GRAFOVÉ ALGORITMY - CVIČENÍ 10: TOKY V SÍTI

Převzato z Cormen, Leiserson, Rivest, Stein: Introduction to algorithms. The MIT Press and McGraw-Hill, 2001; kapitola 26.

Příklad 1. Pomocí definice toku dokažte, že pokud $(u,v) \notin E$ a zároveň $(v,u) \notin E$, tak $f(u,v) = f(v,u) = 0$.

Příklad 2. Dokažte, že pro každý uzel v různý od zdroje a spotřebitele se musí celkový pozitivní tok vstupující do v rovnat celkovému pozitivnímu toku, který opouští v.

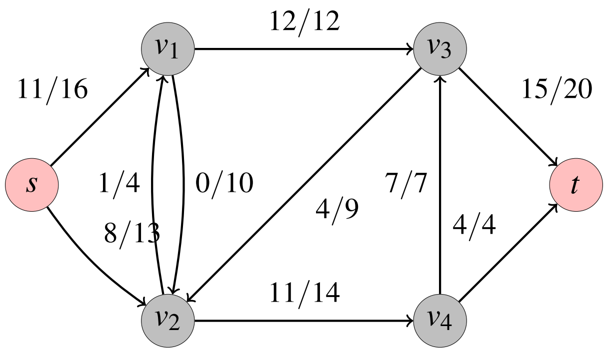
Příklad 3. Rozšiřte definice toku a vlastností na problém toku v síti s více zdroji a více spotřebiteli. Ukažte, že všechny toky v síti s více zdroji a více spotřebiteli jsou stejné jako v síti s jedním zdrojem a jedním spotřebitelem, kterou získáme přidáním superzdroje a superspotřebitele do původní sítě (hranami s nekonečnou kapacitou), a naopak.

Příklad 4. Dokažte následující Lemma. Pro tento důkaz byste neměli potřebovat vlastnost zachování toku.

Nechť $G = (V,E)$ je síť a nechť f je tok v G. Pak platí následující rovnosti:

- Pro $X \subseteq V$, $f(X,X) = 0$.
- Pro $X,Y \subseteq V$, $f(X,Y) = -f(Y,X)$.
- Pro $X,Y,Z \subseteq V$, $X \cap Y = \emptyset$, $f(X \cup Y, Z) = f(X,Z) + f(Y,Z)$ a $f(Z, X \cup Y) = f(Z,X) + f(Z,Y)$.

Příklad 5. Pro síť $G = (V,E)$ a tok f z obrázku 1 najděte libovolnou dvojici podmnožin $X,Y \subseteq V$, pro kterou platí $f(X,Y) = -f(V-X,Y)$. Pak najděte libovolnou dvojici podmnožin $X,Y \subseteq V$, pro kterou platí $f(X,Y) \neq -f(V-X,Y)$.



Obrázek 1: Příklad 5 a 11

Příklad 6. Mějme zadanou síť $G = (V, E)$ a nechť f_1 a f_2 jsou funkce $V \times V \to \mathbb{R}$. *Suma toků* $f_1 + f_2$ je funkce $V \times V \to \mathbb{R}$ definovaná jako:

$$(f_1 + f_2)(u, v) = f_1(u, v) + f_2(u, v)$$

pro všechny $u, v \in V$. Jsou-li f_1 a f_2 toky v G, které ze tří základních vlastností toku musí suma toků $f_1 + f_2$ splňovat a které může porušovat?

Příklad 7. Nechť je f tok v síti a nechť α je reálné číslo. *Skalární součin toku*, značený jako αf, je funkce $V \times V \to \mathbb{R}$ definovaná jako:

$$(\alpha f)(u, v) = \alpha \cdot f(u, v).$$

Dokažte, že toky v síti tvoří konvexní množinu. Tedy ukažte, že pokud jsou f_1 a f_2 toky, pak také $\alpha f_1 + (1 - \alpha) f_2$ je tok pro všechna $\alpha \in \langle 0, 1 \rangle$.

Příklad 8. Přeformulujte problém maximálního toku v síti na problém lineárního programování.

Příklad 9. Mějme dva sousedy, kteří se nesnáší a odmítají jít stejnou cestou do práce (daný den nevkročí na stejnou ulici; mohou procházet pouze stejnými rohy ulic, tj. křížit se). Naštěstí dům, kde bydlí, i společnost, kde pracují sídlí na rohu ulice. Mějme dánu mapu města. Ukažte, jak formulovat tento problém, zda mohou oba sousedi pracovat ve stejné společnosti, jako problém maximálního toku v síti.

Ford-Fulkersonova metoda

Příklad 10. Uvažujme síť a tok na obrázku 1. Jaký je tok řezem $(\{s, v_2, v_4\}, \{v_1, v_3, t\})$? Jaká je kapacita tohoto řezu?

Příklad 11. Demonstrujte vykonání Edmonds-Karpův algoritmus (Ford-Fulkersonova metoda využívající BFS při hledání zlepšující cesty, kdy uvažuje vždy zlepšující cestu s minimálním počtem hran) nad grafem z obrázku 1 (odmyslete si tok, který se teprve bude tímto algoritmem počítat).

Příklad 12. Uvažujme postup z předchozího příkladu (pro každou iteraci máme síť s vypočítaným tokem a odpovídající reziduální síť). Najděte minimální řez odpovídající maximálnímu zjištěnému toku sítě. Které zlepšující cesty ruší tok?

Příklad 13. Dokažte, že pro libovolnou dvojici uzlů u a v, libovolnou kapacitu c a libovolný tok f platí $c_f(u, v) + c_f(v, u) = c(u, v) + c(v, u)$.

Příklad 14. Uvažujme na přednáškách pobíranou úpravu sítě s více zdroji a spotřebiči na síť s jedním superzdrojem a jedním superspotřebičem. Dokažte, že tok výsledné sítě je konečný, pokud mají všechny hrany původní sítě s více zdroji a spotřebiči konečné kapacity.

Příklad 15. Uvažujme problém toku v síti s více zdroji a spotřebiči. Předpokládejme, že každý zdroj s_i produkuje přesně p_i jednotek toku, takže $f(s_i,V) = p_i$. Předpokládejme také, že každý spotřebič t_j konzumuje přesně q_j jednotek, takže $f(V,t_j) = q_j$, kde $\sum_i p_i = \sum_j q_j$. Ukažte, jak transformovat problém nalezení toku se zajištěním těchto podmínek na produkci a konzumaci v síti s více zdroji a spotřebiči na problém nalezení maximálního toku v síti s jedním zdrojem a jedním spotřebičem.

Příklad 16. Dokažte Lemma 25 z přednášek: Nechť $G = (V,E)$ je síť, f její tok a p zlepšující cesta v G_f. Definujme funkci

$$f_p(u,v) = \begin{cases} c_f(p) & \text{pro } (u,v) \text{ na } p \\ -c_f(p) & \text{pro } (v,u) \text{ na } p \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

Pak f_p je tok v G_f velikosti $|f_p| = c_f(p) > 0$.

Příklad 17. Ukažte, že maximální tok v síti $G = (V,E)$ může být vždy nalezen prozkoumáním nejvýše $|E|$ zlepšujících cest. (Nápověda: Určete cesty po nalezení maximálního toku.)

Příklad 18. *Hranová souvislost* neorientovaného grafu je minimální počet hran, k, které je třeba odstranit, aby vznikl nesouvislý graf. Například, hranová souvislost stromu je 1 a hranová souvislost cyklu je 2. Ukažte, jak zjišťovat hranovou souvislost neorientovaného grafu $G = (V,E)$ pomocí algoritmu pro nalezení maximálního toku na nejvýše $|V|$ sítích, kdy každá má $O(V)$ uzlů a $O(E)$ hran.

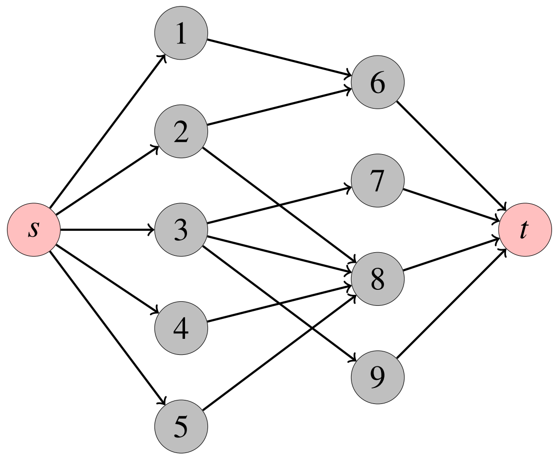
Příklad 19. Předpokládejme hranově symetrickou síť $G = (V,E)$ (tj. $(u,v) \in E$, právě když $(v,u) \in E$). Ukažte, že Edmonds-Karpův algoritmus skončí po nejvýše $|V||E|/4$ iteracích. (Nápověda: Pro každou hranu (u,v) uvažujte, jak se mohou změnit $\delta(s,u)$ a $\delta(v,t)$ v době, kdy je hrana (u,v) kritická, tj. její reziduální kapacita je rovna reziduální kapacitě celé zlepšující cesty, která hranu (u,v) obsahuje.)

Maximální párování v bipartitním grafu

Příklad 20. Na síť na obrázku 2 aplikujte Ford-Fulkersonův algoritmus. Po každé iteraci ukažte průběžně vznikající reziduální síť. Při každé iteraci vybírejte zlepšující cesty lexikograficky od nejmenších (podle návěští vnitřních uzlů).

Příklad 21. Pomocí indukce přes počet iterací dokažte následující větu o celočíselnosti: Je-li kapacita c vždy celočíselná, tak i maximální tok f zjištěný Ford-Fulkersonovou metodou má tu vlastnost, že $|f|$ je celé číslo. Navíc pro všechny uzly u a v je hodnota $f(u,v)$ celočíselná.

Příklad 22. Nechť $G = (V,E)$ je bipartitní graf s rozkladem uzlů $V = L \cup R$ a nechť G' je odpovídající síť. Jaká je horní mez délky jakékoli zlepšující cesty v G' během provádění metody FORD-FULKERSON.



Obrázek 2: Příklad 20

Příklad 23*. *Perfektní párování* je takové párování, které páruje všechny uzly. Nechť $G = (V, E)$ je neorientovaný bipartitní graf s rozkladem uzlů $V = L \cup R$, kde $|L| = |R|$. Pro libovolné $X \subseteq V$ definujme *sousedství* X jako

$$N(X) = \{y \in V : (x, y) \in E,\ x \in X\},$$

tedy, množina incidentních vrcholů k nějakému vrcholu z X. Dokažte Hallovu větu: Perfektní párování grafu G existuje, právě když $|A| \leq |N(A)|$ pro všechny podmnožiny $A \subseteq L$.

Příklad 24*. Bipartitní graf $G = (V, E)$ s daným rozkladem uzlů $V = L \cup R$ je *d-regulární*, pokud je každý uzel $v \in V$ stupně d. Každý d-regulární bipartitní graf má $|L| = |R|$. Dokažte, že každý d-regulární bipartitní graf má párování kardinality $|L|$ pomocí argumentace, že minimální řez odpovídající sítě má kapacitu $|L|$.