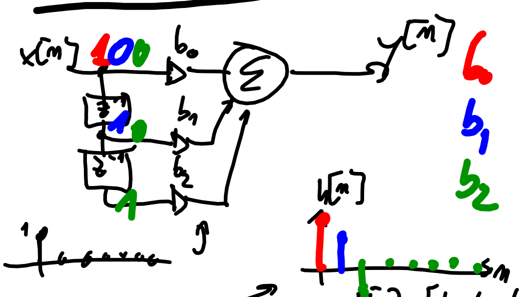
ČÍSLICOVÉ FILTRY

= digital filters = discrete systems = discrete-time systems = ...

WANTED $1000.000 → KMITOČTOVÁ CHARAKTERISTIKA
→ STABILITA



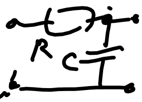
Impulsní odezva

$h[n] = [b_0\ b_1\ b_2\ 0\ 0\ 0]$

Diferenční rovnice

$$y[n] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + b_2 x[n-2]$$

JAK TO BYLO U systémů se spoj. časem



Diferenciální rovnice

$$b_0 x(t) + b_1 \frac{dx(t)}{dt} + \dots + b_q \frac{d^q x(t)}{dt^q} = a_0 y(t) + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + \dots + a_p \frac{d^p y(t)}{dt^p}$$

Frekvenční charakteristika - pokus č. 1

$h[n] \xrightarrow{DTFT} H(e^{j\omega})$ kmitočtová/frekvenční charakteristika

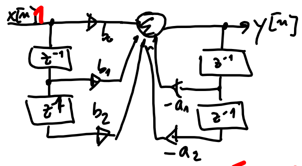
F. transformace s diskrétním časem

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] e^{-j\omega n}$$

$h(t) \xrightarrow{F} H(j\omega)$ Fourierova transformace

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j\omega t}\, dt$$

kmitočtová/frekvenční charakteristika



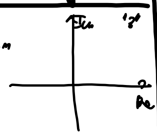
$h[n] = ?$ **NEKONEČNÁ IIR**

$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] e^{-j\omega n}$ ← **PROBLÉM!**

Frekv. charakteristika · pokrač. 2

z - transformace

$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}$



Slovník:

$x[n] \longrightarrow X(z)$

$a\,x[n] \longrightarrow a\,X(z)$

$x[n-1] \longrightarrow X(z) z^{-1}$

$x[n-k] \longrightarrow X(z) z^{-k}$

$y[n] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + b_2 x[n-2] - a_1 y[n-1] - a_2 y[n-2]$

$Y(z) = b_0 X(z) + b_1 X(z) z^{-1} + b_2 X(z) z^{-2} - a_1 Y(z) z^{-1} - a_2 Y(z) z^{-2}$

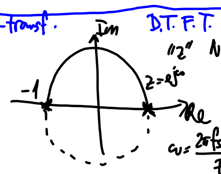
$Y(z)[1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}] = X(z)[b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}]$

$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$ $\boxed{\text{přenosová / systémová funkce!}}$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$$

$\boxed{H(z) = \sum h[n] z^{-n} \qquad H(e^{j\omega}) = \sum h[n] e^{-j\omega n}}$

z - transf. D.T.F.T.



"z" Normovaná kruh. frekv.

$\omega = 0 \quad e^{0} = 1$

$\omega = \frac{2\pi f_{aktuální}}{F_s}$ $\quad \omega = \frac{2\pi \frac{F_s}{2}}{F_s} = \pi$

$e^{j\pi} = -1$

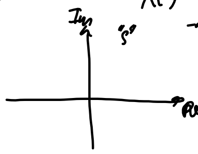
$$\boxed{H(e^{j\omega}) = H(z)\Big|_{z=e^{j\omega}}} = \frac{b_0 + b_1 e^{-j\omega} + b_2 e^{-2j\omega}}{1 + a_1 e^{-j\omega} + a_2 e^{-2j\omega}} \quad \text{(frekv.)}$$

FREKVENČNÍ CHAR. FILTRU!

SPOJ. ČAS

$b_0 x(t) + b_1 \frac{dx(t)}{dt} + \dots + b_Q \frac{d^Q x(t)}{dt^Q} = a_0 y(t) + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + \dots + a_P \frac{d^P y(t)}{dt^P}$

Laplaceova transf.: $X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st} dt$



$x(t) \to X(s)$

$a\,x(t) \to a\,X(s)$

$\frac{dx(t)}{dt} \to s X(s)$

$\frac{d^k x(t)}{dt^k} \to s^k X(s)$

$b_0 X(s) + b_1 s X(s) + \dots + b_Q s^Q X(s) = a_0 Y(s) + a_1 s Y(s) + \dots + a_P s^P Y(s)$

$X(s)[b_0 + b_1 s + \dots + b_Q s^Q] = Y(s)[a_0 + a_1 s + \dots + a_P s^P]$

$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$ přenosová / systémová funkce

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_0 + b_1 s + \dots + b_Q s^Q}{a_0 + a_1 s + \dots + a_P s^P}$$

$\boxed{H(s) = \int h(t) e^{-st} dt \quad \text{L.t.} \qquad H(j\omega) = \int h(t) e^{-j\omega t} dt \quad \text{F.t.}}$

$H(j\omega) = H(s)\Big|_{s=j\omega}$

$$H(j\omega) = \frac{b_0 + b_1 j\omega + \dots + b_Q (j\omega)^Q}{a_0 + a_1 j\omega + \dots + a_P (j\omega)^P} \quad \text{frekv.}$$

OBECNĚ

Diferenční rovnice:

$y[n] = \sum_{k=0}^{Q} x[n-k] b_k - \sum_{k=1}^{P} y[n-k] a_k$

Převod do "z":

$Y(z) = \sum_{k=0}^{Q} X(z) z^{-k} b_k - \sum_{k=1}^{P} Y(z) z^{-k} a_k$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{Q} b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^{P} a_k z^{-k}}$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{\sum_{k=0}^{Q} b_k e^{-jk\omega}}{1 + \sum_{k=1}^{P} a_k e^{-jk\omega}}$$

$b_0 = 1$

FAKTORIZACE (ROZKLAD) POLYNOMŮ a STABILITA

$$H(z) = \frac{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} \cdot \frac{z^2}{z^2} = \frac{z^2 + b_1 z + b_2}{z^2 + a_1 z + a_2} = \frac{(z-n_1)(z-n_2)}{(z-p_1)(z-p_2)}$$

NULOVÉ BODY / NULY

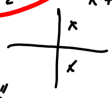
PÓLY

n_1, n_2 - kořeny čitatele, řešení $z^2 + b_1 z + b_2 = 0$

p_1, p_2 - dtto pro jmenovatele

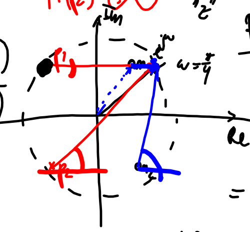
$x^2 + 2x + 1 = (x+1)(x+1) = (x-(-1))(x-(-1))$

$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$



$H(n_1) = 0 \qquad H(p_1) = \infty$ "z"

$$H(e^{j\omega}) = \frac{(e^{j\omega} - n_1)(e^{j\omega} - n_2)}{(e^{j\omega} - p_1)(e^{j\omega} - p_2)}$$



Rychlý odhad. frekv. char.:

$H(e^{j\omega})$

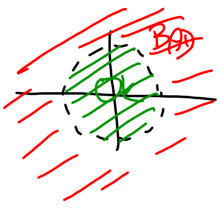
$$|H(e^{j\omega})| = \frac{|e^{j\omega} - n_1||e^{j\omega} - n_2|}{|e^{j\omega} - p_1||e^{j\omega} - p_2|} = \frac{\text{součin délek vektorů z nul}}{\text{součin délek vektorů z pólů}}$$

$\arg H(e^{j\omega}) = \arg(e^{j\omega} - n_1) + \arg(e^{j\omega} - n_2) - \arg(e^{j\omega} - p_1) - \arg(e^{j\omega} - p_2)$

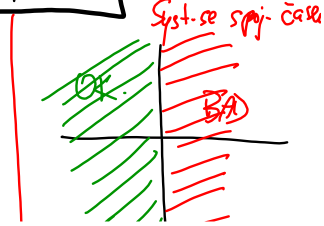
součet úhlů modrých vektorů − součet úhlů červených vektorů

PODMÍNKA STABILITY

$$\boxed{|p_k| < 1}$$



Syst. se spoj. časem



SUMMARY

CZSa

schéma diferenční rovnice

buzení jedn. impulsem

impulsní odezva $h[n]$

z-transform

$H(z)=\frac{B(z)}{A(z)}$ přenosová funkce

D.T.F.T

$z \to e^{j\omega}$

frekvz

$H(e^{j\omega})$ frekvenční char.

rozložení na nuly a póly

$H(z)=\frac{(z-n_1)\cdots(z-n_Q)}{(z-p_1)\cdots(z-p_P)}$

graficky/ručně

Stabilita: $|p_k|<1$