

Číslicové filtry (základy)

1. přehled některých pojmů a postupů nutných pro pochopení číslicových filtrů

1.1 Lineárně časově invariantní systémy (LTDI)

$$y(n) - a_1 y(n-1) - a_2 y(n-2) + \dots = b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + b_2 x(n-2) + \dots$$

$a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_m$ váhové koeficienty výstupu, $a_0 = 1$
 $b_0, b_1, b_2, b_3, \dots, b_n$ váhové koeficienty vstupu

Pozn. 1: Některé publikace a programy (MATLAB) používají v základní diferenční rovnici kladné koeficienty výstupu a_i a tedy v rekurentním tvaru rovnice a v $H(z)$ jsou znaménka u koeficientů výstupu opačná

Rekurentní tvar rovnice (hodnoty výstupu pomocí hodnot v dřívějších okamžicích)

$$y(n) = \sum_{i=0}^m b_i x(n-i) + \sum_{i=1}^n a_i y(n-i) \quad \dots(11-1)$$

1.2 Z transformace

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} x(n) z^{-n} \quad \text{pro } n \geq 0 \text{ jednostranná, } z \text{ komplexní číslo}$$

$\leftrightarrow$ značí převod mezi originálem a obrazem

$\delta(n) \leftrightarrow 1$, obraz jednotkového impulzu je 1
 $\delta(n-1) \leftrightarrow z^{-1}$ posunutý jednotkový impulz

$$u(n) \leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$$

1.3 Z transformace rekurentního tvaru rovnice (11- 1)

$$Y(z) = \sum_{i=0}^m b_i X(z) z^{-i} + \sum_{i=1}^n a_i Y(z) z^{-i}$$

$$Y(z) \left(1 - \sum_{i=1}^n a_i z^{-i}\right) = X(z) \sum_{i=0}^m b_i z^{-i}$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{i=0}^m b_i z^{-i}}{1 - \sum_{i=1}^n a_i z^{-i}}$$

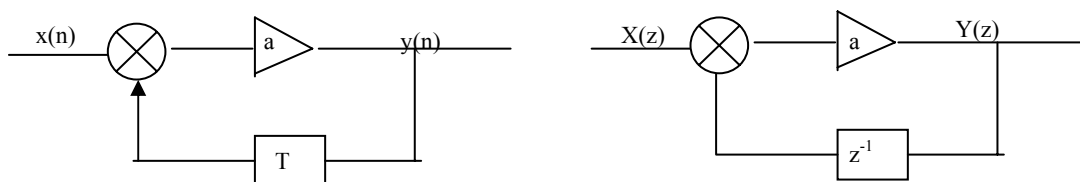
1.4 H(z) přenosová, systémová funkce

Lze ji nalézt:

1. **Z transformací impulsní odezvy $h(n)$** , (Pozn. $H(z) = Y(z)/X(z)$, $H(z) = Y(z)$ pro $X(z) = 1$, to odpovídá v časové oblasti vstupu $x(n) = \delta(n)$, tedy v časové oblasti impulsní odezvě)

2. **Transformací diferenční rovnice do Z- roviny a nalezení H(z)**

Ad2



Blokové schéma LTDI systému v časové a transformované oblasti

$$Y(z) = a [X(z) + z^{-1} Y(z)]$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{a}{1 - a z^{-1}} = \frac{a z}{z - a}$$

$h(n)$ je inverzní transformace $H(z)$

Pozn. pro $a=1$ je to přenos. funkce diskrétního integrátoru, $h(n) = 1(n)$

1.5 Diskrétní kruhová konvoluce

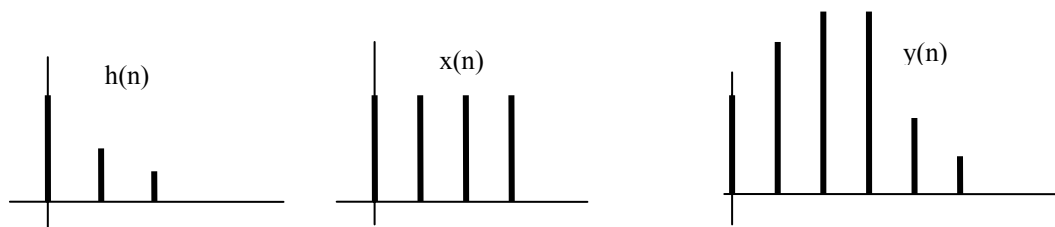
$$Y(z) = H(z) X(z)$$

Pro konečné signály tomuto vztahu v časové oblasti odpovídá kruhová (cyklická) konvoluce

$$y(n) = h(n) * x(n) = \sum_{k=0}^{M-1} h(k) \cdot x(n-k) = \sum_{k=0}^{M-1} x(k) \cdot h(n-k) \quad * \text{ značí znaménko konvoluce}$$

M počet členů $h(n)$, N počet členů vstupu, **Výstup $y(n)$ má $M+N-1$ členů**

Konvoluci provádíme pro nenulové vzorky signálu nebo impulsní odezvy př.



$$h(n) = \{1, 0.5, 0.25\}, \quad x(n) = \{1, 1, 1, 1\}, \quad y(n) = \{1, 1.5, 1.75, 1.75, 0.75, 0.25\}$$

Příklad ukazuje odezvu systému $y(n)$ na jednotkový skok $x(n)$ o délce 4 vzorky. Je zřejmé, že ustálený stav nastává až po M vzorcích, kde M je počet členů impulsní odezvy a podobně trvá i doběh. To je třeba vzít v úvahu zejména u číslicových filtrů FIR.

1.6 Vlastnosti konvoluce pro jednotkový(delta) impuls

- $x(n) * \delta(n) = x(n)$ konvoluce libovolného signálu s delta funkcí dává ten samý signál
- $x(n) * k\delta(n) = kx(n)$ zesílení nebo zeslabení($k < 1$) signálu
- $x(n) * \delta(n+s) = x(n+s)$ delta funkce s posunem dává v konvoluci se signálem posunutý signál, je-li $s > 0$, jde o zpoždění, pro $s < 0$ jde o dopředný posun

Je možno provádět i sloučení kdy můžeme signál posunout, vynásobit, nebo provést zpožděnou a zmenšenou funkci vyjadřující ozvěnu (echo).

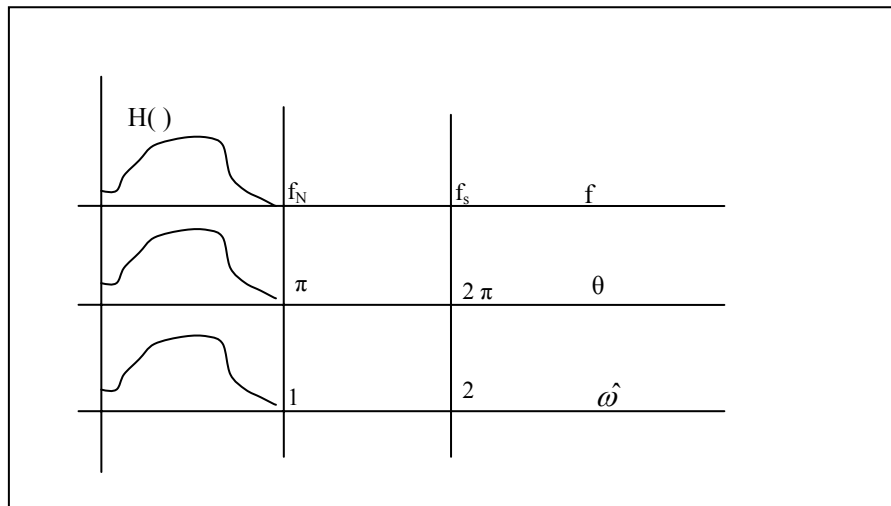
1.7 Frekvenční charakteristika číslicových systémů

Kmitočtovou charakteristiku získáme dosazením $z = e^{j\omega\Delta t}$ do výrazu pro $H(z)$ $H(e^{j\omega\Delta t})$, Δt je vzorkovací perioda, $f_{vz} = f_s$ je vzorkovací frekvence

často používáme **normovanou kruhovou frekvence** $\theta = 2\pi f/f_s$ odpovídající formálně zavedení jednotkové vzorkovací frekvence nebo periody, $H(e^{j\theta})$, (ve skriptech Sedláček)

nebo $\hat{\omega}$ odpovídající formálně jednotkové kruhové vzorkovací frekvenci $\hat{\omega} = 2\pi f/\pi f_s$ (Davídek, MATLAB)

Kmitočtová charakteristika digitálních systémů je periodická s periodou vzorkování vzhledem k periodicitě komplexní exponenciály. Z normovaných charakteristik je zřejmé, že při změně vzorkovací frekvence se mění charakteristické veličiny frekvenční odezvy.



Tři způsoby zápisu a zobrazení frekvenční charakteristiky číslicových systémů

2. Číslicové filtry

Návrh číslicových filtrů tvoří společně s DFT a spektrální analýzou základ klasického číslicového zpracování signálů. Lze je popsat přenosem, frekvenční charakteristikou, impulsní odezvou nebo diferenční rovnicí.

Číslicový filtr je algoritmus nebo obvod, který mění spektrum vstupního diskretního signálu. Může být realizován speciálním obvodem nebo programem pro počítač. V reálném čase musí filtr mezi dvěma vzorky provést výpočet konvoluce (filtr FIR); zde se často používají speciální obvody – signálové procesory.

Číslicové filtry navazují na pasivní a aktivní analogové filtry a lze je navrhovat buď přímo (FIR), nebo převedením analogového prototypu (IIR)

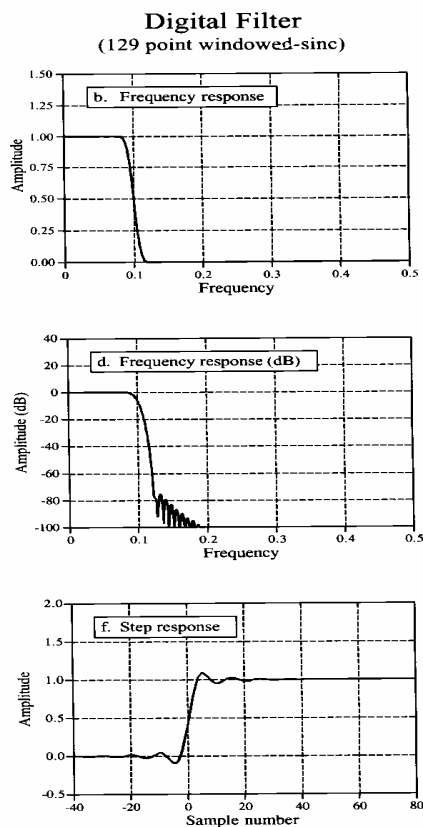
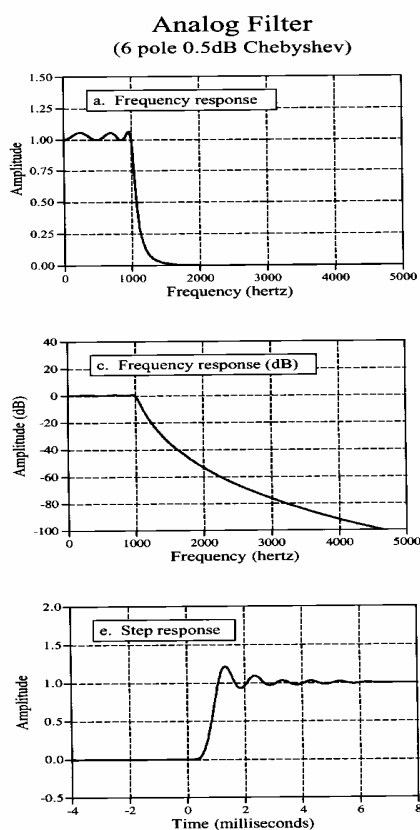
Porovnání analogových a číslicových filtrů

Číslicové filtry

- Vysoká přesnost
- Nemají drift
- mohou mít lineární fázi (FIR)
- možnost adaptivní filtrace
- snadná simulace a návrh
- výpočet musí proběhnout během periody vzorkování
- filtrace nízkých frekvencí
- nevhodné pro vf signály

Analogové filtry

- Menší přesnost
- drift vlivem změn součástek
- nelineární fáze
- adaptivní filtrace nejde
- obtížná simulace a návrh
- vhodné pro vysoké frekvence

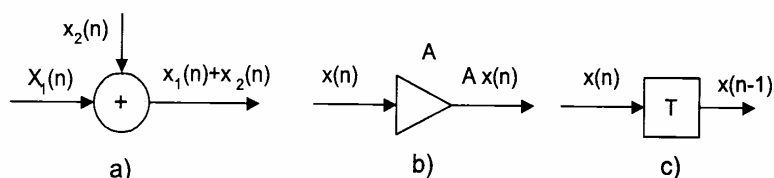


Rozdělení číslicových filtrů

- podle délky $h(n)$
 - filtry s konečnou impulsní odezvou FIR
 - filtry s nekonečnou impulsní odezvou IIR
- podle struktury blok. schématu
 - nerekurzivní filtry NRDF (nemají zpětnou vazbu)
 - rekurzivní filtry (zpětná vazba) většinou IIR filtry

Kanonická forma má minimální počet zpožďovacích členů

Číslicový filtr lze sestavit ze tří základních bloků a) sčítačka, b) násobení konstantou c) jednotkové zpoždění



Obr. Základní bloky filtrů a) sčítačka, b) násobení konstantou, c) jednotkové zpoždění

2.1 FIR filtry

Neobsahují zpětnou vazbu, jedná se o nerekurzivní filtry.

Přenos kauzálního (pouze kladné hodnoty n) filtru je dán vztahem

$$H(z) = b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_M z^{-M} = \sum_{n=0}^M b_n z^{-n}.$$

a příslušná diferenciální rovnice

$$y(n) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + \dots + b_M x(n-M).$$

Impulzní odezvu $h(n)$ lze získat zpětnou transformací $H(z)$

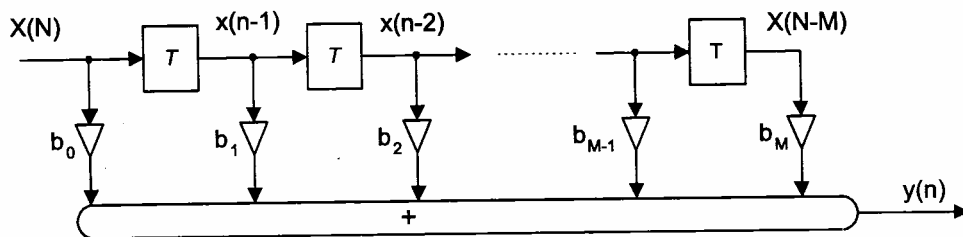
$$h(n) = b_0 \delta(n) + b_1 \delta(n-1) + \dots + b_M \delta(n-M).$$

délka odezvy je $M+1$. Koeficienty impulsní odezvy jsou koeficienty přenosové funkce. Vyjádříme-li $H(z)$ v kladných mocninách z

$$H(z) = \frac{\sum_{n=0}^M b_n z^{M-n}}{z^M}.$$

$H(z)$ má pouze M -násobný pól v počátku. Filtry FIR jsou vždy stabilní.

Nejrozšířenější strukturou je transversální filtr. Je to zpožďovací linka s odbočkami pro násobičky. Filtr počítá vážený klouzavý průměr z $M+1$ posledních hodnot. **Koeficienty násobiček jsou hodnotami impulzní odezvy – $b_n = h(n)$.**



Obr. Blokové schéma transversálního FIR filtru.

Filtr zpožďuje signál o $(M+1)/2$ taktů a ustálí se po $M+1$ taktech.

2.1.1 Lineární fáze FIR filtrů

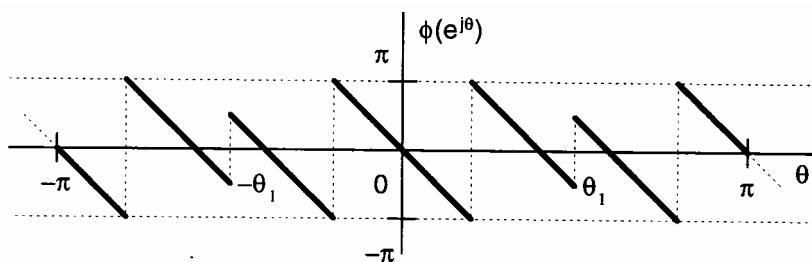
Filtry FIR mohou mít lineární fázi. Fázová frekvenční charakteristika takového filtru je dána vztahem

$$\varphi(e^{j\theta}) = -\alpha\theta + \beta, \quad \alpha, \beta > 0. \quad \text{přímka se záporným sklonem}$$

Záporná derivace fáze se nazývá skupinové zpoždění $\tau_g(e^{j\theta})$

$$\tau_g(e^{j\theta}) = -\frac{d\varphi}{d\theta} = \alpha (= konst).$$

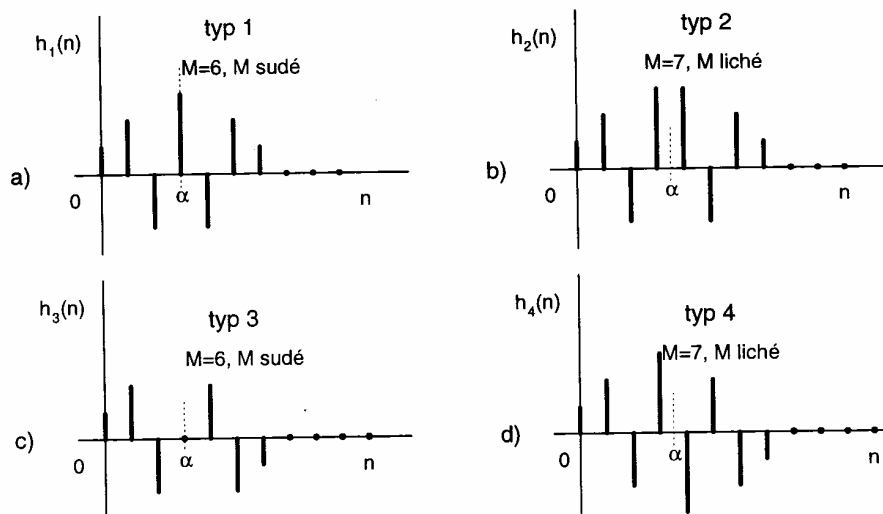
Konstantní skupinové zpoždění znamená, že se všechny složky signálu kmitočtovém pásmu dostanou na výstup se stejným zpožděním. Filtry řádu M s lineární fází mají skupinové zpoždění $M/2$ a filtrovaný signál je zpožděn o $M/2$ kroků. V propustném pásmu je tvar signálu zachován.



Příklad fázové charakteristiky FIR filtru s lineární fází.

Menší skoky charakteristiky odpovídají nulám $H(z)$, ležícím na jednotkové kružnici.

Existují 4 typy filtrů s lineární fází.



- typ 1 (sudá symetrie, M sudé): žádné omezení $H(e^{j\theta})$,
- typ 2 (sudá symetrie, M liché): $H(e^{j\pi}) = 0$, filtr se nehodí pro návrh horní propusti,
- typ 3 (lichá symetrie, M sudé): $H(e^{j0}) = 0$ a $H(e^{j\pi}) = 0$, filtr se hodí pouze pro návrh pásmové propusti,
- typ 4 (lichá symetrie, M liché): $H(e^{j0}) = 0$, filtr se nehodí pro návrh dolní propusti a pásmové zadržky.

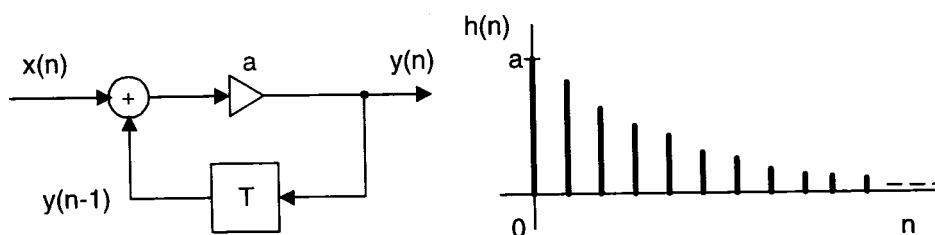
Filtry FIR se zadávají **průběhem amplitudově frekvenční charakteristiky**. Návrh spočívá v určení kauzální impulsní odezvy tak, aby byla zadaná charakteristika $|H(e^{j\theta})|$ dostatečně přesně aproximována impulsní odezvou $h(n)$ a vykazovala požadovanou symetrii. Frekvenční charakteristiku najdeme dosazením $z = e^{j0}$ do výrazu pro $H(z)$

$$H(e^{j\theta}) = \sum_{n=0}^M h(n)e^{-j\theta} = |H(e^{j\theta})| \cdot e^{j\varphi}.$$

2.2 Filtry IIR

Vyžadují alespoň jednu zpětnovazební smyčku, jsou to rekurzivní filtry. Přenos je tvořen podílem polynomů. Nuly přenosu realizují nerekurzivní část, póly rekurzivní část. Řád filtru je určen vyšším ze stupňů polynomu. Mají podstatně nižší řád než filtry FIR, takže reagují rychleji.

Pokud jsou **póly přenosu uvnitř jednotkové kružnice, pak je filtr stabilní**. Pokud jsou i nuly uvnitř jednotkové kružnice, pak se jedná o filtr s minimální fází. Příklad jednoduchého filtru IIR je na dalším obrázku.



Příklad IIR filtru a jeho impulsní charakteristiky.

$H(z) = (az)/(z-a)$, Filtr má pól $z_1 = a$. Pro $a > 1$ je filtr nestabilní
 $h(n) = a^{n+1} \cdot u(n), \dots$

Přenos IIR filtru:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_M z^{-M}}{1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2} - \dots - a_N z^{-N}}$$

Pozn 2. Pozor MATLAB aj. používají přenos s kladnými znaménky ve jmenovateli. Viz. Pozn. 1.

kauzální filtr má $N \geq M$.

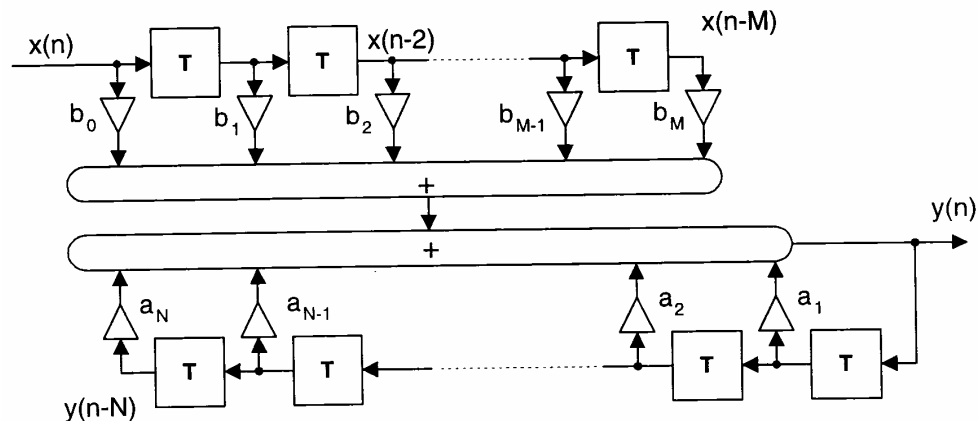
Tomu odpovídá diferenční rovnice

$$y(n) = \sum_{i=0}^M b_i x(n-i) + \sum_{i=1}^N a_i y(n-i)$$

Filtr IIR lze realizovat třemi způsoby

1. přímá forma (první a druhá)
2. kaskádní forma
3. paralelní forma

Přímá forma IIR filtru

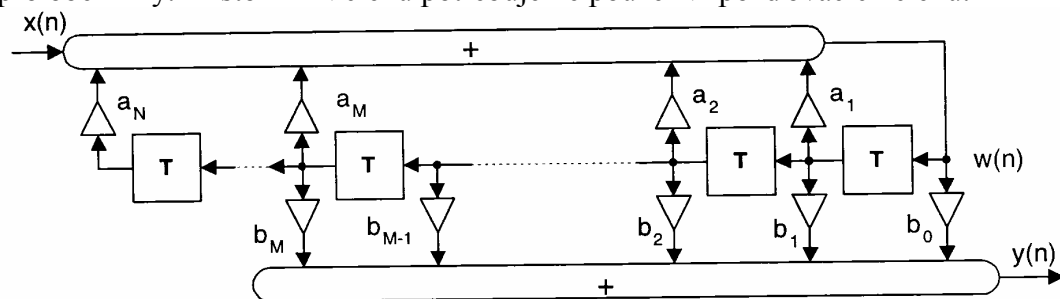


Obr. Blokové schéma první přímé formy filtru IIR

Odpovídá diferenční rovnici. Nevýhodou je velký počet zpoždovacích linek.

Druhá přímá forma IIR filtru

Při záměně zpoždovacích linek v první přímé formě můžeme stejné zpoždovací členy použít pro obě linky. Místo $M+N$ členů potřebujeme pouze N zpoždovacích členů.



$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{Y(z)}{W(z)} \cdot \frac{W(z)}{X(z)}$$

$$\frac{Y(z)}{W(z)} = b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_M z^{-M},$$

$$\frac{W(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2} - \dots - a_N z^{-N}}$$

tomu odpovídají příslušné diferenční rovnice rekurzivní

$$y(n) = b_0 w(n) + b_1 w(n-1) + \dots + b_M w(n-M)$$

$$w(n) = x(n) + a_1 w(n-1) + \dots + a_N w(n-N).$$

Je výhodná pro filtraci signálovým procesorem. Pro $w(n)$ stačí jeden kruhový registr.

Předpokládá se $M=N$, koeficienty vstupu s indexy většími než M se položí rovny nule.

Tato forma je citlivá na numerickou nepřesnost koeficientů.

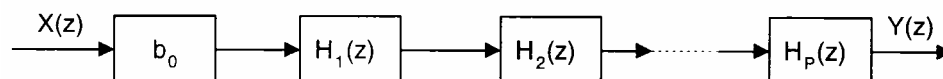
Kaskádní forma filtru IIR

$H(z)$ se rozepíše do součinu racionálních lomených funkcí 2. stupně. Přenos je:

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^M b_i z^{-i}}{1 - \sum_{i=1}^N a_i z^{-i}} = b_0 \prod_{k=1}^P \frac{1 + B_{1k} z^{-1} + B_{2k} z^{-2}}{1 - A_{1k} z^{-1} - A_{2k} z^{-2}} = b_0 \prod_{k=1}^P H_k(z),$$

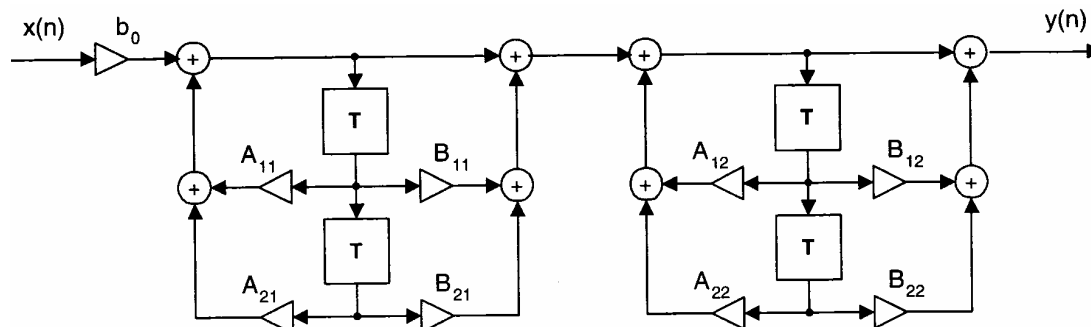
Koeficienty u bikvadratických členů jsou reálná čísla, póly a nuly (kořeny) jsou reálné nebo komplexně sdružené.

Příslušné blokové schéma je



Jednotlivé bloky se realizují pomocí druhé přímé formy.

Pro $N=4$ je podrobné schéma

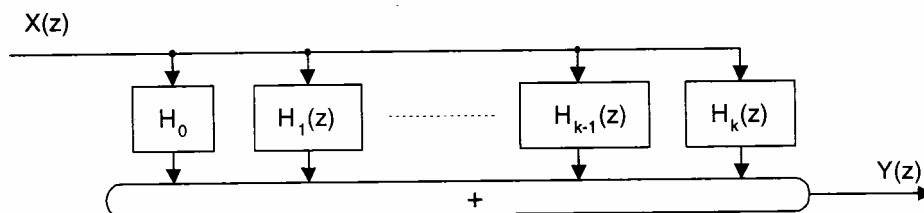


Kaskádní forma IIR filtru 4. stupně

Tato forma je v praxi nejčastější!! Výhodou je menší citlivost na nepřesnosti koeficientů.

Paralelní forma IIR filtru

$$H(z) = H_0 + H_1(z) + H_2(z) + \dots + H_k(z)$$



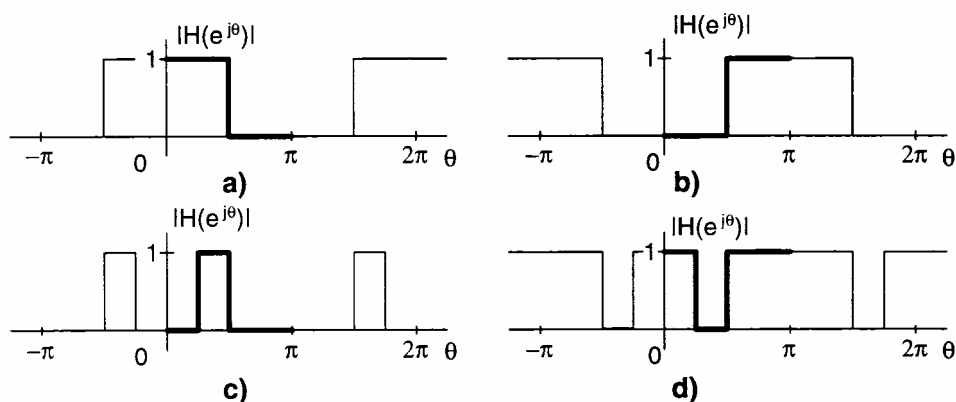
2.3 Rozdělení filtrů podle účelu.

Amlitudově frekvenční charakteristiky filtrů jsou (na rozdíl od analogových filtrů) periodické s f_{vz} , ω_{vz} , 2π , 1 podle toho vynášíme li charakteristiku jako funkci f , ω , θ , nebo $\hat{\omega}$. Amplitudově frekvenční charakteristiky jsou sudé funkce, fázové frekvenční charakteristiky jsou liché funkce. Stačí je znát v polovině intervalu.

1. Frekvenčně selektivní číslicové filtry:

Jsou to dolní propust (DP) viz a), horní propust (HP) viz b) pásmová propust (PP) viz c) a pásmová zádrž (PZ) viz d).

Realizují se jako FIR nebo IIR filtry, mají –li mít lineární fázi, pak FIR filtry.



2. Diskrétní integrátor

má analogovou přenosovou funkci $H_{id}(e^{j\omega}) = 1/j\omega$

Frekvenční charakteristika diskrétního integrátoru

$$H_{id}(e^{j\theta}) = \frac{1}{j\theta} = \frac{1}{\theta} e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

Integrál se ve skutečnosti počítá algoritmy z diskrétní matematiky např.

$$y(n) = y(n-1) + x(n)$$

$$y(n) = y(n-1) + \frac{1}{2} [x(n) + x(n-1)]$$

3. Diskrétní derivátor

derivuje vstupní signál, důležitý pro určení zrychlení, nebo detekci hran v obrazech.

Odpovídající spojitá frekvenční charakteristika je $H_{Did}(\omega) = j\omega$.

Diskrétní frekvenční charakteristika je

$$H_{Did}(e^{j\theta}) = j\theta, \quad |\theta| \leq \pi.$$

Prakticky se nahrazuje diferencí

$$y(n) = x(n) - x(n-1)$$

nebo jako nekauzální filtr popsany rekurentním vztahem

$$y(n) = \frac{1}{2} [x(n+1) - x(n-1)].$$

symetricky ke zkoumanému $x(n)$

4. Klouzavý průměr (moving average MA)

počítá průměr z daného vzorku a M předchozích. Může být vážený se shodnými koeficientu $b_i = 1/(M+1)$, nebo s exponenciálním zapomináním jako rekurzivní filtr s váhami koeficientů a^{-ci} , kde c je přirozené číslo.

Nevážený klouzavý průměr je popsán diferenční rovnicí

$$y(n) = \frac{1}{N} \sum_{i=n-(N-1)}^n x(i) = \frac{1}{N} [x(n - (N - 1)) + x(n + 1 - (N - 1)) + \dots + x(n - 1) + x(n)] .$$

Přenos filtru je tedy

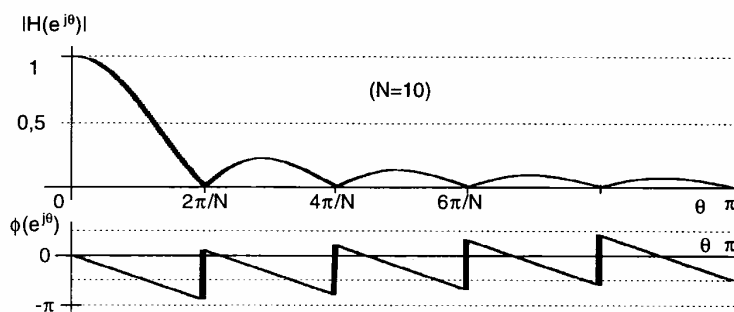
$$H_{MA}(z) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} z^{-i} .$$

Vztah je součtem N členů geometrické řady s kvocientem z^{-1} , takže platí

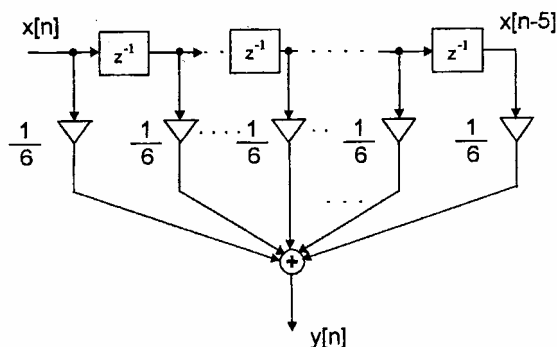
$$H_{MA}(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{N} \frac{1 - z^{-N}}{1 - z^{-1}} .$$

Odpovídající frekvenční charakteristika je tedy

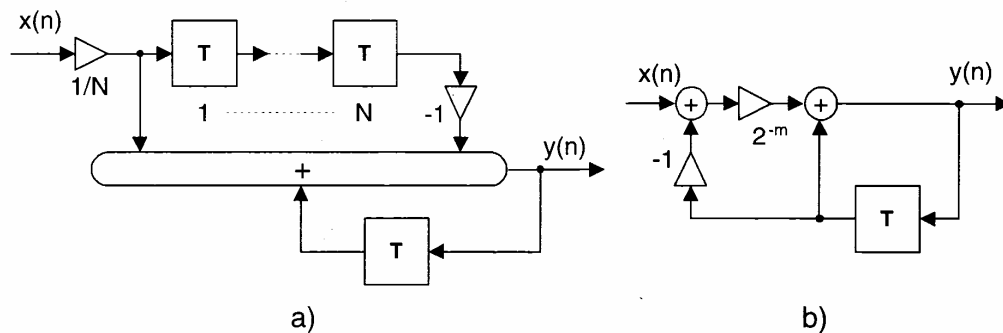
$$H_{MA}(e^{j\theta}) = H_{MA}(z)|_{z=e^{j\theta}} = \frac{1}{N} \frac{1 - e^{-jN\theta}}{1 - e^{-j\theta}} = \frac{1}{N} e^{-j(N-1)\frac{\theta}{2}} \frac{\sin(N\frac{\theta}{2})}{\sin\frac{\theta}{2}} .$$



Frekvenční amplitudová a fázová charakteristika klouzavého průměru délky 10. Filtr má lineární fázi.



Nevážený klouzavý průměr realizovaný jako FIR filtr N=6



Nevážený klouzavý průměr jako rekurzivní filtr (a) viz upravený vztah pro přenos filtru; (b) vážený klouzavý průměr

Klouzavý průměr potlačuje rušivý střídavý signál. Délku filtru N volíme tak, aby první nula frekvenční charakteristiky padla na frekvenci rušení.

$$f_{vz} = N f_r.$$

čili délka filtrace $N \cdot \Delta t$ musí být právě shodná s periodou rušení t_r .

Klouzavý průměr s exponenciálním zapomináním (exp. vážený klouzavý průměr) počítá průměr z hodnot jejichž váhy exponenciálně klesají. V diferenční rovnici (viz dif. rovnice pro nevážený klouz. průměr) jsou hodnoty vzorků násobeny váhou V^{n-i} .

2.4 Základní charakteristiky číslicových filtrů FIR a IIR

Číslicové filtry typu FIR		Číslicové filtry typu IIR	
Výhody	Nevýhody	Výhody	Nevýhody
Jsou vždy stabilní.	Velký řád přenosové funkce.	Malý řád přenosové funkce.	Nastávají problémy se stabilitou.
Mohou mít lineární fázovou kmitočtovou charakteristiku, neboli konstantní skupinové zpoždění.	Velké zpoždění při zpracování vstupního vzorku.	Malé zpoždění při zpracování vstupního vzorku.	Nemohou mít lineární fázovou kmitočtovou charakteristiku v celém rozsahu.
Mají menší citlivost na kvantování koeficientů a stavových proměnných.	Velké nároky na paměť při výpočtu koeficientů a stavových proměnných.	Malé nároky na paměť při výpočtu koeficientů a stavových proměnných.	Vlivem zpětných vazeb větší náchylnost k saturaci aritmetiky procesoru.
Jsou vhodné pro adaptivní algoritmy.	Optimální iterační metody jsou výpočtově náročné.	Jednoduché metody návrhu využívající vlastností analogových filtrů.	S obtížemi je lze použít pro adaptivní zpracování.
Existuje menší riziko saturace aritmetiky procesoru.	Neexistuje plnohodnotný analogový ekvivalent.	K číslicovému filtru lze najít analogový ekvivalent.	Velká citlivost na kvantování zvláště pro selektivní kmitočtové filtry.

3. Metody návrhu číslicových filtrů.

Návrh filtrů vychází z požadovaného průběhu amplitudové frekvenční charakteristiky. Průběh fázové charakteristiky není zadán. Charakteristiky jsou periodické s periodou 2π , proto stačí zadat průběh v intervalu $\langle 0, \pi \rangle$. Požaduje – li se lineární fáze volíme filtr FIR.

Dnes se číslicové filtry navrhují převážně podle počítačových programů jako Digital Filter Design firmy NI, nebo MATLAB, Signal Processing Toolbox. Program LabWindows/CVI obsahuje velké množství funkcí pro návrh číslicových filtrů.

Návrh filtrů bude probrán pouze velmi stručně.

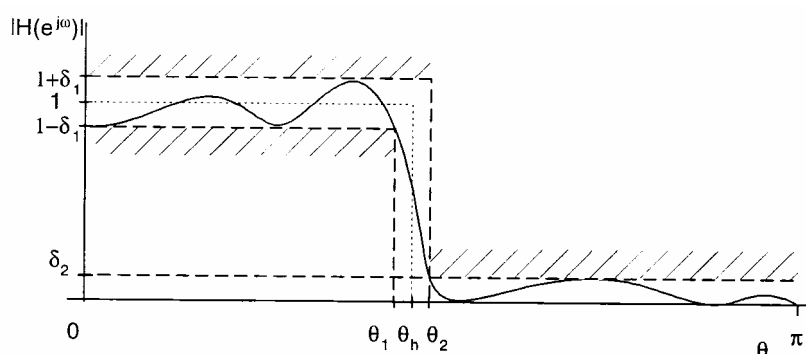
Obecně je postup návrhu číslicového filtru následující:

- volba typu filtru, FIR, IIR
- volba řádu filtru (ten v některých případech umožňuje určit procedura programu, např. pro zvolený druh IIR filtru a předepsané tolerance v propustném a závěrném pásmu filtru)
- volba struktury filtru (jde-li o IIR filtr) a výpočet koeficientů přenosu,
- kontrola splnění zadání (výpočet a zobrazení frekvenční charakteristiky filtru).

Pokud frekvenční charakteristika navrženého filtru nevyhovuje předepsaným tolerancím, návrh se opakuje (např. pro vyšší řád filtru).

Prakticky všechny programy umožňují navrhovat základní frekvenčně selektivní filtry (DP, HP, PP, PZ). Při návrhu se zadává buď typ filtru (FIR nebo IIR), řád filtru a druh filtru (např. pásmová zádrž řádu 5, Cebyševův filtr prvního druhu), nebo je zadán toleranční diagram a druh filtru (např. FIR1 nebo Butterworth) a program sám určí řád filtru a jeho koeficienty tak, aby bylo splněno předepsané toleranční schéma.

Základním typem frekvenčně selektivního filtru je dolní (dolnofrekvenční) propust. Z ní se pomocí tzv. **frekvenčních transformací** počítají koeficienty ostatních typů frekvenčně selektivních filtrů. Způsob těchto transformací je odlišný pro FIR filtry a IIR filtry. Příklad tolerančního diagramu dolní propusti uvádí další obr. V něm je rozlišeno *propustné pásmo* filtru, *přechodné pásmo* filtru a *nepropustné pásmo* filtru.



Amplitudová charakteristika je sudá funkce, fázová charakteristika je lichá funkce.

Charakteristiky jsou periodické s periodou 2π , proto stačí zadat průběh v intervalu $\langle 0, \pi \rangle$. V případě dodržení vzorkovací věty – antialiasingový filtr- je signál v pásmu normovaných frekvencí θ od 0 do π a periodičnost charakteristiky nevádí.

3.1 Návrh filtrů FIR.

Uvedeme pouze základní metodu pomocí Fourierovy transformace diskretních signálů a oken. V praxi se nejvíce využívá metoda Parkse-McClenana převedená do počítačových programů.

Při návrhu vycházíme z požadované frekvenční charakteristiky.

Je dána požadovaná frekvenční charakteristika $H_d(e^{j\theta})$

$$H_d(e^{j\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_d(n)e^{-jn\theta}.$$

Odtud dostaneme požadovanou impulsní odezvu pomocí IFTD:

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\theta}) e^{jn\theta} d\theta.$$

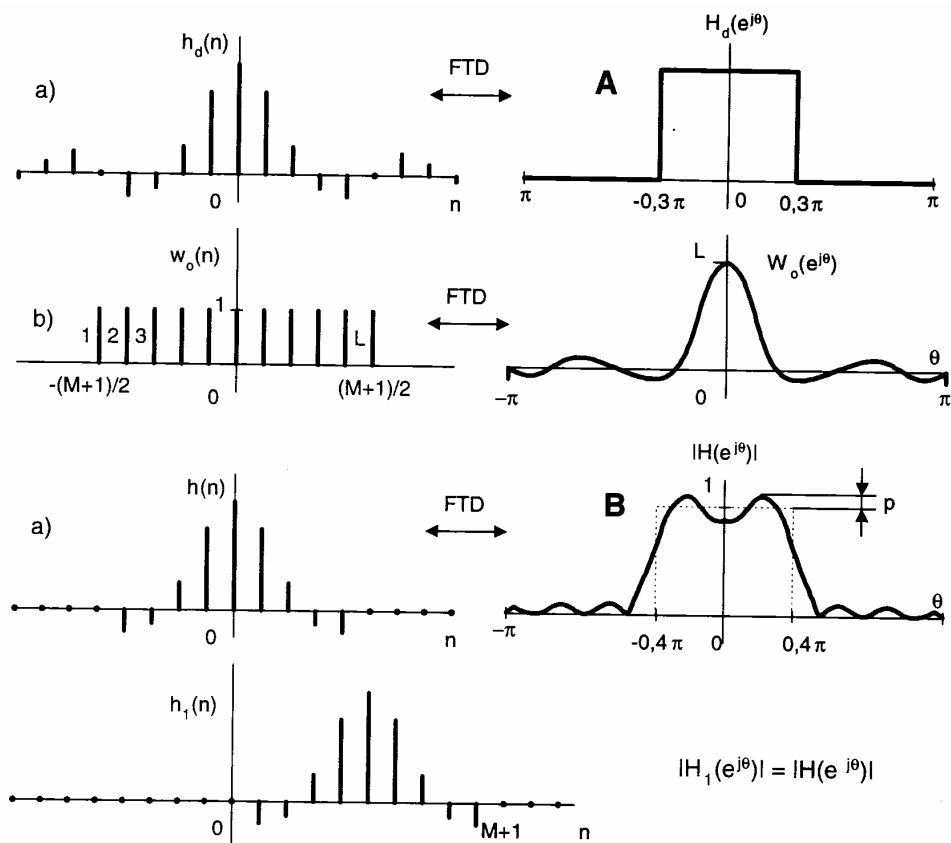
Posloupnost $h_d(n)$ vynásobíme obdélníkovým oknem

$$w_0(n) = \begin{cases} 1 & \text{pro } -M/2 \leq n \leq M/2, \\ 0 & \text{jinde.} \end{cases}$$

Impulsní odezva navrženého FIR filtru je

$$h(n) = h_d(n) \cdot w_0(n).$$

$$H(e^{j\theta}) = H_d(e^{j\theta}) * W_0(e^{j\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\nu}) \cdot W_0(e^{j(\theta-\nu)}) d\nu.$$



Návrh dolní propusti FIR metodou oken. Východí charakteristika je A, výsledná B.

Potlačení zákmitů na frekvenční charakteristice dosáhneme použitím jiných oken než obdélníkových.

$$w_0(n) = \begin{cases} 1 & \text{pro } 0 \leq n \leq M, \\ 0 & \text{jinde.} \end{cases}$$

- Okno trojúhelníkové (Bartlett):⁸

$$w_T(n) = \begin{cases} \frac{n}{M/2}, & 0 \leq n \leq M/2, \\ 2 - \frac{2n}{M}, & M/2 \leq n \leq M, \\ 0 & \text{jinde.} \end{cases}$$

- Okno Hann (hanning, Hanning, von Hann):

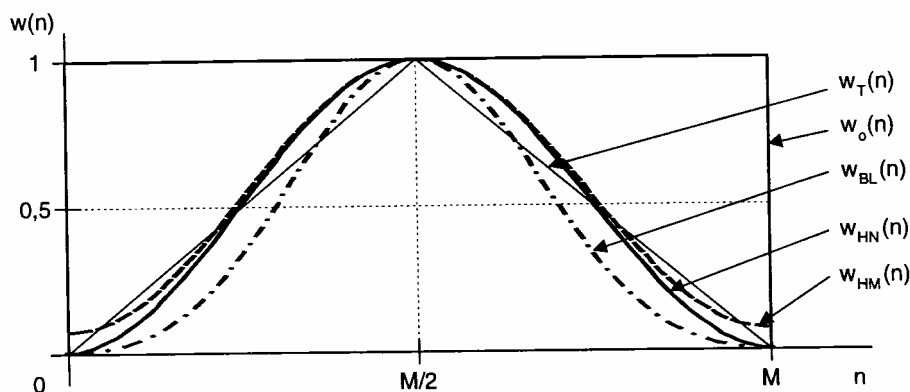
$$w_{HN}(n) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1 - \cos \frac{2\pi n}{M}), & 0 \leq n \leq M, \\ 0 & \text{jinde.} \end{cases}$$

- Okno Hamming:

$$w_{HM}(n) = \begin{cases} 0,54 - 0,46 \cdot \cos \frac{2\pi n}{M}, & 0 \leq n \leq M, \\ 0 & \text{jinde.} \end{cases}$$

- Okno Blackman:

$$w_{BL}(n) = \begin{cases} 0,42 - 0,50 \cdot \cos \frac{2\pi n}{M} + 0,08 \cdot \cos \frac{4\pi n}{M}, & 0 \leq n \leq M, \\ 0 & \text{jinde.} \end{cases}$$

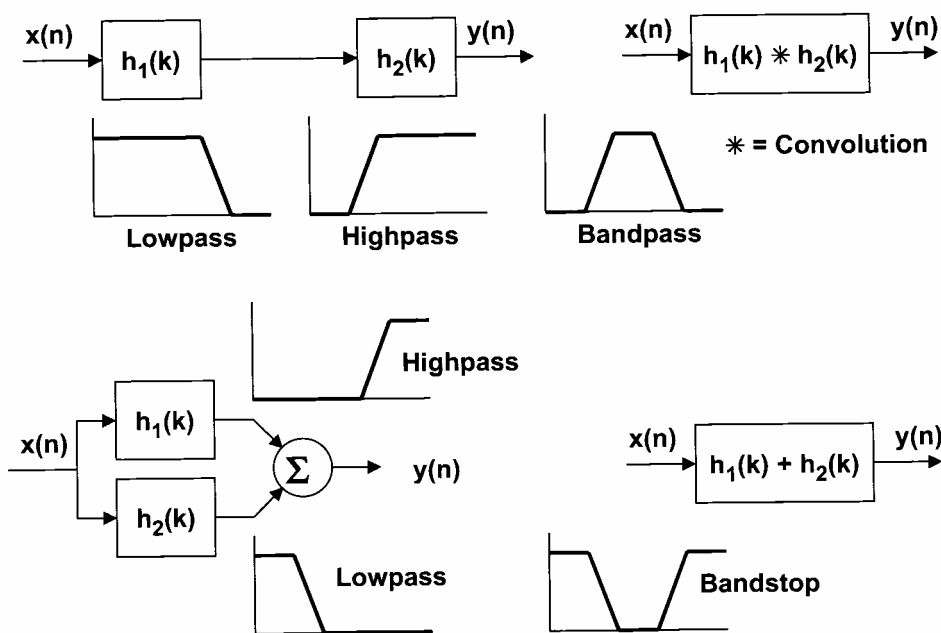


Pro návrh filtru s libovolnou frekvenční odezvou použijeme metodu Parks- McClellan. Tou je možno navrhout přímo filtry typu dolní propust, horní propust, pásmovou propust, pásmovou zadrž aj.

Filtry typu pásmová propust a pásmová zadrž můžeme také navrhout kombinací jednotlivých dolních a horních propustí.

Pásmová propust je navržena jako kaskáda dolní a horní propusti a ekvivalentní impulsní odezva je dána konvolucí těchto jednotlivých odezev.

Pásmová zadrž je dána paralelním spojením jednotlivých dolních a horních propustí. Ekvivalentní odezva je dána součtem jednotlivých odezev.



Vytvoření pásmové propusti a pásmové zádrže pomocí filtrů dolní a horní propust

3.2 Návrh filtrů IIR

Základní výhodou IIR filtrů proti FIR filtrům je to, že zadané specifikace obvykle splní při daleko nižším řádu filtru. To je způsobeno aproximováním požadované charakteristiky racionální lomenou funkcí. Proto méně zpožďují signál při filtraci. Jejich fázová charakteristika je nelineární. Při zpracování signálu „off-line“ (když jsou všechna data pro filtraci k dispozici před zpracováním) je možno eliminovat nelineární fázové zkreslení vhodným zpracováním.

Klasickou metodou návrhu je *návrh pomocí analogového vzorového filtru* (prototypu).

Vychází se z tabulek koeficientů analogového filtru a pomocí konformního zobrazení roviny p (ve které se pomocí Laplaceovy transformace vyjadřuje přenos analogového filtru) do roviny z se najdou koeficienty odpovídajícího číslicového filtru. Použitá transformační rovnice musí zobrazovat rovinu p do roviny z tak, aby levá polorovina p odpovídala vnitřku jednotkové kružnice v rovině z , případně jeho části. Pak se při transformaci zachová stabilita filtru. Základní metody pro uvedenou transformaci jsou *metoda invariantnosti impulsní odezvy*, *metoda náhrady derivací diferencemi* a *metoda bilineární transformace*. Poslední metoda je nejrozšířenější, protože kromě zachování stability vylučuje aliasing. Transformace frekvencí z analogové do číslicové oblasti je ale nelineární. To znamená, že během návrhu musíme přepočítat mezní frekvence filtru.

IIR filtry se používají zejména jako základní frekvenčně selektivní filtry. Návrh většinou vychází z dolní propusti. Její koeficienty se pomocí frekvenčních transformací převedou na koeficienty požadovaného filtru (dolní propusti s jinou mezní frekvencí nebo jiného typu filtru). Tuto transformaci lze provést u analogového filtru a pak teprve přejít k číslicovému filtru, nebo nejprve najít k analogové dolní propusti vzorovou číslicovou dolní propust a transformaci provést až pro filtr číslicový.

IIR filtry je ale možné taky navrhovat *přímou metodou návrhu*, kdy číslicový filtr aproximuje požadovanou amplitudovou frekvenční charakteristiku přímkovými úseky. Tak se navrhují filtry s více propustnými nebo závěrnými pásmy.

Základní analogové propusti

Butterworthova dolní propust. Plochá, pokles $N \cdot 20$ (dB/dek).

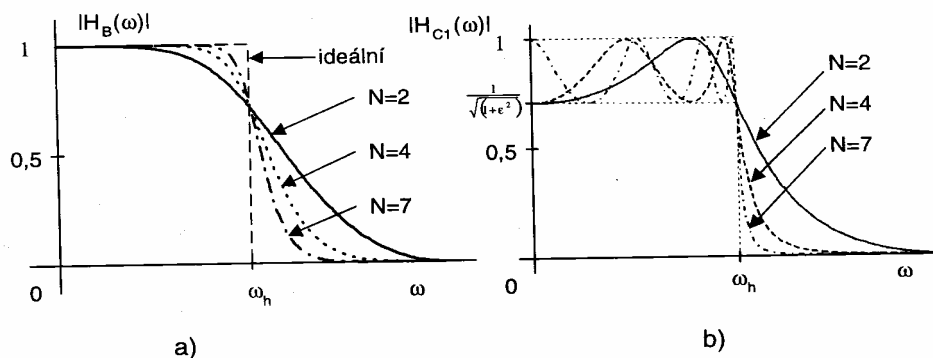
$$|H(0)| = 1; \quad |H(\omega_h)| = 1/\sqrt{2}; \quad |H(\infty)| = 0.$$

$$|H_A(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + (\omega/\omega_h)^{2N}}.$$

Čebyšev – zvlnění v propustném pásmu, rychlejší pokles

$$|H_A(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 \cdot T_N^2(\omega/\omega_h)},$$

ε určuje zvlnění



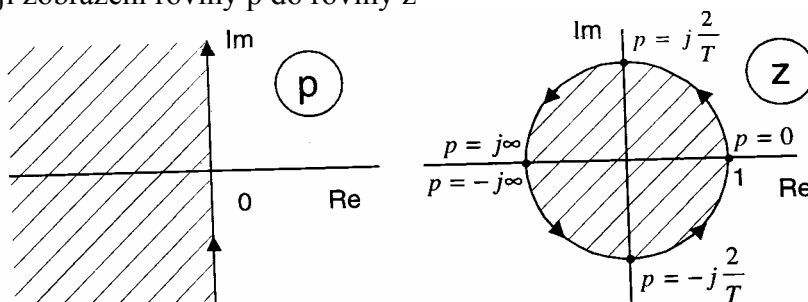
Frekvenční charakteristiky dolních propustí Butterworth, Čebyšev.

Základ bilineární transformace

$$p = \frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$

$$z = \frac{2 + pT}{2 - pT}$$

definují zobrazení roviny p do roviny z



Dosazením za analogové a číslicové frekvence do definičních vztahů dostaneme základní vztahy mezi analogovými a číslicovými frekvencemi.

$$\omega_A = \frac{2}{T} \tan \frac{\theta}{2},$$

$$\theta = 2 \arctan \frac{\omega_A T}{2},$$

$$\omega_D = \frac{2}{T} \arctan \frac{\omega_A T}{2},$$

4. Systémy s proměnnou periodou vzorkování (multirate filters)

Změna vzorkovací frekvence

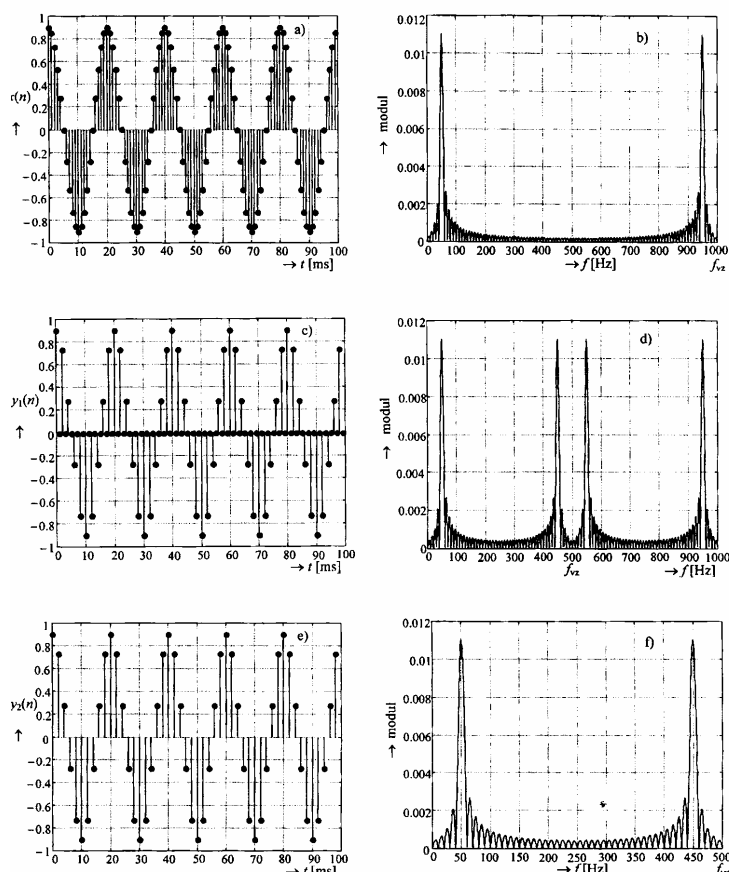
- decimace- redukce vzorkovací frekvence faktorem M
- interpolace – zvýšení vzorkovací frekvence faktorem L

Příklady použití:

- decimační filtrace u FFT analyzátorů
- decimační filtrace u Sigma-Delta převodníků
- změna vzorkovací frekvence u digitálních systémů např. 44.1 kHz u CD na 48 kHz u digital audio. Zde musíme najít největší společný dělitel, aby faktory decimace a interpolace byla celá čísla

Koncepce decimace:

- signal je vzorkován vyšší frekvencí než je třeba pro dodržení vzorkovacího teorému
- vzorkovací frekvence je redukována faktorem M, M musí být jen také velké, aby nedošlo k aliasingu



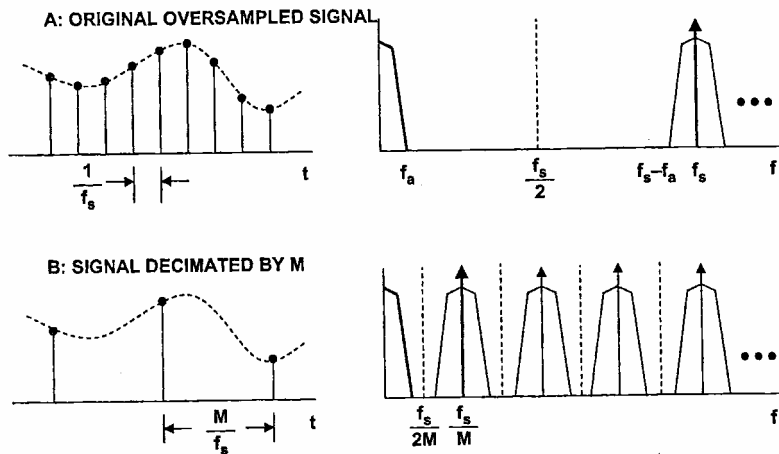
Ukázka procesu decimace s činitelem $M=2$

$f_{vz} = 1\text{kHz}$, $f = 50\text{ Hz}$, $N = 100$ vzorků, $T = 100\text{ ms}$ (5 průběhů)

- a), b) vzorkovaný signál a jeho spektrum
- c), d) každá **druhá hodnota vzorků položena rovna 0**, vzorkovací kmitočet klesl na polovinu, spektrum obsahuje dvě periody (výsledkem doplnění p nul mezi vzorky je vznik p -krát opakované posloupnosti obrazů)
- e), f) **odstranění nulových vzorků, snížení vzorkovací frekvence** na $f_{vz} = 500\text{Hz}$

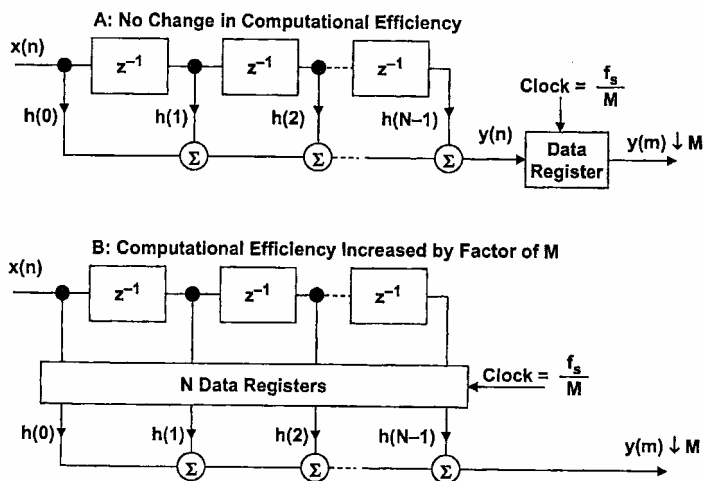
4.1 Decimace faktorem M

DECIMATION OF A SAMPLED SIGNAL BY A FACTOR OF M



Decimace spojená s číslicovou filtrací. Horní obrázek A – konvoluce vzorků vstupu s impulsní odezvou se provádí při každém novém vzorku a výstup $y(n)$ je počítán pro každý vzorek. Filtrovaná data jsou uschována v data registru, který je vzorkován sníženou frekvencí f_s/M .

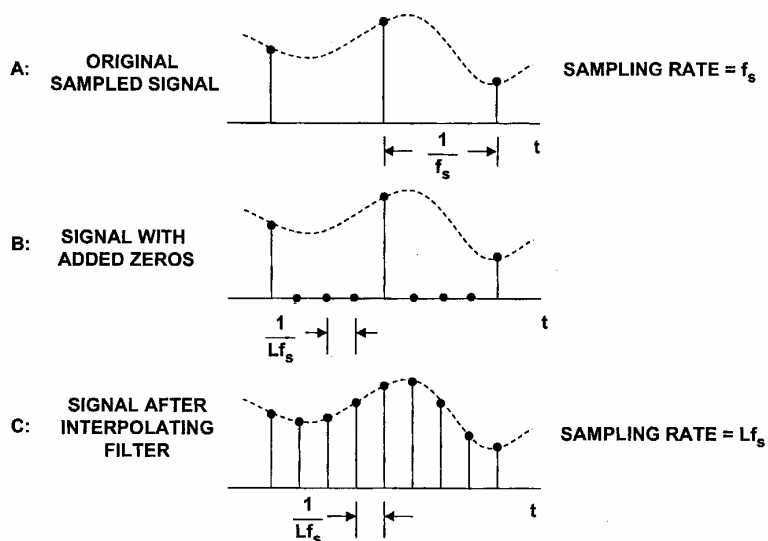
DECIMATION COMBINED WITH FIR FILTERING



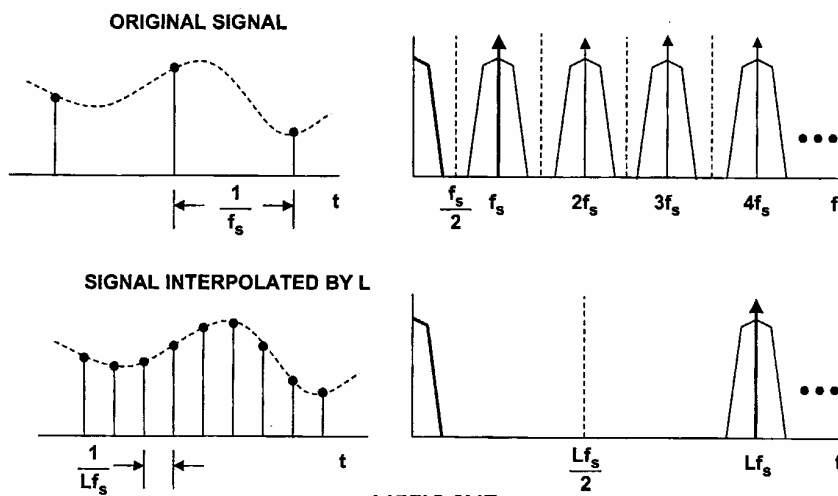
Spodní obrázek B. Zvýšení výpočetní účinnosti faktorem M. Historie vzorků je uschována v N datových registrech a výpočet konvoluce je prováděn pouze každý M tý vzorek s frekvencí f_s/M .

4.2 Interpolace faktorem L. Obrácený postup k decimaci. Původní signál jde do „zvyšovače frekvence“ (rate expander), který vloží mezi vzorky signálu **přídavné nuly**. Interpolační filtr interpoluje mezi vzorky a vyhladí data. Tím je docíleno převzorkování signálu faktorem L.

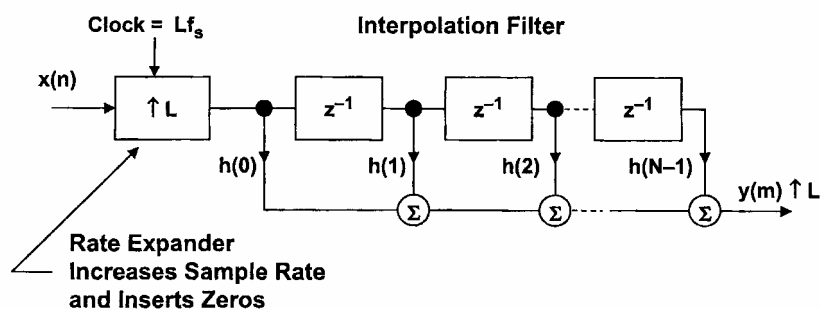
INTERPOLATION BY A FACTOR OF L



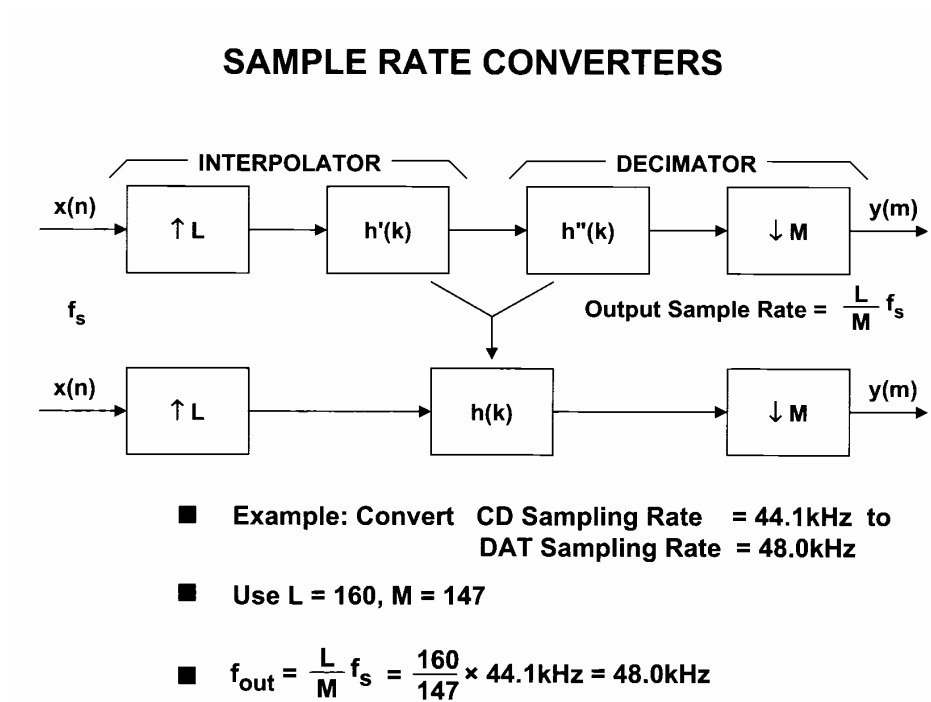
EFFECTS OF INTERPOLATION ON FREQUENCY SPECTRUM



TYPICAL INTERPOLATION IMPLEMENTATION



4.3 Systémy se změnou vzorkovacího kmitočtu



L a M musí být celá čísla. Proto musíme najít největší společný dělitel. V tomto případě je to 300. $L = 48000/300 = 160$, $M = 44100/300 = 147$.

Funkce v LabWindows/CVI pro návrh FIR filtrů.

FIR Digital Filters

Lowpass Window Filters	Wind_LPF
Highpass Window Filters	Wind_HPF
Bandpass Window Filters	Wind_BPF
Bandstop Window Filters	Wind_BSF
Lowpass Kaiser Window	Ksr_LPF
Highpass Kaiser Window	Ksr_HPF
Bandpass Kaiser Window	Ksr_BPF
Bandstop Kaiser Window	Ksr_BSF
General Equi-Ripple FIR	Equi_Ripple
Lowpass Equi-Ripple FIR	EquiRpl_LPF
Highpass Equi-Ripple FIR	EquiRpl_HPF
Bandpass Equi-Ripple FIR	EquiRpl_BPF
Bandstop Equi-Ripple FIR	EquiRpl_BSF
FIR Coefficients	FIR_Coef

*metoda Parks-McClellan
(polynomičká aproximace)*

Windows

Triangular Window	TriWin
Hanning Window	HanWin
Hamming Window	HamWin
Blackman Window	BkmanWin
Kaiser Window	KsrWin
Blackman-Harris Window	BlkHarrisWin

*- náprava x_i dle w_i na místě
 $x_i = x_i * w_i$*

Tapered Cosine Window	CostTaperedWin
Exact Blackman Window	ExBkmanWin
Exponential Window	ExpWin
Flat Top Window	FlatTopWin
Force Window	ForceWin
General Cosine Window	GenCosWin

Př. Návrh 55 – bodového FIR filtru s lineární fází, 44 dB útlum a filtrace s signálem x

```
double x[256], coef[55], y[310], fs, fl, fh;
int n, m, windType;
fs=1000.0, fl=200.0, fh=300.0;
n=55;
windType=3; /* Hanning
m=256; /* pocet vstup. vzorku
Wind_BPF (fs, fl, fh, n, coef, windType); /* vypocet koeficientu
convolve (coef, n, x, m, y); /* konvoluce koef. filtru se signalem
```

Funkce v LabWindows/CVI pro návrh IIR filtrů.**IIR Digital Filters****Cascade Filter Functions**

Bessel Cascade Coeff	Bessel_CascadeCoef
Butterworth Cascade Coeff	Bw_CascadeCoef
Chebyshev Cascade Coeff	Ch_CascadeCoef
Inv Chebyshev Cascade Coeff	InvCh_CascadeCoef
Elliptic Cascade Coeffs	Elp_CascadeCoef
IIR Cascade Filtering	IIRCascadeFiltering

Filter Information Utilities

Allocate Filter Information	AllocIIRFilterPtr
Reset Filter Information	ResetIIRFilter
Free Filter Information	FreeIIRFilterPtr
Cascade to Direct Coefficients	CascadeToDirectCoef

One-Step Filter Functions

Lowpass Butterworth	Bw_LPF
Highpass Butterworth	Bw_HPF
Bandpass Butterworth	Bw_BPF

Bandstop Butterworth	Bw_BSF
Lowpass Chebyshev	Ch_LPF
Highpass Chebyshev	Ch_HPF
Bandpass Chebyshev	Ch_BPF
Bandstop Chebyshev	Ch_BSF
Lowpass Inverse Chebyshev	InvCh_LPF
Highpass Inverse Chebyshev	InvCh_HPF
Bandpass Inverse Chebyshev	InvCh_BPF
Bandstop Inverse Chebyshev	InvCh_BSF
Lowpass Elliptic	Elp_LPF
Highpass Elliptic	Elp_HPF
Bandpass Elliptic	Elp_BPF
Bandstop Elliptic	Elp_BSF

Old-Style Filter Functions

Bessell Coefficients	Bessell_Coef
Butterworth Coefficients	Bw_Coef
Chebyshev Coefficients	Ch_Coef
Inverse Chebyshev Coefficients	InvCh_Coef
Elliptic Coefficients	Elp_Coef
IIR Filtering	IIRFiltering

Př. Generace náhodného procesu a filtrace dolnofrekvenční propustí 5. řádu

```
double x[256], y[256], fs, fc ;
int n, order ;
n=256, fs=1000.0, fc=200.0 ;
order = 5;
uniform (n, 17, x); /* vytvoreni nahod. signalu , hodnoty mezi 0 a 1 */
Bw_LPF = (x, n, fs, fc, order, y); /* filtrace na miste */
```