IEL — Střídavý proud

Petr Peringer
peringer AT fit.vutbr.cz

Vysoké učení technické v Brně,
Fakulta informačních technologií,
Božetěchova 2,
61266 Brno

(Verze: 5. listopadu 2024)

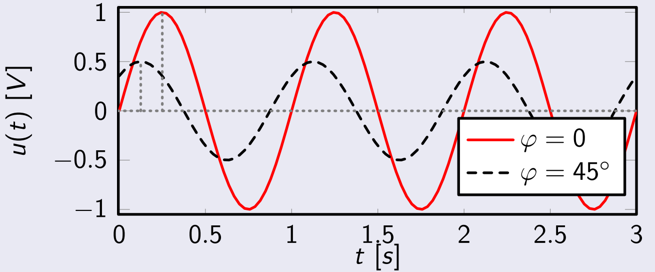
Analýza lineárních obvodů se střídavým proudem (AC)

Střídavé napětí (ustálený stav):

$$u(t) = A\,sin(\omega t + \varphi)$$

A je amplituda $[V]$, ω je úhlová frekvence $[rad/s]$ $(\omega = 2\pi f)$
φ je fázový posuv v $[rad]$ nebo stupních $[°]$ $(2\pi\ rad = 360°)$

Příklad pro $f = 1Hz$, různá amplituda a fáze



Základní pojmy

- Ustálený stav (anglicky: *steady state*)
- Periodický signál s periodou T $[s]$:

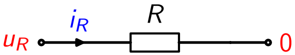
$$u(t+T) = u(t)$$

- Amplituda A $[V]$ je maximální napětí (*peak voltage*)
- Frekvence $f = \frac{1}{T}$ $[Hz, s^{-1}]$
- Úhlová frekvence $\omega = 2\pi f$ $[rad/s]$
- Fázový posuv φ $[rad]$ nebo $[°]$ $(2\pi\ rad = 360°)$
- Efektivní hodnota napětí (RMS) $U_{ef} = \frac{A}{\sqrt{2}}$

  Příklad: $U_{ef} = 230V \Rightarrow A = U_{ef}\sqrt{2} = 325V$

Poznámky: oscilátory, signály, modulace (CW, AM, FM, QAM, ...)

Rezistor — rovnice a příklad řešení



Rovnice (Ohmův zákon):

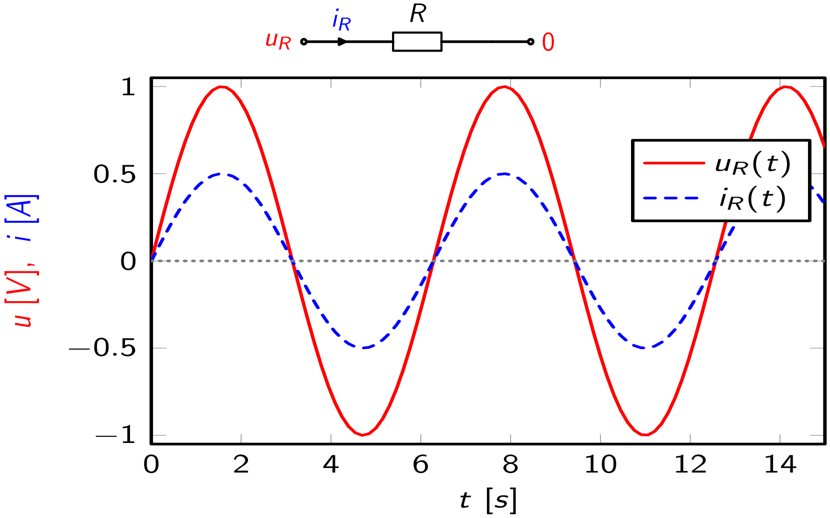
$$u_R(t) = R\, i_R(t)$$

Řešení po připojení zdroje napětí $\quad u_R(t) = U_R\, sin(\omega t) \quad$:

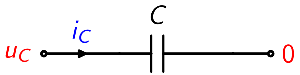
$$i_R(t) = \frac{1}{R} u_R(t) = \frac{U_R}{R} sin(\omega t) = I_R\, sin(\omega t)$$

Pro amplitudu platí: $I_R = \frac{U_R}{R}$.
Napětí a proud na odporu *jsou ve fázi*.

Rezistor — napětí a proud pro $U_R = 1V$, $R = 2\Omega$, $\omega = 1$



Kondenzátor — rovnice a příklad řešení



Rovnice:

$$i_C(t) = C\frac{du_C(t)}{dt}, \qquad u_C(0) = 0$$

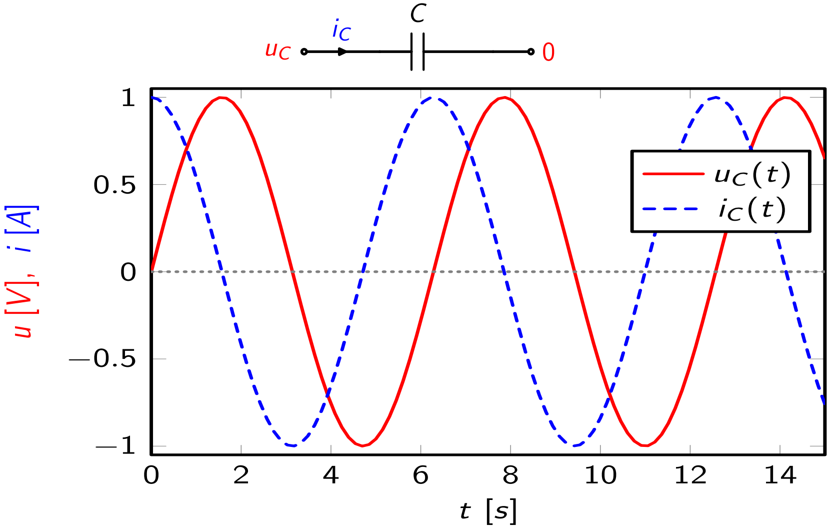
Řešení po připojení na zdroj napětí $u_C(t) = U_C\,sin(\omega t)$:

$$i_C(t) = C\,U_C\,\omega\,cos(\omega t) = C\,U_C\,\omega\,sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) = I_C\,sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

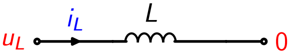
Pro amplitudu platí: $I_C = U_C\,\omega\,C$. Napětí a proud *nejsou* ve fázi, proud "předbíhá" napětí. Fázový posun je $\varphi = \frac{\pi}{2} = 90°$.

Matematika: $\frac{d\,\sin(kx)}{dx} = k\cos(kx)$

Kondenzátor — napětí a proud pro $U_C = 1V$, $\omega = 1$ a $C = 1F$



Cívka — rovnice a příklad řešení



Rovnice:

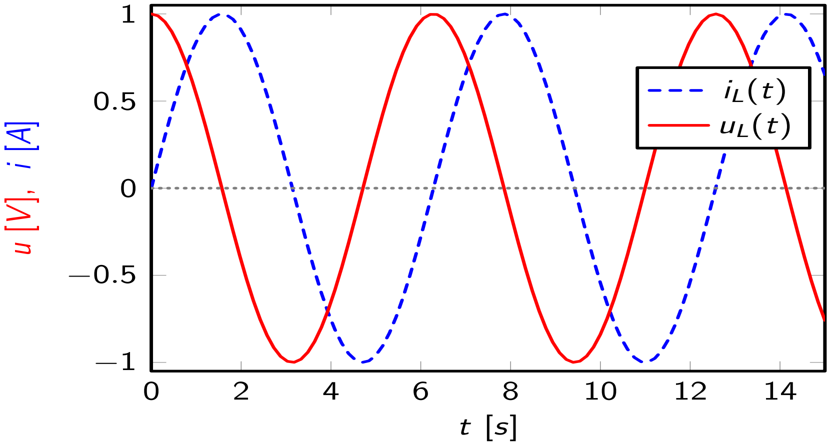
$$u_L(t) = L\frac{di_L(t)}{dt}, \qquad i_L(0) = 0$$

Řešení po připojení na zdroj proudu $i_L(t) = I_L\, sin(\omega t)$:

$$u_L(t) = L\, I_L\, \omega\, cos(\omega t) = L\, I_L\, \omega\, sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) = U_L\, sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

Pro amplitudu platí: $U_L = I_L\, \omega\, L$. Napětí a proud *nejsou* ve fázi, napětí "předbíhá" proud. Fázový posun je $\varphi = \frac{\pi}{2} = 90°$.

Cívka — napětí a proud pro $I_L = 1A$, $\omega = 1$ a $L = 1H$



Poznámky

Shrnutí

Rezistor: proud i napětí ve fázi

Kondenzátor: proud předbíhá napětí o 90°

Cívka: napětí předbíhá proud o 90°

- Příklady: viz simulace
- Test znalostí: nakreslete předchozí obrázky pro $\omega = 2$
- Test znalostí: nakreslete obrázky pro amplitudu 2

Poznámka: Cívkou i kondenzátorem teče proud i při nulovém napětí.

Reaktance

Reaktanci vypočteme jako poměr *amplitud* napětí a proudu:

Odpor:

$$R = \frac{U_R}{I_R}$$

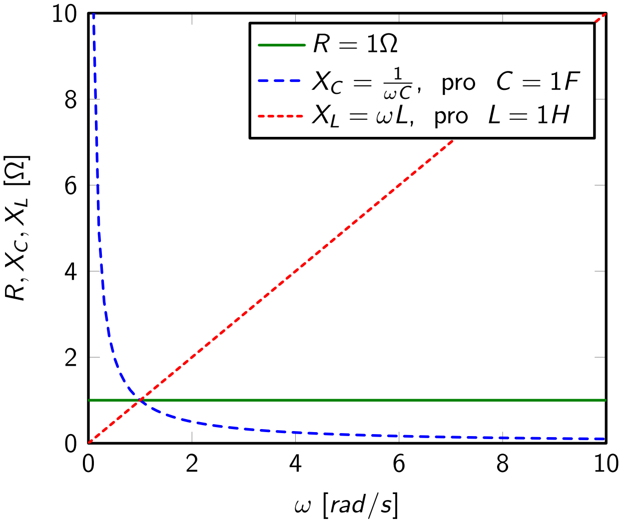
Kapacitní reaktance:

$$X_C = \frac{U_C}{I_C} = \frac{1}{\omega C}$$

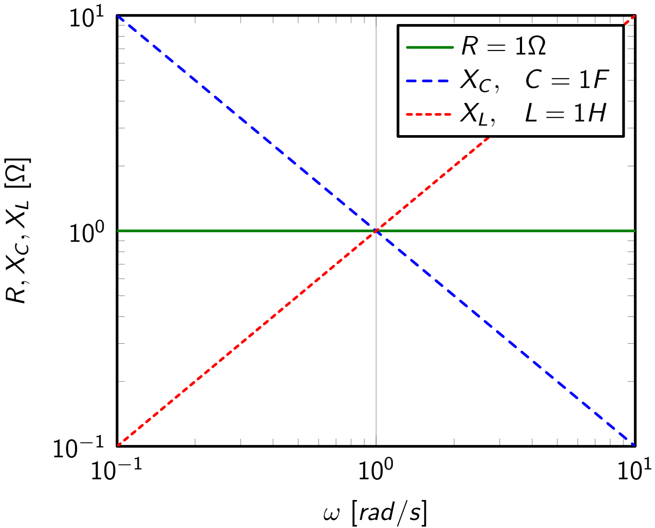
Induktivní reaktance:

$$X_L = \frac{U_L}{I_L} = \omega L$$

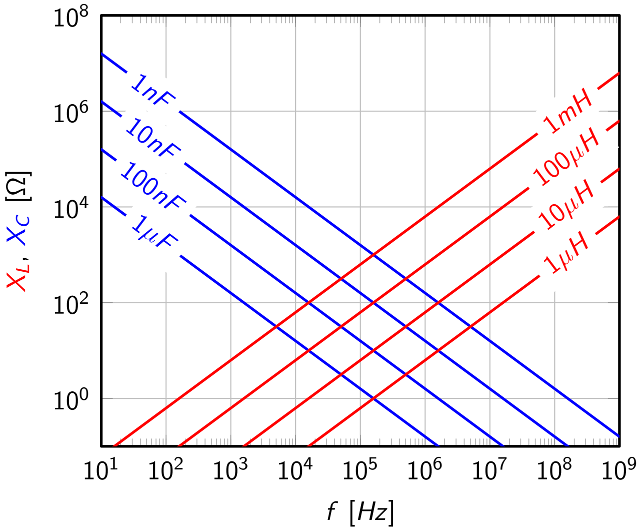
Závislost reaktance na frekvenci



Reaktance — logaritmické souřadnice



Reaktance ideálních kondenzátorů a cívek — příklady



Jednotka *decibel*

Poměrová jednotka *decibel* — definice:

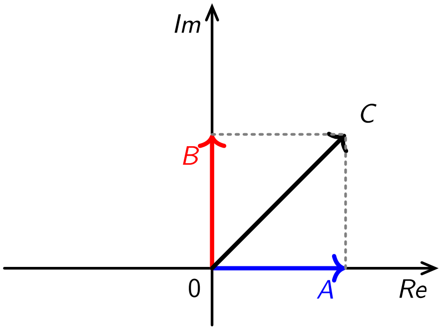
- Poměr výkonu: $G_p = 10 log(\frac{P_2}{P_1})$ $[dB]$
  ($[dBm]$ pro referenční výkon $P_1 = 1mW$)
- Poměr napětí: $G_u = 20 log(\frac{U_2}{U_1})$ $[dB]$
  (např. pro referenční napětí $U_1 = 0.775V$; odpovídá $1mW$ na 600Ω)

- Příklad1: Napěťové zesílení zesilovače (zisk)
  $G = \frac{U_2}{U_1} = 10000 \quad \Rightarrow \quad G_u = 80dB$
- Příklad2: Útlum kabelu $G = \frac{U_2}{U_1} = 0.01 \quad \Rightarrow \quad G_u = -40dB$
- Příklad3: Odstup signál/šum (SNR=*Signal to Noise Ratio*)
  $G = \frac{U_{sig}}{U_{noise}} = 1000 \quad \Rightarrow \quad SNR = 60dB$
- Příklad4: $G = 2 \quad \Rightarrow \quad G_u \approx 6dB$

Signál ze sondy Voyager 1, rok 2017: -160 dBm

Fázory

Fázor: vyjádření amplitudy i fáze vektorem / komplexním číslem:



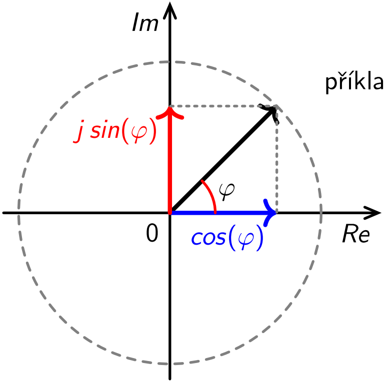
$$|A|^2 + |B|^2 = |C|^2$$

Poznámky: polární souřadnice, komplexní čísla, operace $+ - * /$

Fázor napětí

Komplexní vyjádření amplitudy A i fáze φ střídavého napětí
(Pozor: j je jiné označení pro imaginární jednotku i)

$$u(t) = Ae^{j(\omega t+\varphi)} = A(\cos(\omega t+\varphi) + j\sin(\omega t+\varphi))$$



příklad pro $A = 1$

Impedance

Impedance je *komplexní číslo* vyjadřující amplitudu i fázový posuv

Impedance ideálního rezistoru

$$\mathbf{Z_R} = R$$

Impedance ideálního kondenzátoru

$$\mathbf{Z_C} = \frac{1}{j\omega C} = -\frac{j}{\omega C}$$

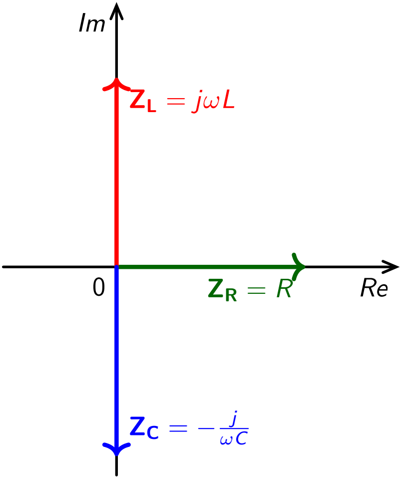
Impedance ideální cívky

$$\mathbf{Z_L} = j\omega L$$

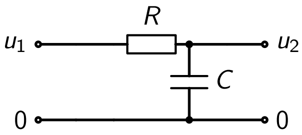
Poznámky:

- Ohmův zákon platí i pro impedanci: $\mathbf{U} = \mathbf{Z}\,\mathbf{I}$
- Reaktance kondenzátoru(cívky) je absloutní hodnota $\mathbf{Z_C}(\mathbf{Z_L})$.

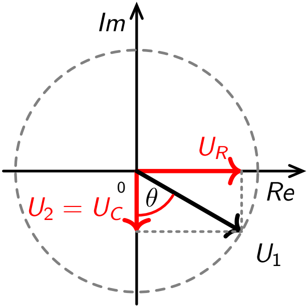
Impedance R, L, C — fázory



Integrační RC článek



Impedance RC článku: $\mathbf{Z_{RC}} = R + \frac{1}{j\omega C} = R - \frac{j}{\omega C}$



Úkol: nakreslete fázor proudu

Integrační RC článek — odvození přenosu

1. Uvažujeme pouze amplitudy napětí U a proudu I
2. Známe: $U_R = RI, \quad U_C = X_C I = \frac{I}{\omega C}$
3. Z trojúhelníku napětí (viz obrázek) a Pythagorovy věty

$$U_1^2 = (RI)^2 + (\frac{I}{\omega C})^2$$

vypočteme velikost proudu

$$I = \frac{U_1}{\sqrt{R^2 + (\frac{1}{\omega C})^2}}$$

a výstupní napětí

$$U_2 = U_C = \frac{I}{\omega C} = \frac{U_1}{\sqrt{(\omega RC)^2 + 1}}$$

4. Přenos signálu: $G = \frac{U_2}{U_1} = \frac{1}{\sqrt{(\omega RC)^2+1}}$

Integrační RC článek — pokračování

Přenos signálu:

$$G = \frac{U_2}{U_1} = \frac{1}{\sqrt{(\omega RC)^2 + 1}}$$

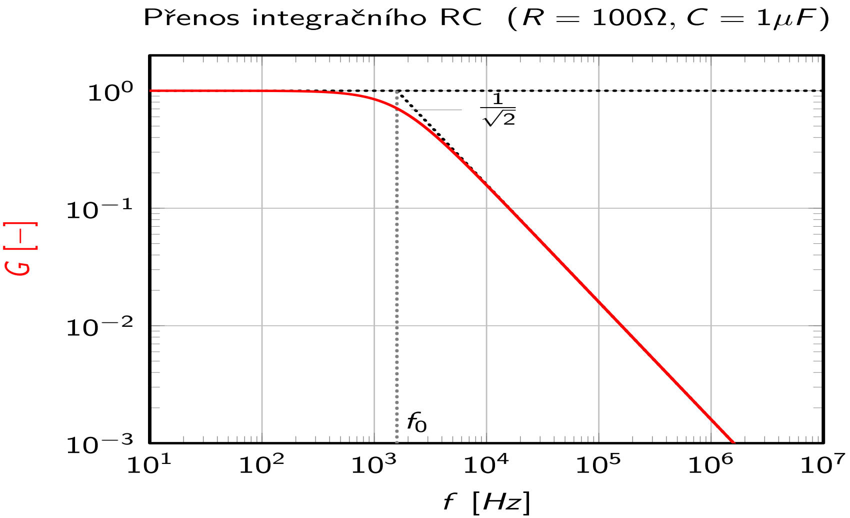
Fáze:

$$\theta = -tan^{-1}\left(\frac{U_R}{U_C}\right) = -tan^{-1}\left(\frac{RI}{X_C I}\right) = -tan^{-1}(\omega RC)$$

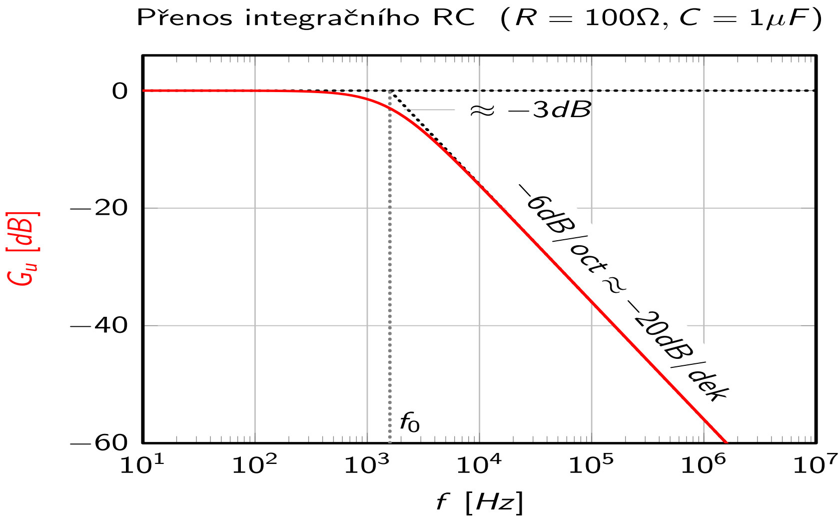
Mezní frekvence (pro $U_R = U_C$ platí $G_u = -3dB$, $\theta = -45^\circ$):

$$\omega_0 = \frac{1}{RC} \qquad f_0 = \frac{1}{2\pi RC}$$

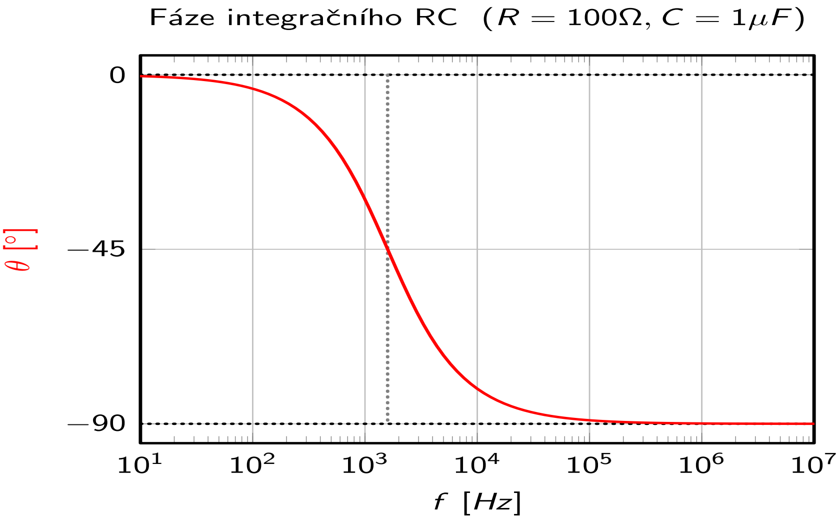
Integrační RC článek — frekvenční charakteristika



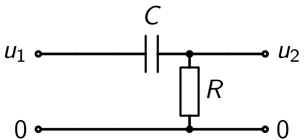
Bode plot — frekvenční charakteristika



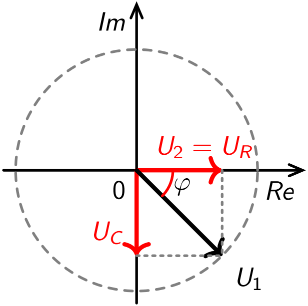
Integrační RC článek — fázový posuv $u_1 \rightarrow u_2$



Derivační RC článek



Impedance RC článku: $\mathbf{Z_{RC}} = R + \frac{1}{j\omega C} = R - \frac{j}{\omega C}$



Derivační RC článek

Přenos:

$$G = \frac{U_2}{U_1} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{(\omega RC)^2}}}$$

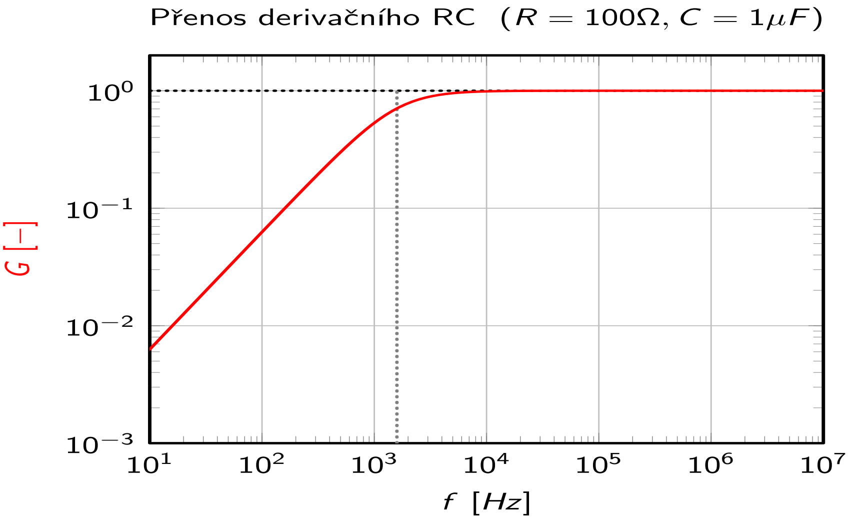
Fáze:

$$\varphi = tan^{-1}\left(\frac{U_C}{U_R}\right) = tan^{-1}\left(\frac{1}{\omega RC}\right)$$

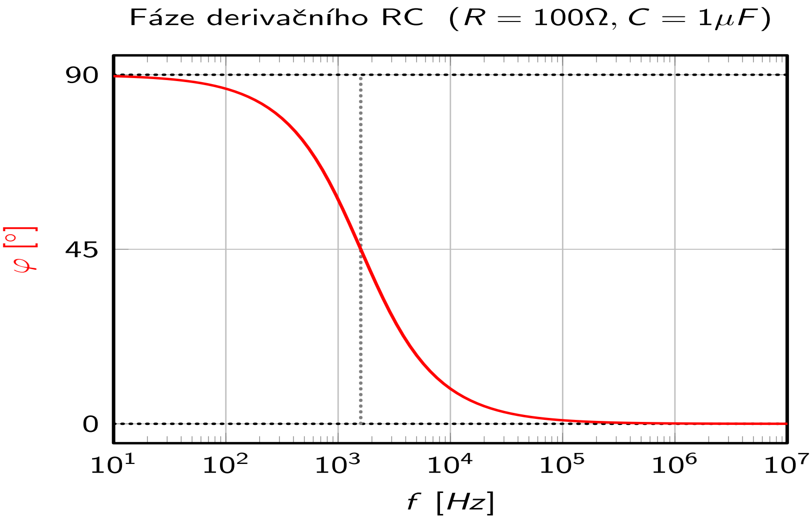
Mezní frekvence (platí $U_R = U_C$):

$$\omega_0 = \frac{1}{RC} \qquad f_0 = \frac{1}{2\pi RC}$$

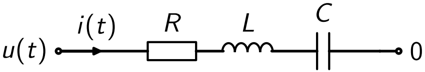
Derivační RC článek — frekvenční charakteristika



Derivační RC článek — fázový posuv $u_1 \rightarrow u_2$



Sériový RLC obvod



Rovnice:

$$u(t) = u_R(t) + u_L(t) + u_C(t)$$

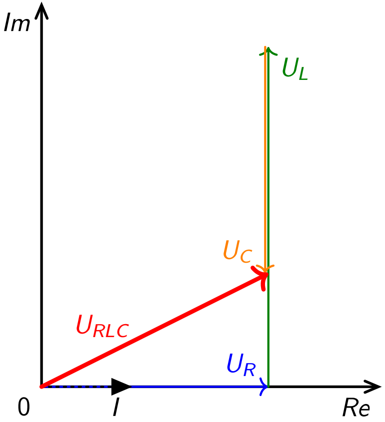
$$i(t) = i_R(t) = i_L(t) = i_C(t)$$

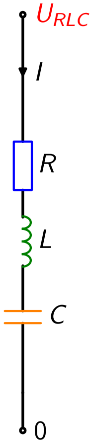
Impedance:

$$\mathbf{Z} = \mathbf{Z_R} + \mathbf{Z_L} + \mathbf{Z_C}$$

$$\mathbf{Z} = R + j\omega L - \frac{j}{\omega C}$$

Sériový RLC obvod — fázory





Rezonance sériového RLC

Impedance RLC: $\mathbf{Z} = R + j\omega L - \frac{j}{\omega C}$

Podmínka rezonance — imaginární část Z je nulová, proto musí platit:

$$\omega_r L = \frac{1}{\omega_r C}$$

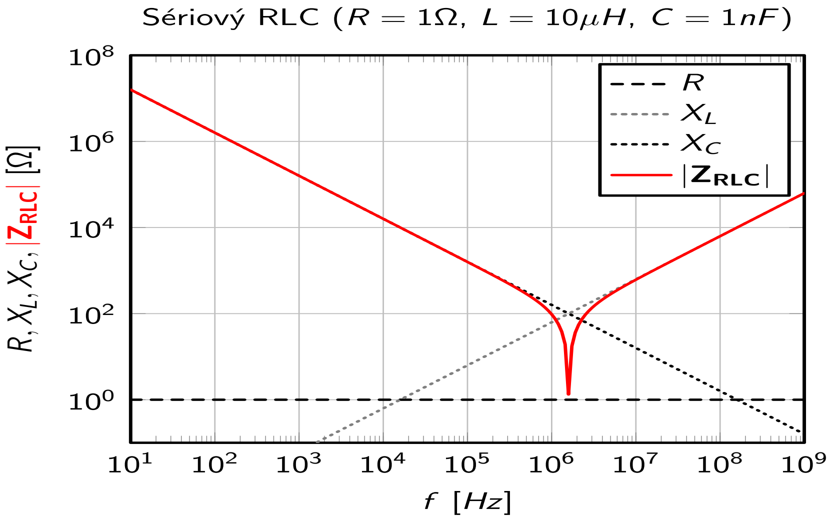
Z toho vypočteme rezonanční frekvenci:

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

a po úpravě:

$$f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

Frekvenční závislost impedance sériového RLC



Poznámky

- Existuje také *paralelní LC obvod*
- Příklady RC, RL, RLC: viz simulace
- Použití RC, RL, RLC článků:
    - Zesilovače: blokovací a vazební kondenzátory
    - Filtry: (různé topologie: Π, T, ...)
        - dolní propust (*low-pass*),
        - horní propust (*high-pass*),
        - pásmová propust (*band-pass*)
        - pásmová zádrž (*band-stop*)
- Parazitní indukčnosti, kapacity, odpory u *reálných* součástek

Výkon v obvodu se střídavým proudem

- Okamžitý výkon:

$$p(t) = u(t)i(t) = U_{ef}\, I_{ef}\, (cos(\varphi) - cos(2\omega t + \varphi)) \quad [W]$$

  může být záporný, frekvence 2ω
  φ = fázový posun proud–napětí
  $U_{ef} = \frac{U}{\sqrt{2}} = 0.707U$ je *efektivní napětí*
- Zdánlivý výkon: $S = U_{ef}\, I_{ef} \quad [VA]$
- Jalový výkon: $Q = U_{ef}\, I_{ef}\, sin(\varphi) \quad [var]$
- Činný výkon: $P = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)dt = U_{ef}\, I_{ef}\, cos(\varphi) \quad [W]$
  Účinník (*Power Factor*): $cos(\varphi)$
- Platí Pythagorova věta: $S^2 = P^2 + Q^2$

Poznámka: Kompenzace účinníku (*Power Factor Correction*, PFC)

Fourierova řada

Fourierova řada rozkládá periodickou funkci na součet harmonických složek:

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n cos(n\,t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n sin(n\,t)$$

Výpočet koeficientů a_n, b_n viz literatura

Např. pro obdélníkový signál s periodou T platí:

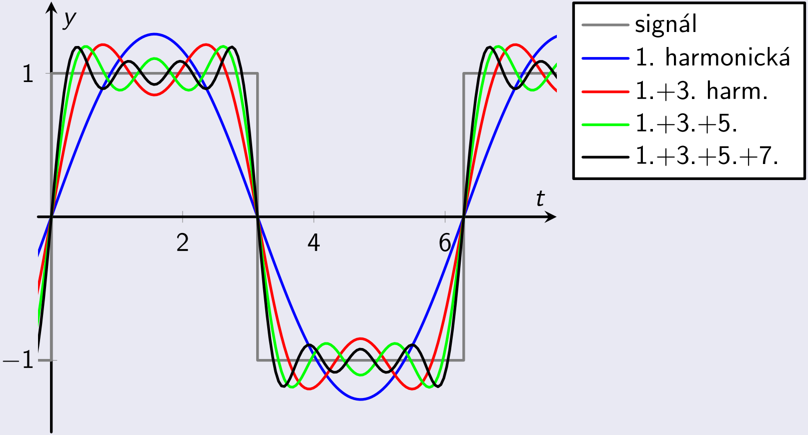
$$f(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n} sin(\frac{n2\pi t}{T})$$

viz následující obrázek

Literatura: `mathworld.wolfram.com`

Příklad Fourierovy řady

Příklad pro obdélníkový signál, $A = 1$, $\omega = 1$



Poznámky

- Fourierova transformace — převod časového průběhu na spektrum
- Spektrum signálu vyjadřuje jaké frekvence jsou přítomny
- Zpětná Fourierova transformace — převod spektra na časový průběh

- Příklady použití:
  - audio kodeky (MP3, AAC, Opus, ...),
  - analýza a zpracování signálů,
  - SDR (*Software-Defined Radio*)
  - ...

Poznámky:
- Proč obdélníkové signály — např. logické — ruší analog
- Algoritmus FFT — rychlá Fourierova transformace

Shrnutí

- Střídavé napětí a proud
- Frekvence, amplituda a fáze signálu
- Reaktance, impedance, fázový posun
- Fázorové diagramy
- Frekvenční analýza obvodů RC a RLC
- Výkon
- Fourierova řada
- ...
- Proč je dobré znát tyto základy