aligned} W f(u, s) &= \langle f, \psi_{u,s} \rangle \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \psi_{u,s}^* dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \frac{1}{\sqrt{s}} \psi^* \left(\frac{t-u}{s} \right) dt \\ &= f * \psi_s^*(u) \end{aligned}$$

$$\psi_s(u) = \frac{1}{\sqrt{s}} \psi \left(\frac{-t}{s} \right)$$

$$u \in R, s \in R^+$$

Vlnková transformace

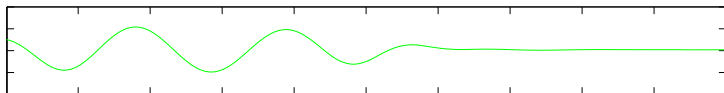
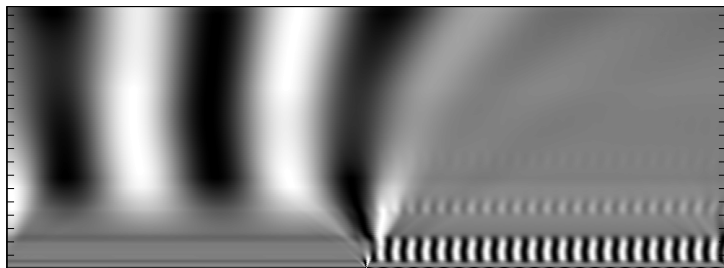
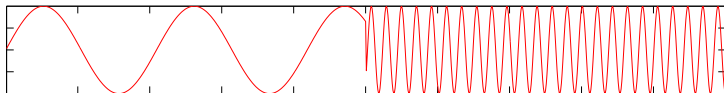
- škálogram

$$|W f(u, s)|^2$$

- inverzní

$$f(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} W f(u, s) \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{t-u}{s}\right) du \frac{ds}{s^2}$$

Vlnková transformace



Vlnková transformace

Měřítková funkce (škálovací funkce)

- známe $W f(u, s)$ pro $s < s_0$
- potřebujeme zbytek informace pro $s > s_0$
- zavedeme ϕ

$$|\hat{\phi}(\omega)|^2 = \int_1^{+\infty} |\hat{\psi}(s\omega)|^2 \frac{ds}{s}$$

$$L f(u, s) = \langle f, \phi_{u,s} \rangle$$

$$\|\phi\| = 1$$

Vlnková transformace

Vlnkové rámce (wavelet frames)

- diskrétní parametry u, s

$$s = s_0^m, u = nu_0s_0^m$$

$$m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}, s_0 > 1, u_0 > 0$$

Vlnkové řady (wavelet series)

- odstraněna nadbytečná informace
- dyadické vzorkování $s_0 = 2, u_0 = 1$

$$s = 2^m, u = n2^m$$

$$m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}$$

Diskrétní vlnková transformace

Multirozklad (Multiresolution analysis)

- $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$ rozložit do hierarchických podprostorů \mathbf{V}_m
- multirozklad L^2

$$\{0\} \cdots \subset \mathbf{V}_2 \subset \mathbf{V}_1 \subset \mathbf{V}_0 \subset \mathbf{V}_{-1} \subset \mathbf{V}_{-2} \subset \dots \subset L^2(\mathbb{R})$$

- $\{\phi_{j,n}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ je báze \mathbf{V}_j
- ortogonální doplněk

$$\mathbf{V}_{j-1} = \mathbf{V}_j \oplus \mathbf{W}_j$$

- $\{\psi_{j,n}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ je báze \mathbf{W}_j

Diskrétní vlnková transformace

Multirozklad (Multiresolution analysis)

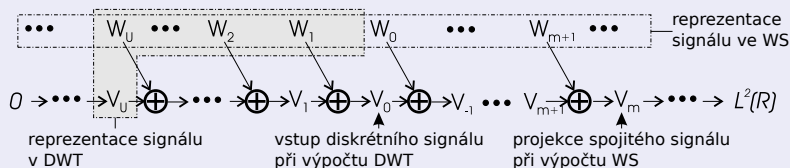
- $\{\psi_{j,n}\}_{j,n \in \mathbb{Z}^2}$ je báze $L^2(\mathbb{R})$

$$L^2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{j=-\infty}^{+\infty} \mathbf{W}_j$$

$$L^2(\mathbb{R}) = \underbrace{\cdots \oplus \mathbf{W}_2 \oplus \mathbf{W}_1}_{\mathbf{V}_1} \oplus \mathbf{W}_0 \oplus \underbrace{\mathbf{W}_{-1} \oplus \mathbf{W}_{-2} \cdots}_{\mathbf{V}_0}$$

Diskrétní vlnková transformace

Multirozklad (Multiresolution analysis)



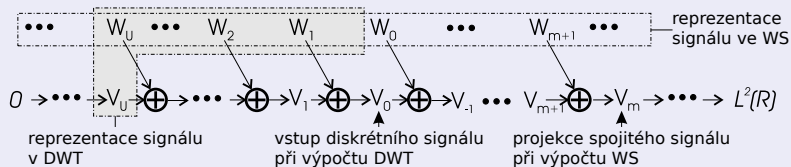
- dilatační rovnice

$$\phi(t) = \sqrt{2} \sum_n h(n) \phi(2t - n)$$

$$\psi(t) = \sqrt{2} \sum_n g(n) \phi(2t - n)$$

Diskrétní vlnková transformace

Diskrétní vlnková transformace (DWT)



- projekce do \mathbf{V}_u (přibližné koeficienty)

$$c_u(s) = \langle f, \phi_{u,s} \rangle$$

- projekce do \mathbf{W}_u (podrobné koeficienty)

$$d_u(s) = \langle f, \psi_{u,s} \rangle$$

Diskrétní vlnková transformace

Rychlá vlnková transformace (FWT)

$$c_{u+1}(s) = \sum_k h(k - 2s)c_u(k)$$

$$d_{u+1}(s) = \sum_k g(k - 2s)c_u(k)$$

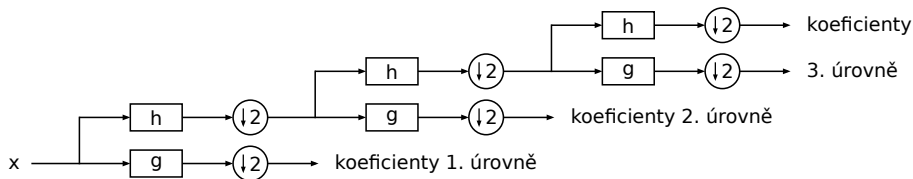
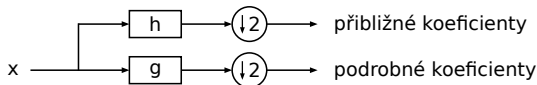
Složitost

- FFT $N \log N$
- DWT N
- lifting

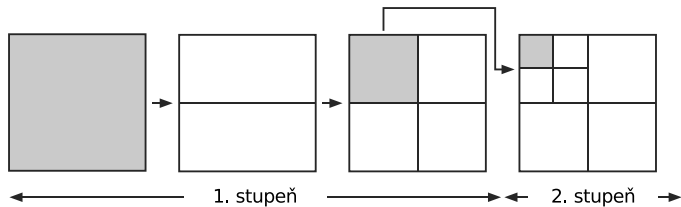
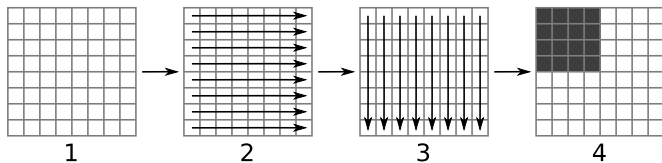
Diskrétní vlnková transformace

$$c_1[s] = (x * h)[s] \downarrow 2$$

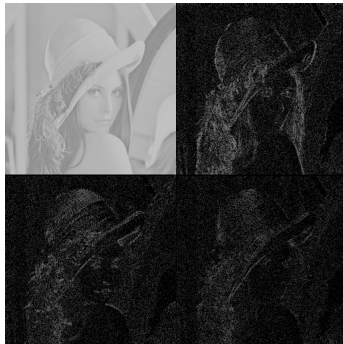
$$d_1[s] = (x * g)[s] \downarrow 2$$



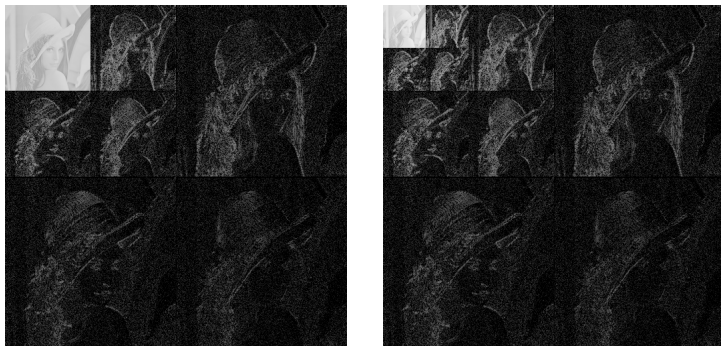
Dvourozměrná DWT – jeden stupeň



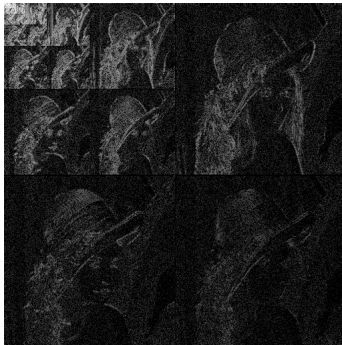
Dvourozměrná DWT – příklad



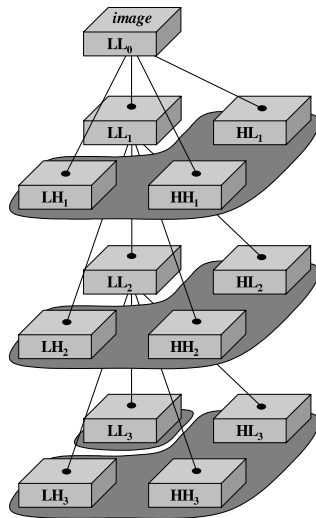
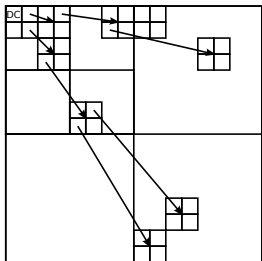
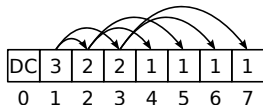
Dvourozměrná DWT – příklad



Dvourozměrná DWT – příklad



Dvourozměrná DWT – strom

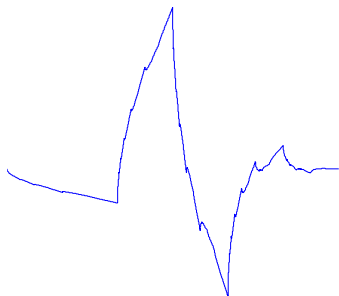
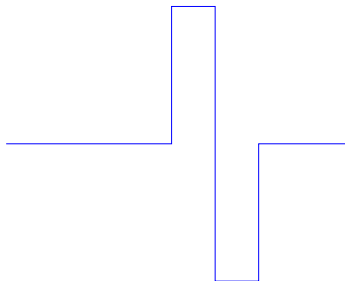


Používané vlnky

Haarova a Daubechiesové vlnky

- diskrétní (ortogonální), derivátory

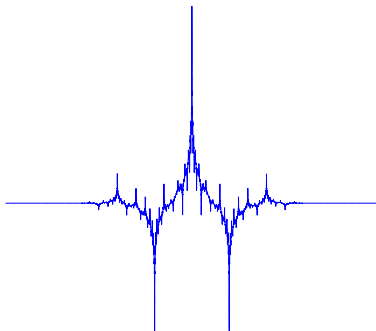
$$\psi(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < 1/2 \\ -1 & 1/2 \leq t < 1 \end{cases}$$



Používané vlnky

CDF / Biortogonální spline vlnky

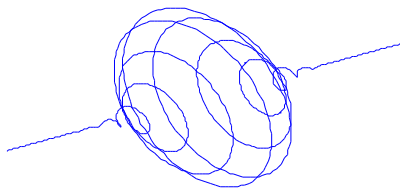
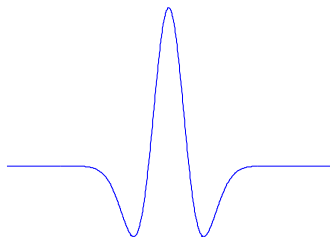
- diskrétní (biortogonální), komprese (JPEG 2000)



Používané vlnky

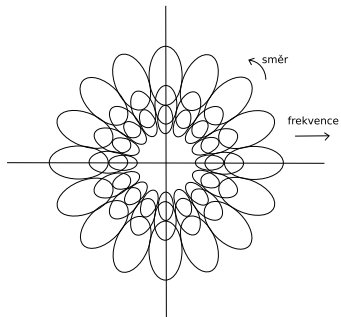
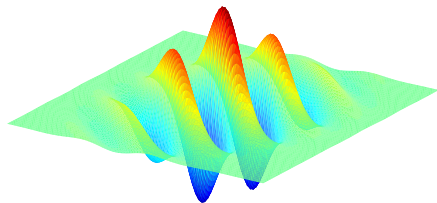
Mexický klobouk a Morletova nebo Gaborova vlnka

$$\psi(t) = c(t^2 - 1)e^{-t^2/2}$$



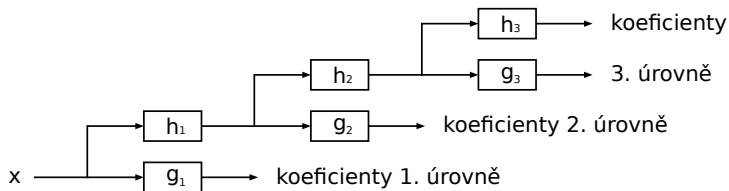
Používané vlnky

2D Gaborova vlnka



Stacionární vlnková transformace

- redundantní forma DWT
- vynecháno podvzorkování signálu, namísto toho nadvzorkování filtrů



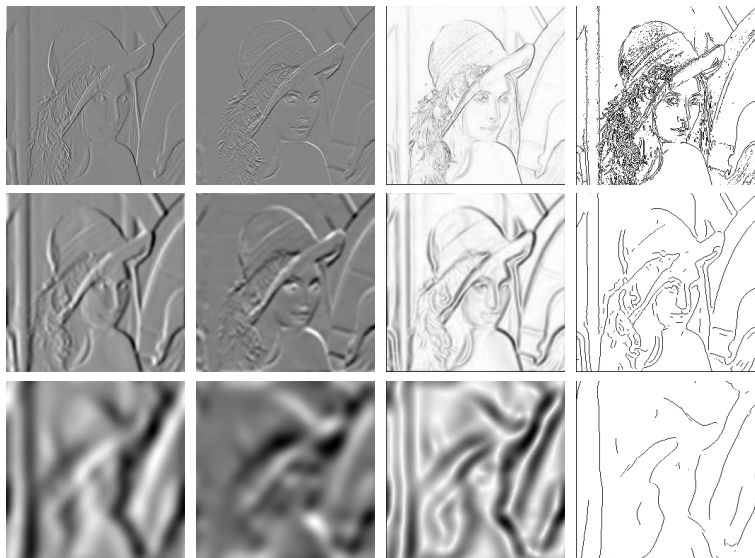
$$h_j \longrightarrow \left(\uparrow 2 \right) \longrightarrow h_{j+1}$$

$$g_j \longrightarrow \left(\uparrow 2 \right) \longrightarrow g_{j+1}$$

Výběr vlnky

- obecně: podobnost tvaru vlnky s charakteristickými úseky signálu
- komplexní vlnky: dobře detekují oscilace
- reálné vlnky: s málo oscilacemi dobře detekují špičky a singularity
- antisymetrické vlnky: jsou vhodné k detekci změn gradientu
- symetrické vlnky: nezpůsobují fázový posun
- krátký nosič: nižší výpočetní náročnost, přesnější lokalizace v čase (špatná ve frekvenci), nedochází k rozmazání signálu (měřítková funkce)
- dlouhý nosič: větší odezva koeficientů pro přechodové jevy

Detekce hran



Odstranění šumu

- prahování vlnkových koeficientů
- tvrdé (*hard*)

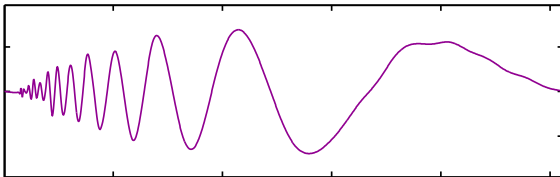
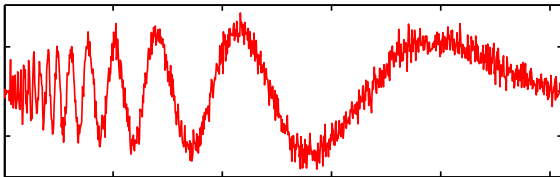
$$\rho_{\lambda}^{\text{hard}}(x) = \begin{cases} x & |x| \geq \lambda \\ 0 & |x| < \lambda \end{cases}$$

- měkké (*soft*)

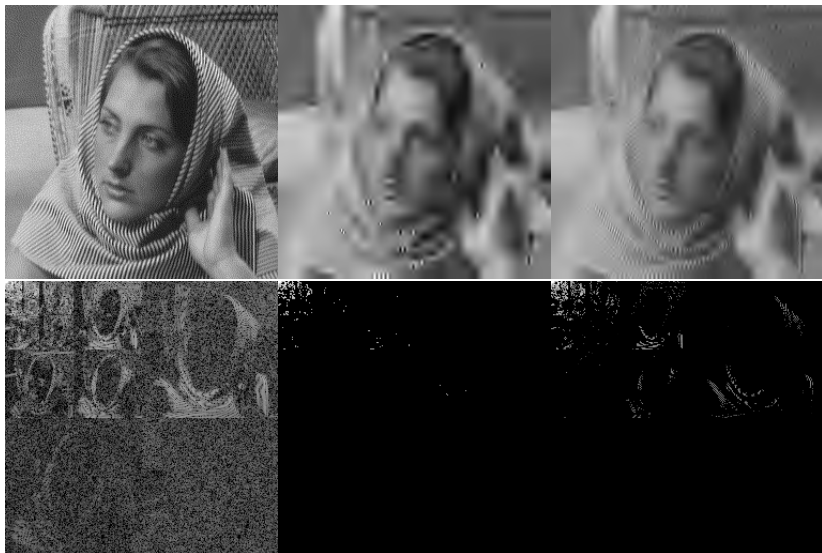
$$\rho_{\lambda}^{\text{soft}}(x) = \begin{cases} x - \lambda & x \geq \lambda \\ x + \lambda & x \leq -\lambda \\ 0 & |x| < \lambda \end{cases}$$

- volba prahu λ
- pro normální $N_0(0, \sigma^2)$ šumu se používá $\lambda = \sigma\sqrt{2 \ln M}$
- pro $N_0(0, \sigma^2)$ odvozeno $\sigma = \text{median}(|d_1|)/0,6745$

Odstranění šumu



Odstranění šumu – obraz



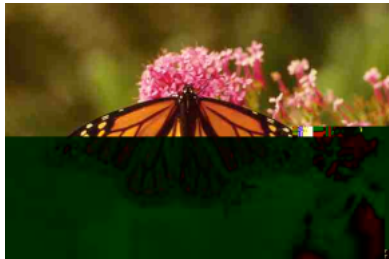
Srovnání s JPEG (113:1, ImageMagick)



Možnosti a výhody

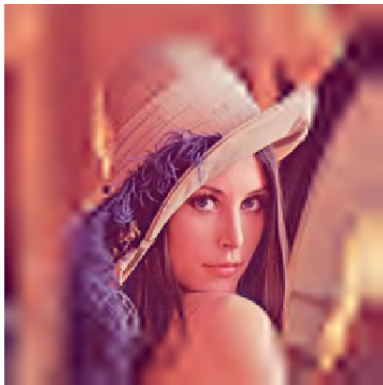
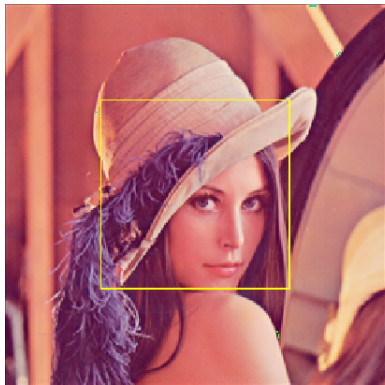
- ztrátová i bezztrátová komprese
- kvalita
- progresivní přenos
 - ▶ rozlišení
 - ▶ kvalita
 - ▶ prostorové umístění
- oblast zájmu (ROI)
- odolnost vůči chybám
- výpočetní složitost

Odolnost vůči chybám



Obrázek : JPEG, JPEG 2000

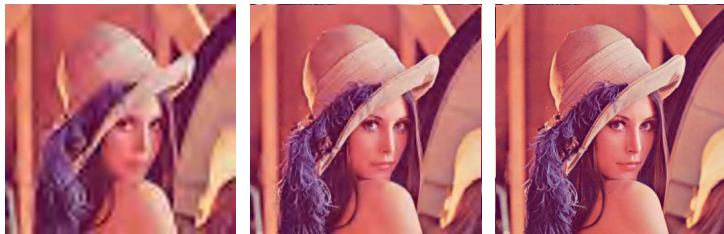
Oblast zájmu



Progresivní přenos (rozlišení)



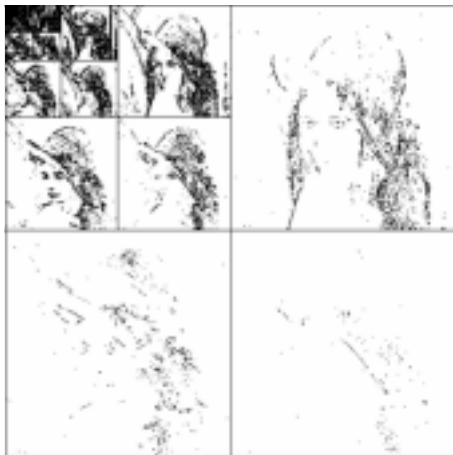
Progresivní přenos (kvalita)



Progresivní přenos (pozice)



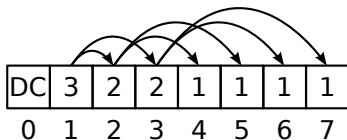
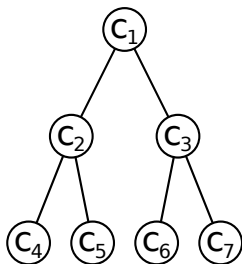
Korelace

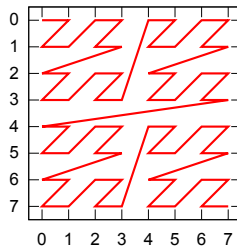
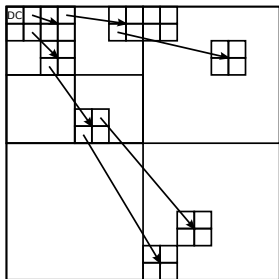


Embedded coder

- vkládání bitů v pořadí podle významnosti
- 2^n , kódování bitových rovin (bitplane coding)
- algoritmus
 - 1 inicializace
 - 2 kódování významnosti
 - 3 kódování znaménka
 - 4 upřesnění
 - 5 další krok

Strom koeficientů, korelace





- korelace mezi měřítky
- zerotree
- Mortonův rozklad
- algoritmus

① inicializace

② hlavní průchod

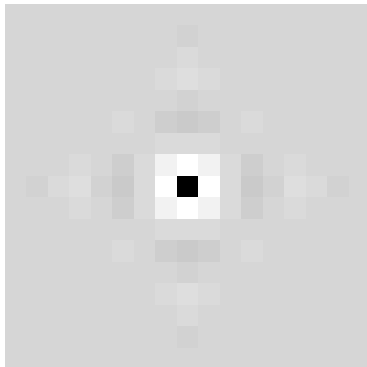
```
if( abs(c) > T ) {  
    output(P) or output(N);  
} else {  
    if( zerotree_root(c) ) output(T);  
    else output(Z);  
}
```

③ upřesňující průchod

④ další krok

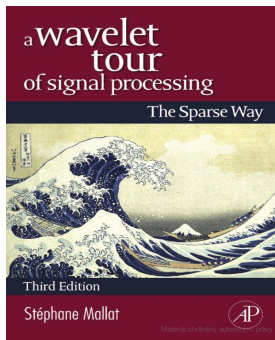
X-lety

curvelety, contourlety, shearlety, . . .



Shrnutí

- Fourierova transformace – komplexní exponenciály
- Gaborova transformace – exponenciály modulované Gaussovým oknem
- kosinová transformace – kosinusoidy
- vlnková transformace – vlnky
- detekce hran
- odstranění šumu
- komprese



MALLAT, Stéphane. *A Wavelet Tour of Signal Processing: The Sparse Way*. With contributions from Gabriel Peyré. 3rd edition. Academic Press, 2009. ISBN 9780123743701.