Základní pojmy o signálech

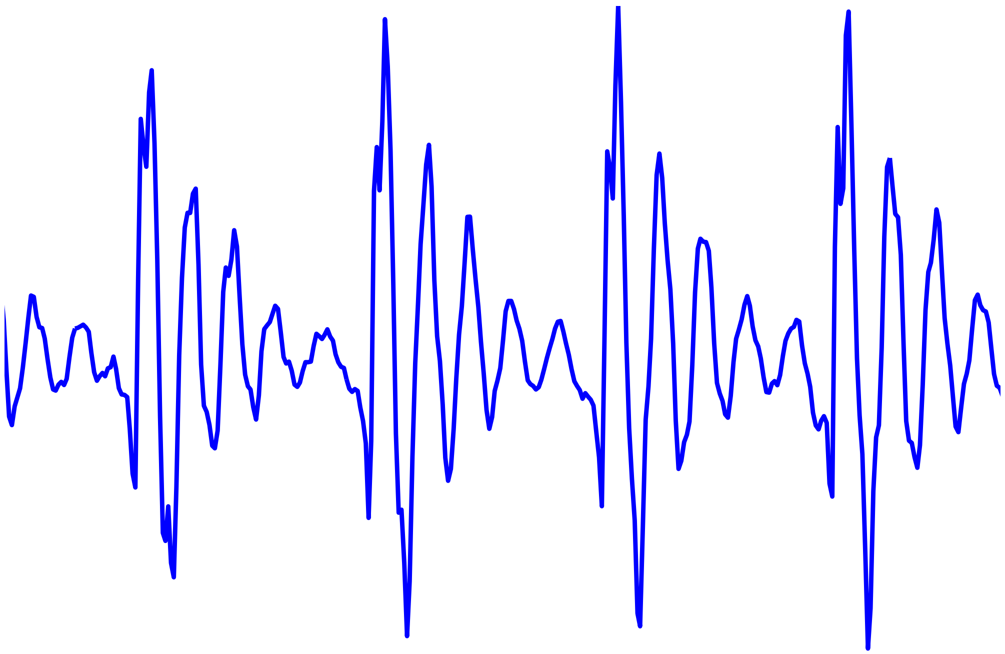
Jan Černocký

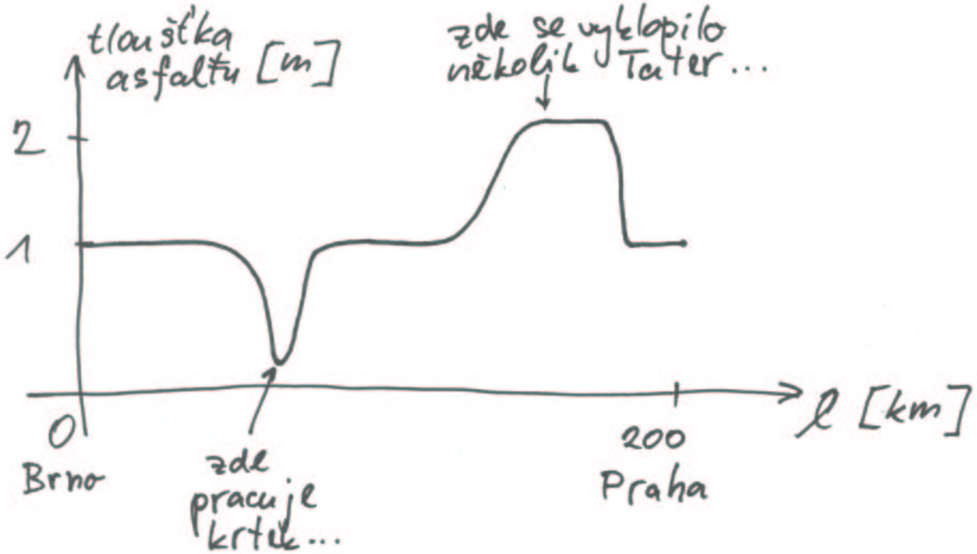
ÚPGM FIT VUT Brno, `cernocky@fit.vutbr.cz`

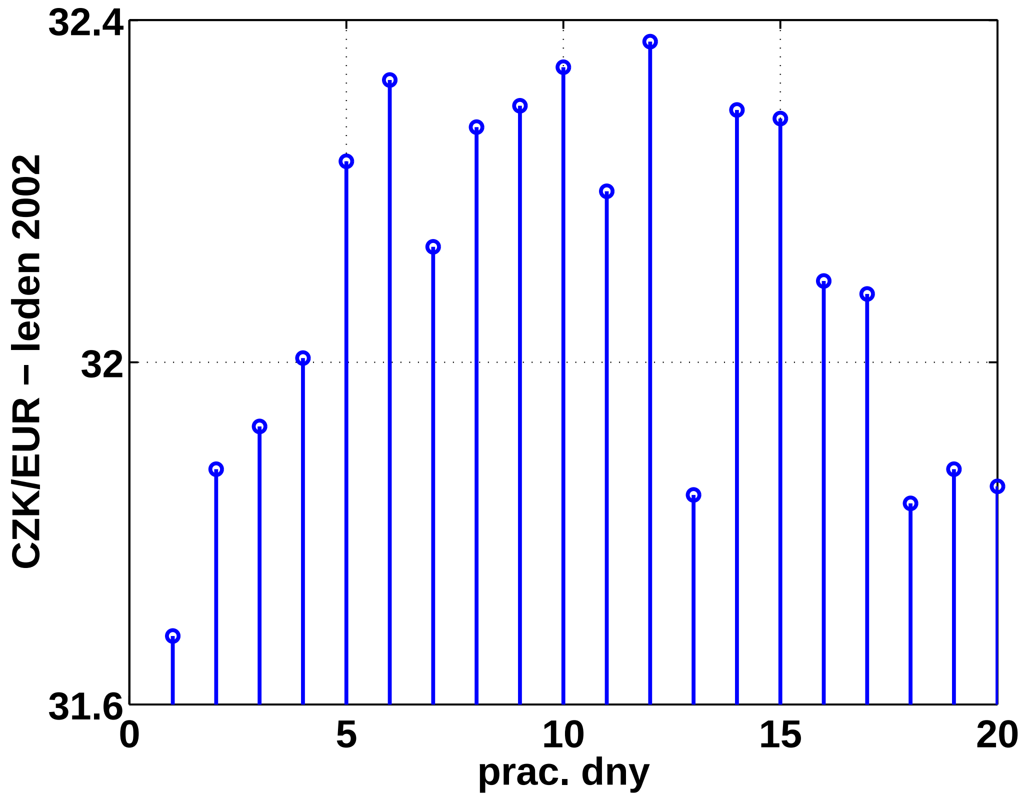
- klasifikace signálů
- transformace časové osy
- energie a výkon
- periodické signály
- harmonický signál
- jednotkový skok a impuls

Signály

- libovolné fyzikální veličiny.
- jedna nebo několik nezávislých proměnných (většinou čas), jedna závislá.
- Příklady: akustický tlak vyvolaný hláskou 'e', stupně šedi na ČB snímku, síla asfaltu na dálnici D1, kurs Kč vůči EUR.




tloušťka asfaltu [m]
zde se vyklopilo několik Tater...
2
1
0
Brno
zde pracuje krtek...
200
Praha
l [km]


CZK/EUR – leden 2002
32.4
32
31.6
0
5
10
15
20
prac. dny

Matematický pohled na signály (1 nezávislá proměnná)

funkce, které převádějí nezávislou proměnnou z množiny T (signálová osa) na hodnoty z množiny A. Podle charakteru množiny T dělíme signály na:

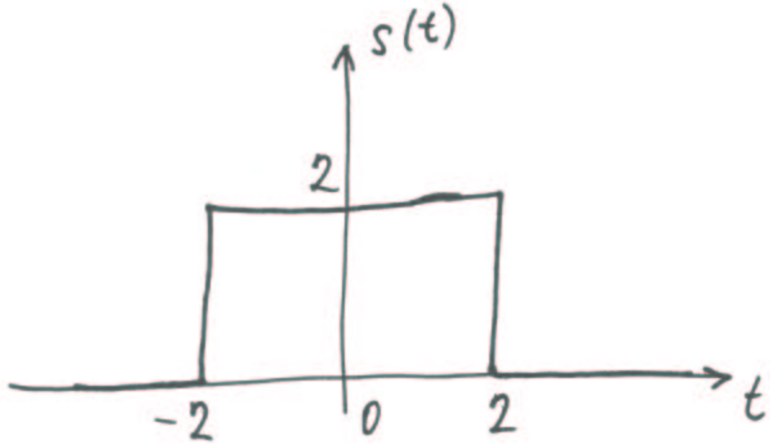
- signály se **spojitým časem**: $t \in \Re$, definován všude. Příklad: rychlost autobusu na cestě z Prahy do Brna v závislosti na čase. Budeme značit $s(t)$.
- signály s **diskrétním časem**: $n \in Z$, pouze celočíselné hodnoty, jinde nedefinováno. Budeme značit $s[n]$, n nemá rozměr. Příklad: můj plat v 12-ti měsících tohoto roku. Jelikož diskrétní signály nejsou nic jiného než řady čísel, budeme je někdy nazývat **posloupnosti**.

Za množinu A budeme v průběhu tohoto kursu většinou pokládat množinu reálných čísel $\Re$, avšak mohou to být i komplexní čísla. Praktické aplikace v IT: **vždy konečný počet hodnot (kvantování)**.

Deterministické a náhodné signály

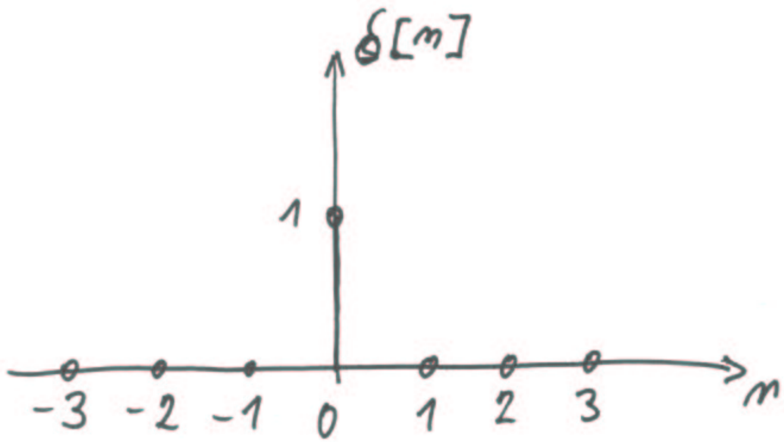
Deterministické signály můžeme zapsat vztahem, rovnicí, nerovností. Pro každý čas t či n víme, jaké hodnoty signál nabude. Příklad 1: obdélníkový impuls se spojitým časem:

$$x(t) = \begin{cases} 2 & \text{pro} \quad -2 \le t \le 2 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$$



Příklad 2: diskrétní jednotkový impuls:

$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & \text{pro} \quad n = 0 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$$

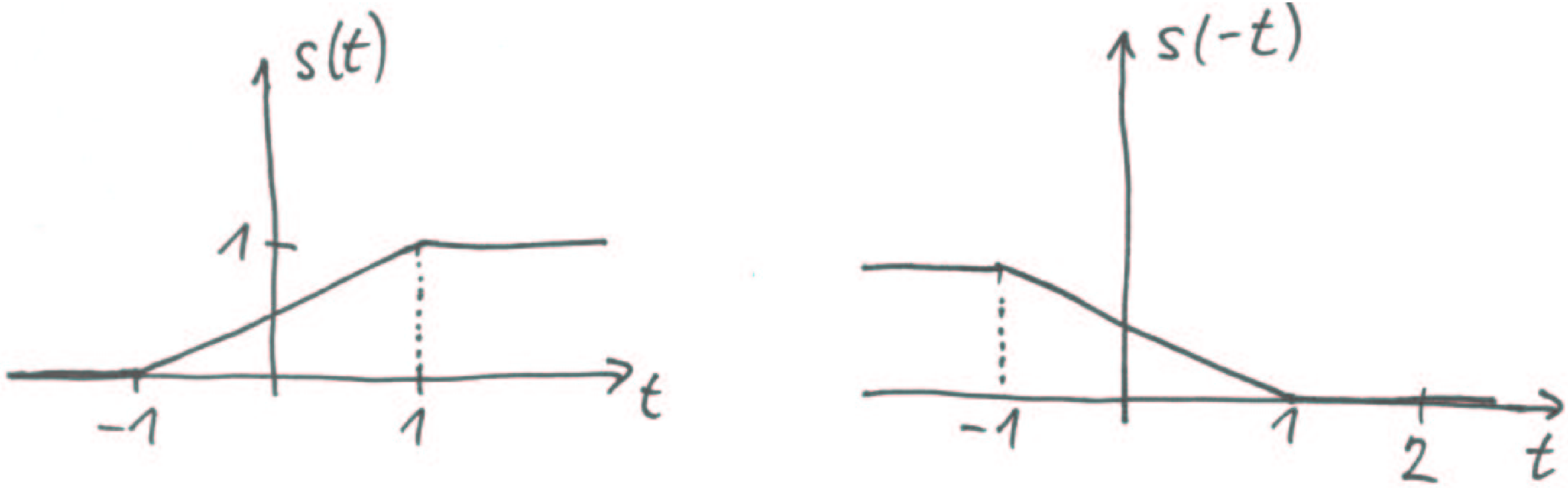


Náhodné signály popsat rovnicí nemůžeme a pro čas t či n nikdy přesně nevíme, jaká bude jejich hodnota. Můžeme je charakterizovat pouze pomocí **parametrů** (např. střední hodnota, rozptyl). Více v přednáškách ke konci semestru.

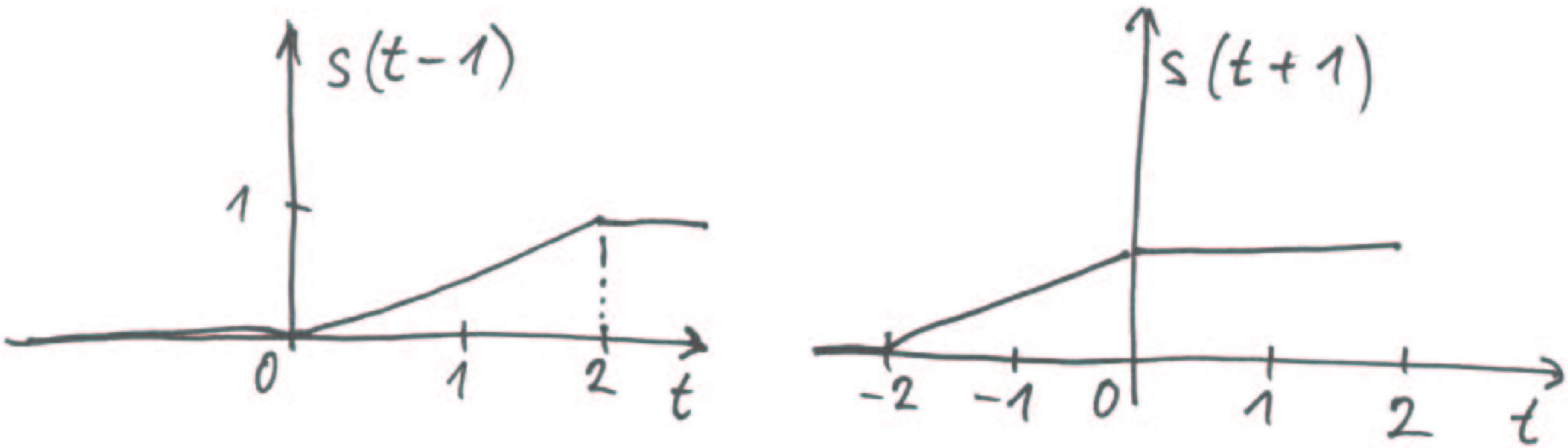
Transformace nezávislé proměnné – změny časové osy

Jak se změní původní signál $s(t)$ či $s[n]$, změníme-li časovou osu?

Příklady na signálu se spojitým časem:



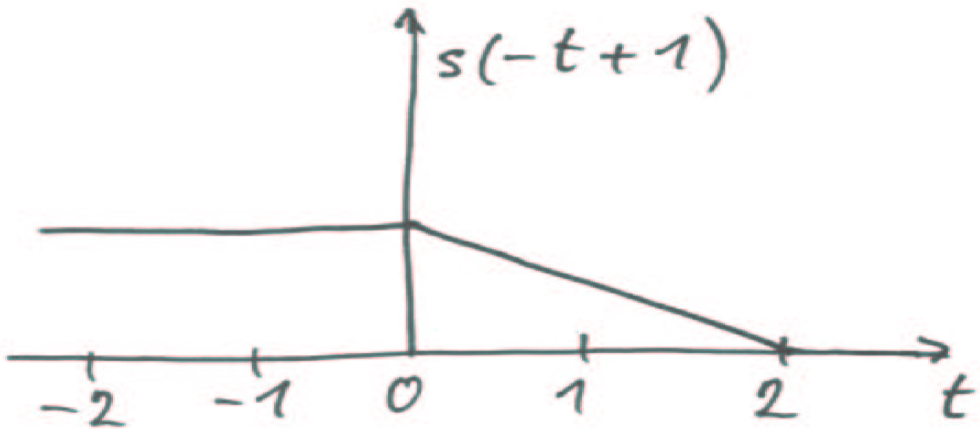
Otočení časové osy: $s(-t)$ – všechno je naopak.

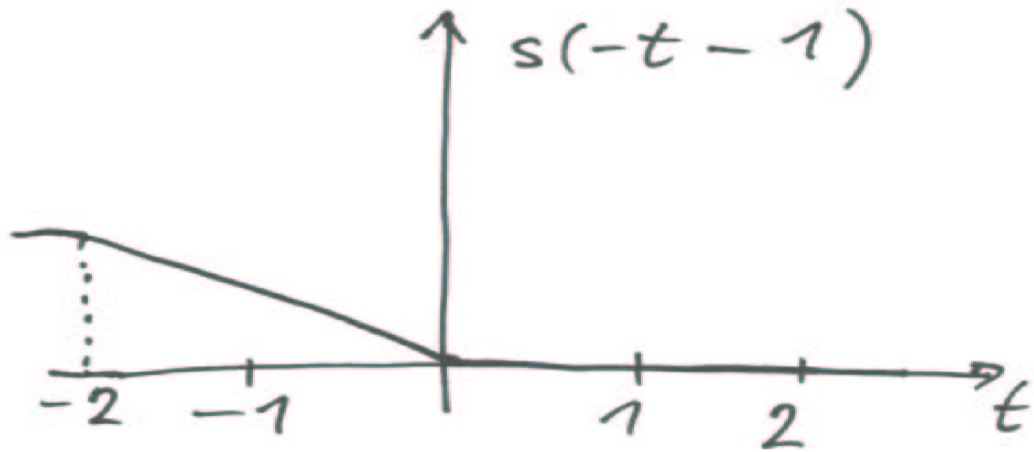


Zpoždění signálu: $s(t-\tau)$ pro kladné τ – signál se objeví **později**.

Předběhnutí signálu: $s(t+\tau)$ pro kladné τ – signál se objeví **dříve**.

Obrácení časové osy s posunutím





Otočení se zpožděním(!): $s(-t+\tau)$ pro kladné τ.

Otočení s předběhnutím(!): $s(-t-\tau)$ pro kladné τ.

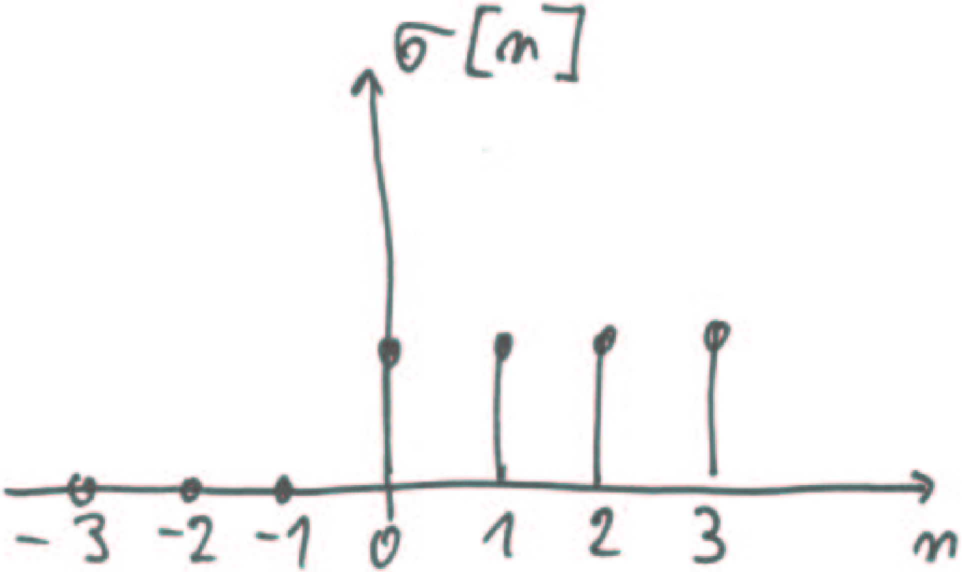
V případech s otočenou časovou osou mají znaménka *opačný význam*.

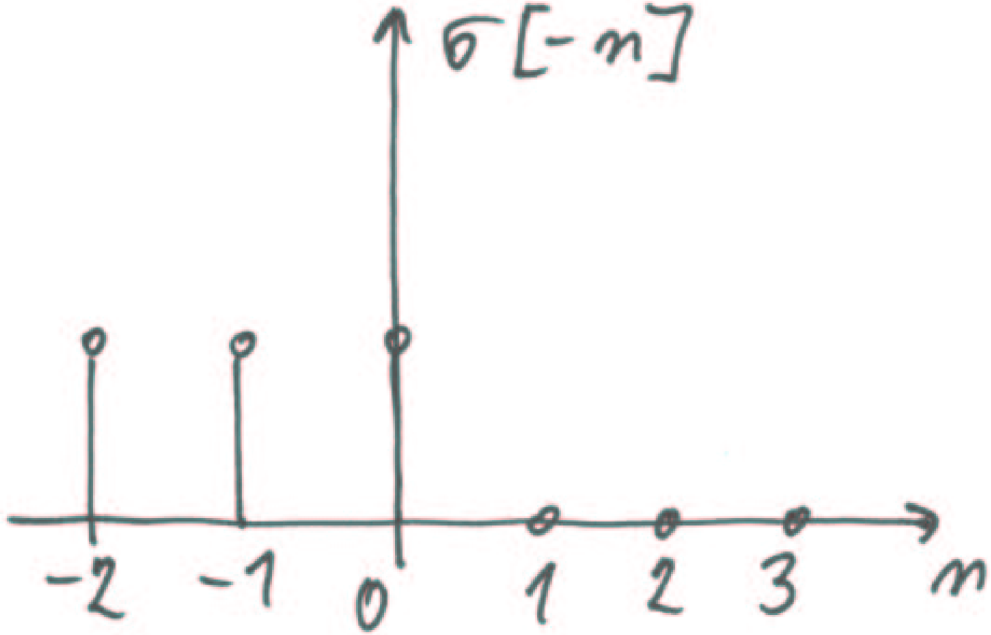
Kontrola:

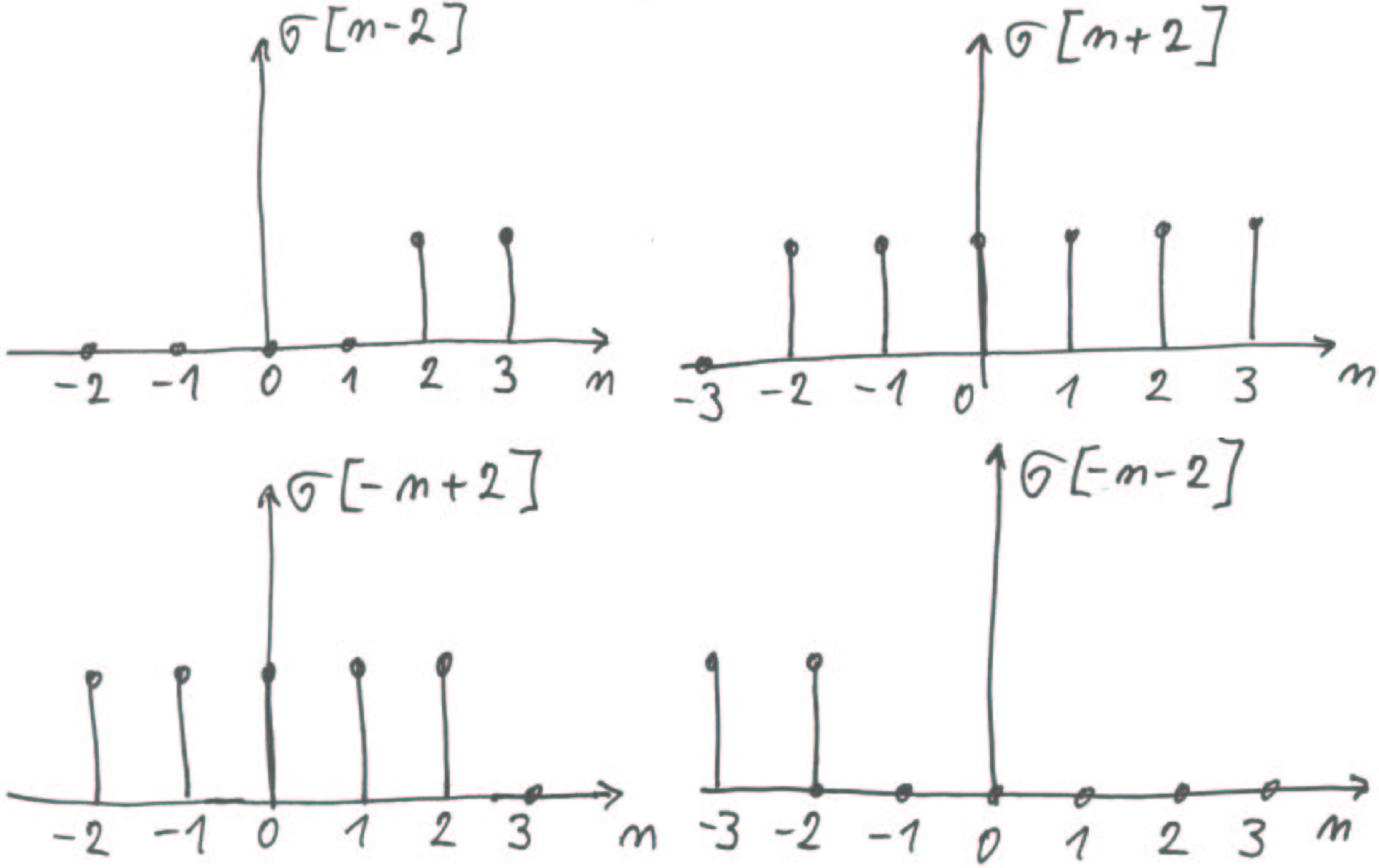
- najít si na časové ose změněného signálu několik významných bodů.
- pro každý z nich si vyhodnotit časovou modifikaci.
- podívat se do původního signálu, zda to “sedí”.

Příklad: Nejsme si jisti, zda jsme $s(-t+1)$ namalovali správně.
$s(-t+1)$ pro $t=0$ má hodnotu 1. $-0+1=1$, původní signál $s(t)$ v čase 1 má také hodnotu 1 $\Rightarrow$ OK.
$s(-t+1)$ pro $t=2$ má hodnotu 0. $-2+1=-1$, původní signál $s(t)$ v čase -1 má také hodnotu 0 $\Rightarrow$ OK.

Příklady na signálu s **diskrétním časem** – diskrétní jednotkový skok:

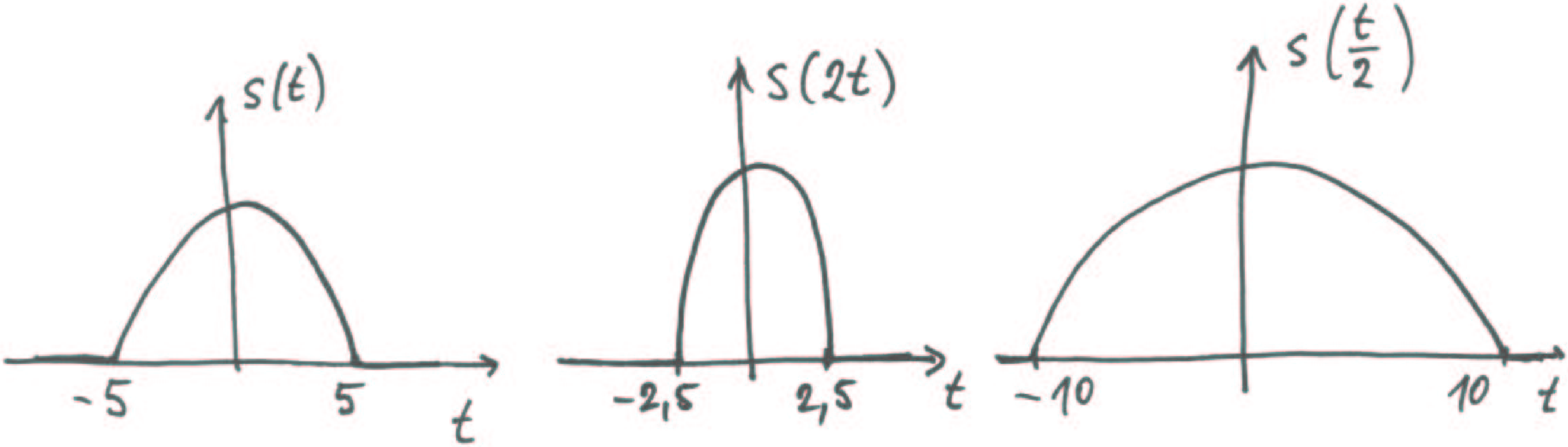






. . . Vyzkoušejte si kontrolu!

Změna časového měřítka



Kontrakce času: $s(mt)$ pro kladné $m > 1$ – čas běží rychleji a všechno je kratší.

Dilatace času: $s(\frac{t}{m})$ pro kladné $m > 1$ – čas běží pomaleji a všechno je delší.

…vyzkoušejte si pomůcku i pro kontrakci/dilataci času!

Energie a výkon

okamžitý výkon na rezistoru můžeme spočítat jako:

$$p(t) = u(t)i(t) = u^2(t)/R = i^2(t)R.$$

Napětí i proud zde vystupují ve druhé mocnině. Při zpracování signálů většinou žádné rezistory nemáme (pokud by nám opravdu chyběl, můžeme si jej představit, s odporem 1Ω), okamžitý výkon bude dán:

$$p(t) = |s(t)|^2$$

Absolutní hodnota není potřeba pro reálné signály, je ve vzorci pouze pro šílence pracující s komplexními signály. Pro diskrétní signály:

$$p[n] = |s[n]|^2$$

Zajímá-li nás energie a průměrný výkon signálu v intervalu $[t_1, t_2]$:

$$\int_{t_1}^{t_2} p(t)dt = \int_{t_1}^{t_2} |s(t)|^2 dt \qquad \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} p(t)dt = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} |s(t)|^2 dt$$

podobně pro diskrétní signály:

$$\sum_{n_1}^{n_2} p[n] = \sum_{n_1}^{n_2} |s[n]|^2 \qquad \frac{1}{n_2 - n_1} \sum_{n_1}^{n_2} p[n] = \frac{1}{n_2 - n_1} \sum_{n_1}^{n_2} |s[n]|^2$$

V mnoha případech nás bude zajímat **celková energie** v celém rozmezí časů od $-\infty$ do ∞:

$$E_\infty = \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} |s(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|^2 dt \qquad E_\infty = \lim_{N\to\infty} \sum_{-\infty}^{\infty} |s[n]|^2 = \sum_{-N}^{N} |s[n]|^2$$

Podle hodnoty E_∞ dělíme signály na **signály s konečnou energií** a **signály s nekonečnou energií**.

Podobně **celkový střední výkon**:

$$P_\infty = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |s(t)|^2 dt \qquad P_\infty = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{-N}^{N} |s[n]|^2$$

Pokud je P_∞ nenulový, je $E_\infty = \infty$.

Neperiodické a periodické signály

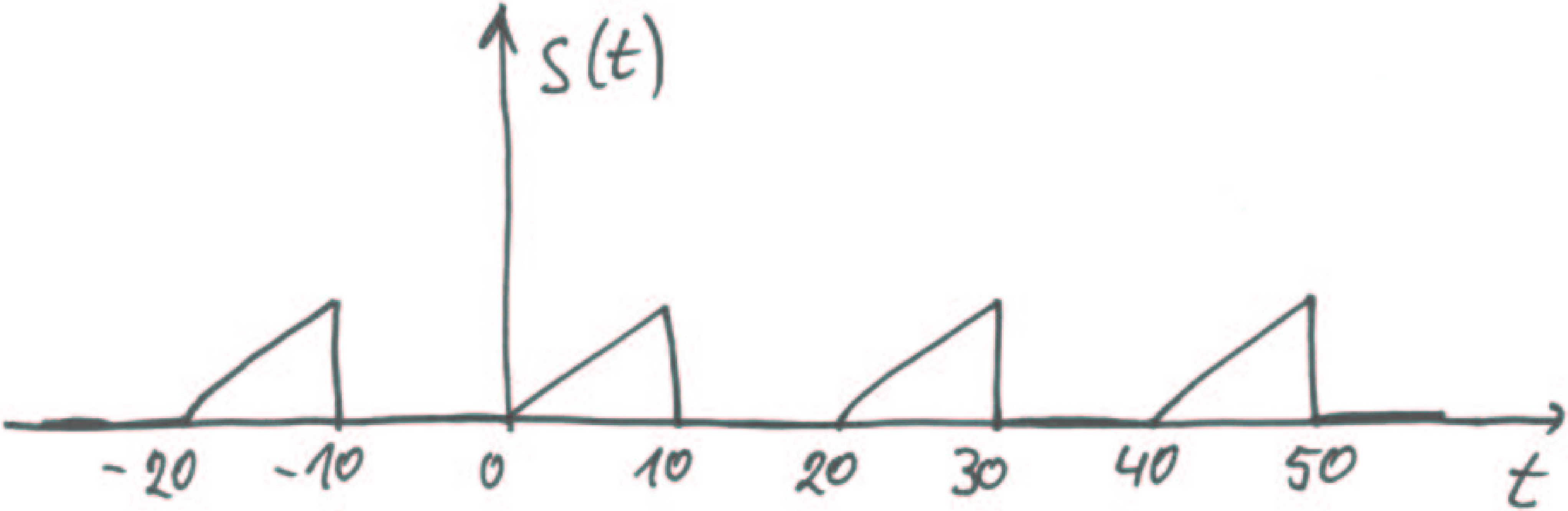
Pro **neperiodické** signály nemůžeme najít T nebo N takové, že:

$$s(t+T) = s(t) \quad \text{spojitý čas} \tag{1}$$

$$s[n+N] = s(n) \quad \text{diskrétní čas,} \tag{2}$$

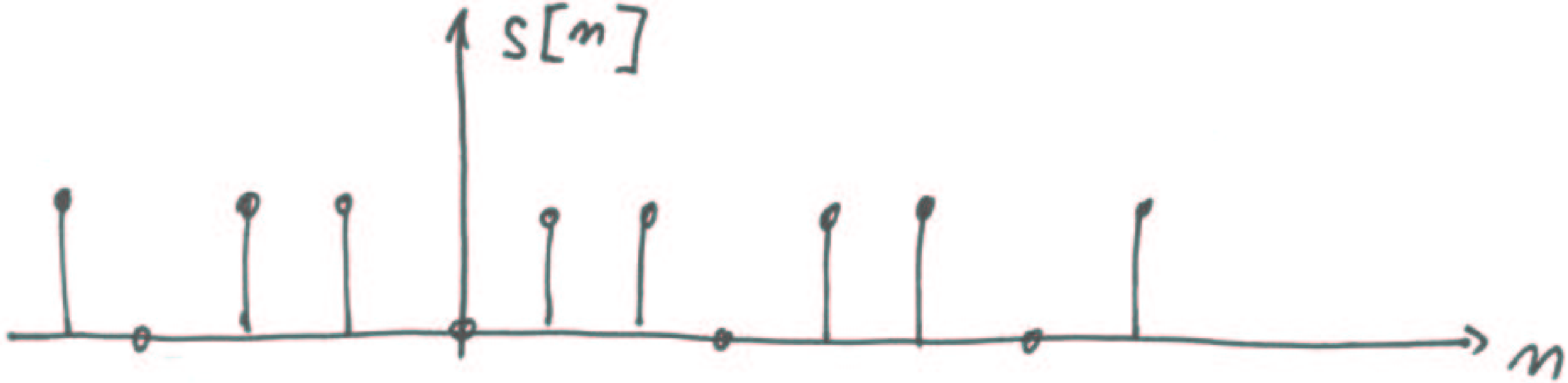
signály se v čase neopakují.

Pokud je T či N možné nalézt, hovoříme o **periodických signálech**. Např.



se opakuje po $T = 20$ s, ale také po $T = 40$ s, $T = 60$ s, atd. Nejmenší hodnota T, pro kterou rovnice 1 platí, se nazývá **základní perioda** T_1.

Podobně pro diskrétní signály:

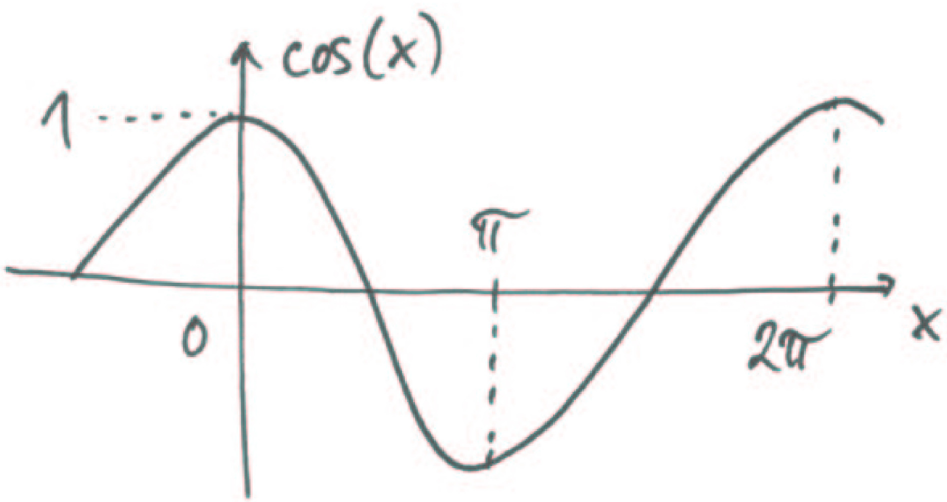


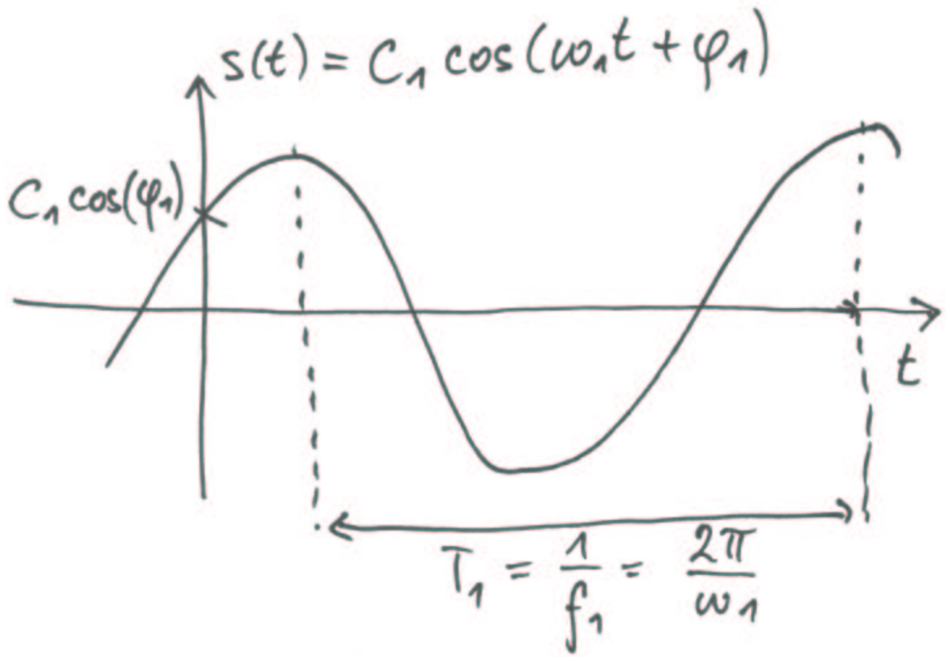
Signál se opakuje po $N = 3$, ale také po $N = 6$, $N = 9$, atd. Nejmenší hodnota N, pro kterou rovnice 2 platí, se nazývá **základní perioda** N_1.

Harmonické signály

jsou nejjednodušeji definovanými periodickými signály a jsou chlebem a solí zpracování signálů, proto jim musíme věnovat náležitou pozornost.

$$s(t) = C_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) \tag{3}$$





- C_1 je kladná konstanta – amplituda (maximální hodnota).
- ω_1 je kladná konstanta – úhlový nebo kruhový kmitočet [rad/s]. Ke skutečnému kmitočtu f_1 je vztažen: $\omega_1 = 2\pi f_1$. Základní perioda harmonického signálu $T_1 = \frac{1}{f_1} = \frac{2\pi}{\omega_1}$.
- ϕ_1 je počáteční fáze [rad]. Hodnota signálu pro $t = 0$ je $s(0) = C_1 \cos \phi_1$.

Ve zpracování signálů pracujeme vždy s radiány! Nezapomeňte si přepnout kalkulačky!

Hodnoty značíme indexem 1, protože později budeme rozkládat obecné periodické signály do harmonických a koeficienty budeme indexovat.

Výkon periodických signálů

U obecných signálů jsme střední výkon počítali:

$$P_\infty = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |s(t)|^2 dt$$

V případě **periodických** lze integrovat pouze přes jednu základní periodu a to jakkoliv:

$$P_s = \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} |s(t)|^2 dt = \frac{1}{T_1} \int_{0}^{T_1} |s(t)|^2 dt = \dots$$

Velmi používaným údajem, který se odvozuje ze středního výkonu periodického signálu, je **efektivní hodnota** — velikost stejnosměrného signálu, který by dal na stejné zátěži (kdybychom nějakou měli :-) stejný střední výkon:

$$C_{ef} = \sqrt{P_s}.$$

Jak je tomu u harmonického signálu (fázi neuvažujeme): $s(t) = C_1 \cos(\omega_1 t)$? Používáme vzoreček $\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$:

$$P_s = \frac{1}{T_1}\int_0^{T_1} [C_1 \cos(\omega_1 t)]^2 dt = \frac{1}{T_1}\int_0^{T_1} {C_1}^2 \frac{1}{2}(1 + \cos 2\omega_1 t) dt$$

Integrál cosinu je 0 (uvědomte si, že v libovolném množství period funkce cos jsou záporné plochy vyváženy kladnými), takže zbývá:

$$P_s = \frac{1}{T_1}\int_0^{T_1} {C_1}^2 \frac{1}{2} dt = \frac{1}{T_1}\frac{{C_1}^2}{2} T_1 = \frac{{C_1}^2}{2}$$

Z toho vyplývá známá poučka o efektivní hodnotě **harmonického** signálu:

$$C_{ef} = \sqrt{P_s} = \frac{C_1}{\sqrt{2}},$$

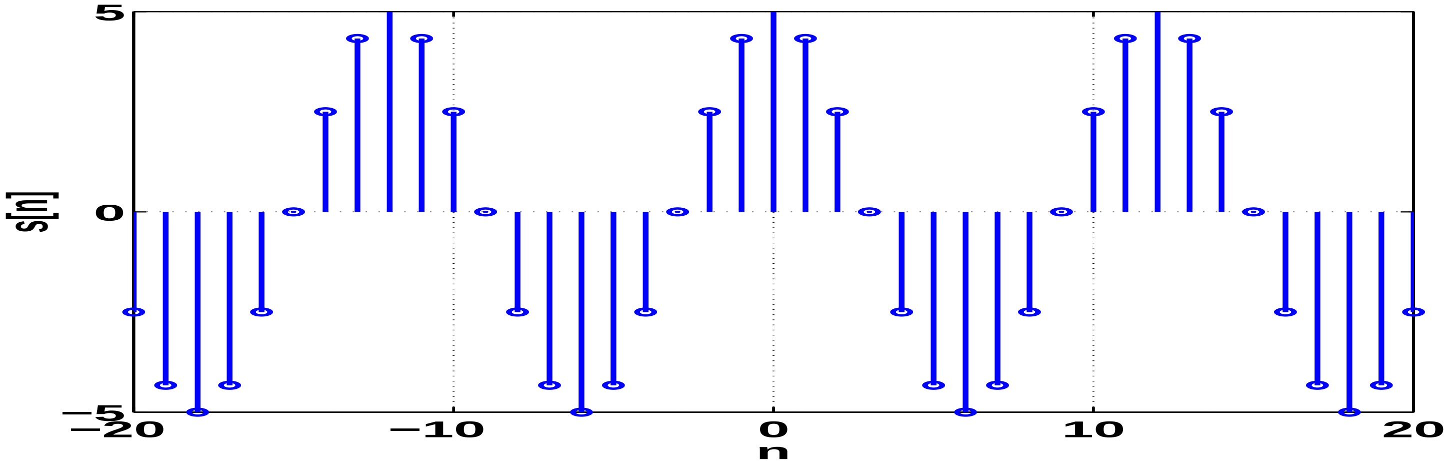
kterou už jste asi viděli... Pozor! Platí opravdu **pouze** pro harmonický signál!

Harmonické signály s diskrétním časem

$$s[n] = C_1 \cos(\omega_1 n + \phi_1) \tag{4}$$

- C_1 je kladná konstanta – amplituda.
- ω_1 je kladná konstanta – úhlový nebo kruhový kmitočet. Jelikož je n bezrozměrné, je zde jednotka ω_1 pouze [rad].
- ϕ_1 je počáteční fáze [rad]. Hodnota signálu pro $n = 0$ je $s[0] = C_1 \cos \phi_1$.

Příklad: $s[n] = 5\cos(2\pi n/12)$, $\omega_1 = \pi/6$.



Se **základní periodou** harmonické posloupnosti máme drobný problém. Není možné ji vypočítat podobně jako u signálu se spojitým časem pomocí: $N_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}$, protože by mohlo vyjít necelé číslo. N_1 jako počet vzorků musí být vždy celý. Musíme najít takové N_1, aby **platila podmínka periodicity**:

$$\cos\left[\omega_1(n+N_1)\right] = \cos\omega_1 n.$$

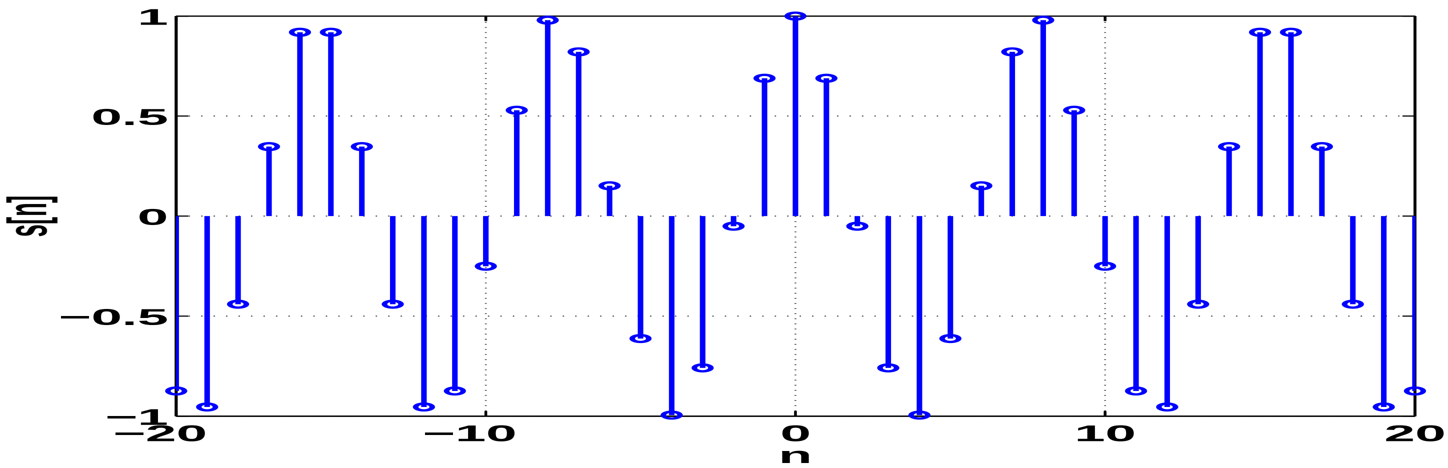
Víme, že základní perioda funkce $\cos$ je 2π a že podmínka bude splněna pouze pro rozdíl argumentů rovný celočíselnému násobku 2π:

$$\omega_1(n+N_1) - \omega_1 n = \omega_1 N_1 = k2\pi,$$

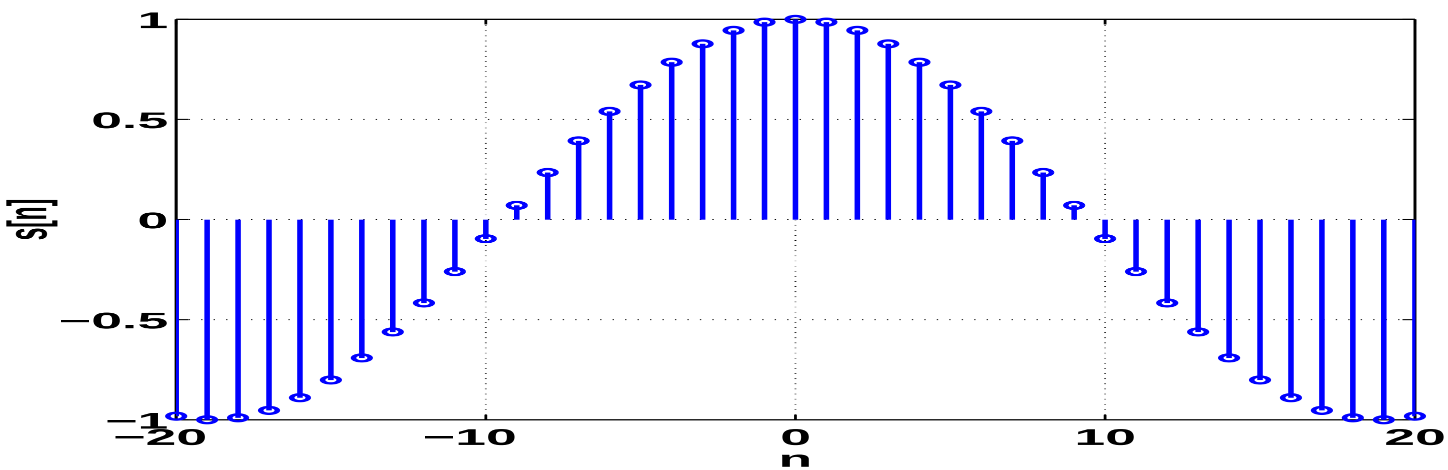
kde k je celé číslo takové, aby N_1 bylo nejmenší možné.

Příklad 1: $s[n] = 5\cos(2\pi n/12)$, $\omega_1 = \pi/6$.
$\frac{\pi}{6}N_1 = k2\pi$, řešení je jednoduché: $k=1$, $N_1 = 12$ (viz obrázek).
Srovnání – kdyby byl signál se spojitým časem, základní perioda by byla: $T_1 = \frac{2\pi}{\pi/6} = 12$.
Výsledek je stejný.

Příklad 2: $s[n] = \cos(8\pi n/31)$, $\omega_1 = 8\pi/31$.
$\frac{8\pi}{31}N_1 = k2\pi$, $k = \frac{4}{31}N_1$, $31k = 4N_1$. Řešením je: $k=4$, $N_1 = 31$.
Srovnání – kdyby byl signál se spojitým časem, základní perioda by byla: $T_1 = \frac{2\pi}{8\pi/31} = \frac{31}{4}$.
Výsledek je jiný — perioda je podstatně kratším protože nemusíme "čekat na celé číslo".



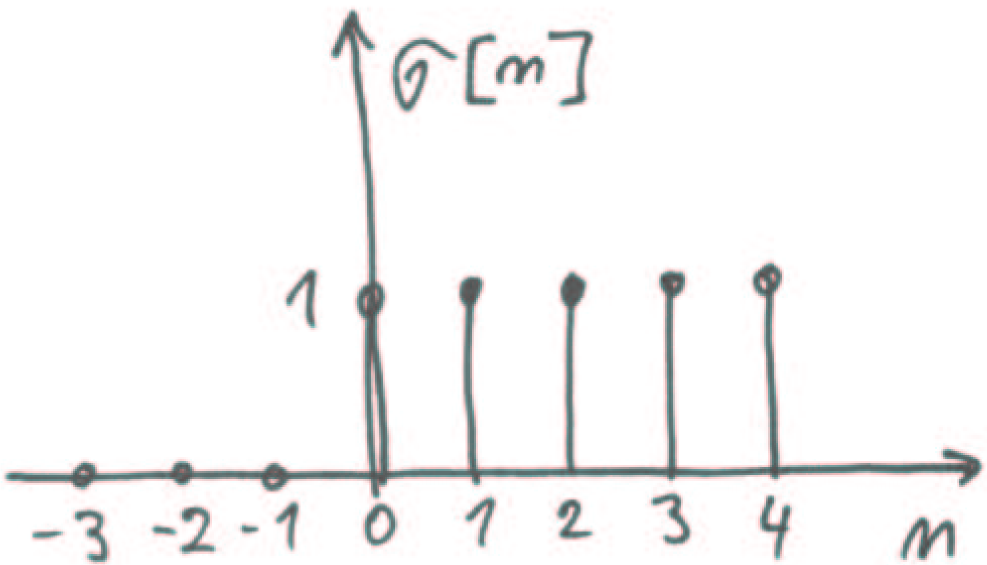
Příklad 3: $s[n] = \cos(n/6)$, $\omega_1 = 1/6$.
$\frac{1}{6}N_1 = k2\pi$, $N_1 = k12\pi$. Řešení neexistuje, signál není periodický (ale vypadá tak :-)
Srovnání – kdyby byl signál se spojitým časem, základní perioda by byla: $T_1 = \frac{2\pi}{1/6} = 12\pi$.
Signál je samozřejmě periodický.

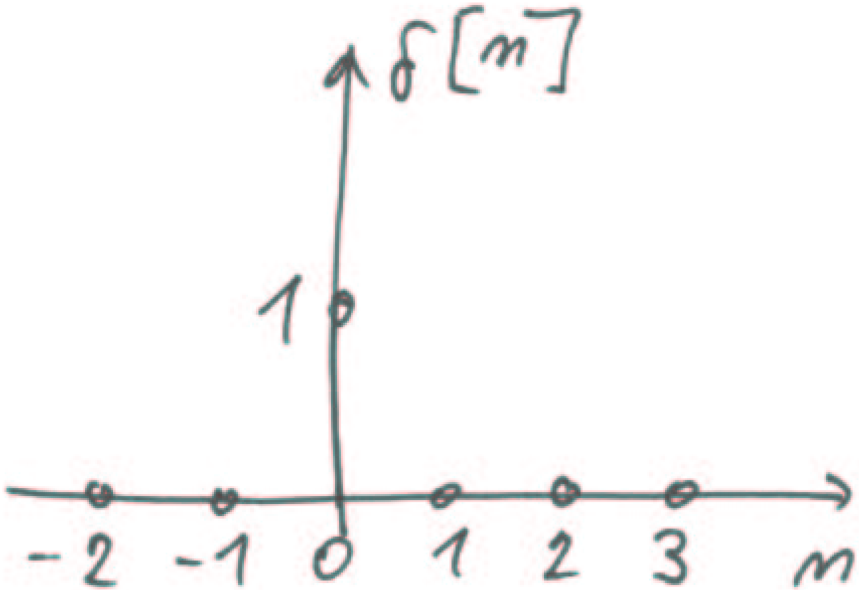


Některé velmi zajímavé a užitečné signály – diskrétní

Jednotkový skok a jednotkový impuls:

$$\sigma[n] = \begin{cases} 1 & \text{pro} \quad n \geq 0 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases} \qquad \delta[n] = \begin{cases} 1 & \text{pro} \quad n = 0 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$$

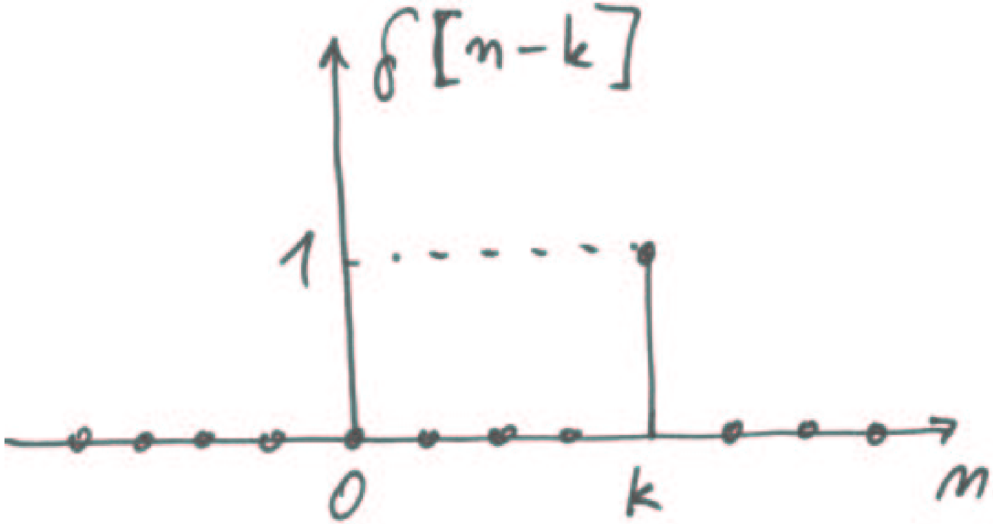




Všimněme si, že jednotkový impuls vznikl **diferencováním** jednotkového skoku:

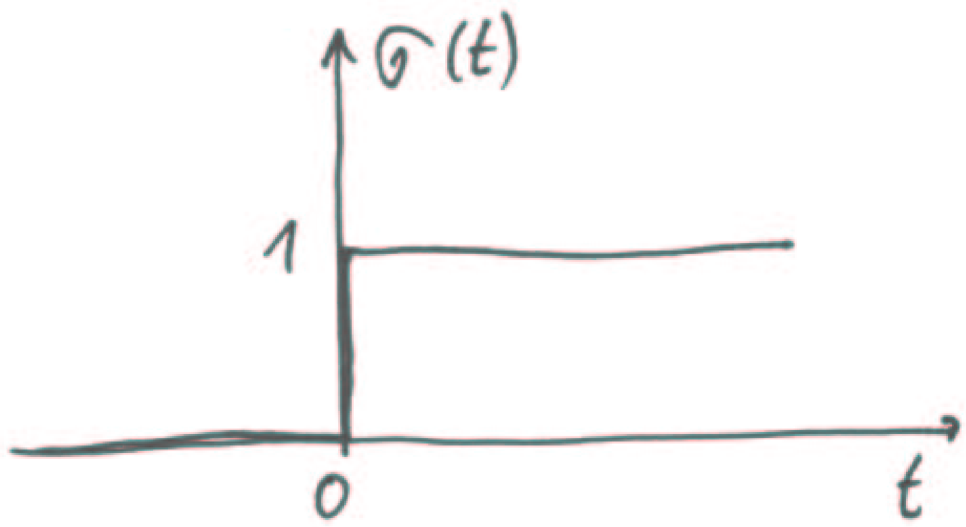
$$\delta[n] = \sigma[n] - \sigma[n-1]$$

Posunutý jednotkový impuls $\delta[n-k]$:



Některé velmi zajímavé a užitečné signály – spojitý čas

Jednotkový skok: $\sigma(t) = \begin{cases} 1 & \text{pro } t \geq 0 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$

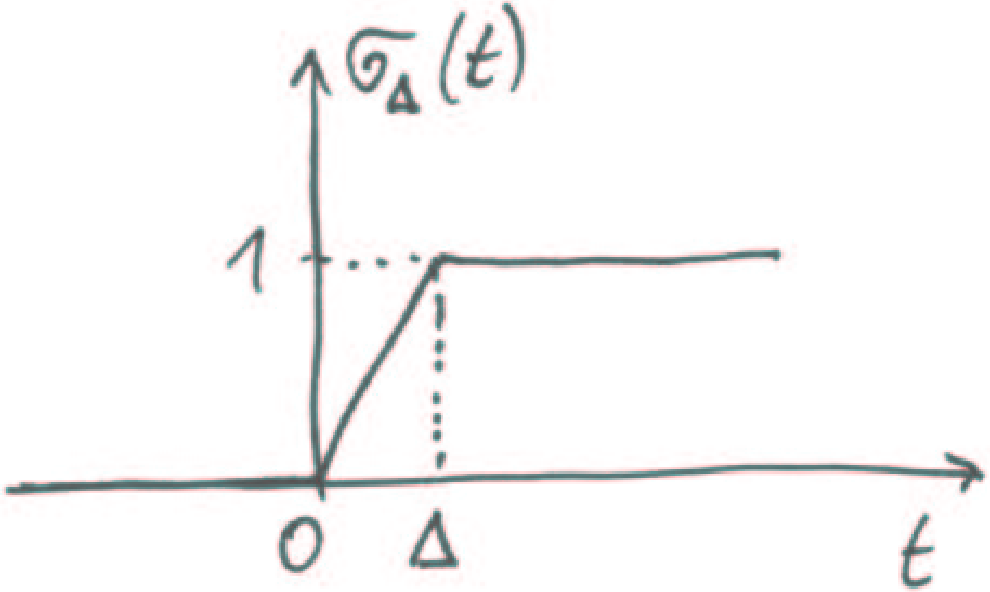


Jednotkový impuls se spojitým časem (Diracův impuls) nadefinujeme jako derivaci jednotkového skoku podle času:

$$\delta(t) = \frac{d\sigma(t)}{dt}.$$

Problémem je, že nevíme, jak derivovat funkci $\sigma(t)$ pro $t = 0$ (nespojitost). Pomůžeme si malým trikem:

$$\delta_\Delta(t) = \frac{d\sigma_\Delta(t)}{dt}.$$



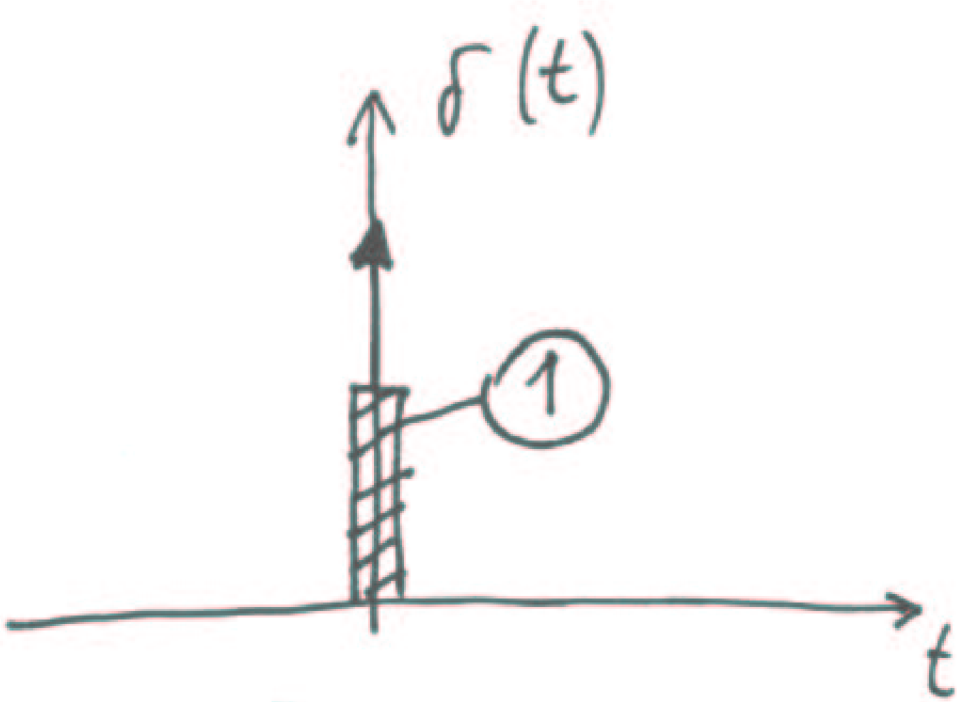
$\sigma_\Delta(t)$ má mezi 0 a Δ směrnici (a tedy i derivaci) $\frac{1}{\Delta}$. Všimněme si, že plocha obdélníčku ohraničeného funkcí $\delta_\Delta(t)$ (tedy její integrál) je rovna 1. Pak budeme Δ zmenšovat limitně až k nule:

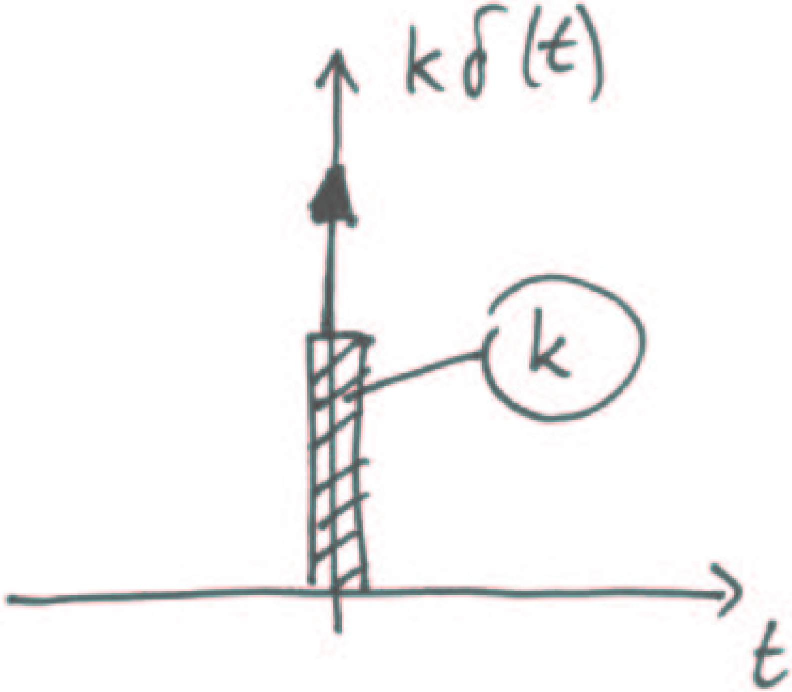
$$\delta(t) = \lim_{\Delta \to 0} \delta_\Delta(t).$$

Plocha jednotkového impulsu je tedy stále jedna, i když jeho hodnota pro $t = 0$ vzroste na ∞:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1.$$

Tuto plochu nazýváme **mocnost** a jednotkový impuls ji změní, pokud jej něčím vynásobíme:





Jednotkové impulsy mají tzv. vzorkovací schopnost, ale o té až příště :-)