Systémy

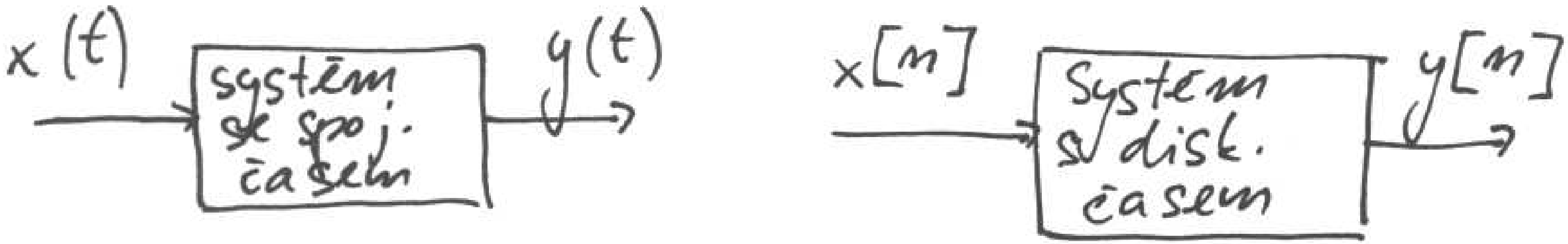
Jan Černocký

ÚPGM FIT VUT Brno, `cernocky@fit.vutbr.cz`

- Vlastnosti lineárních systémů.
- Konvoluce – diskrétní a spojitý čas.
- Vlastnosti konvoluce

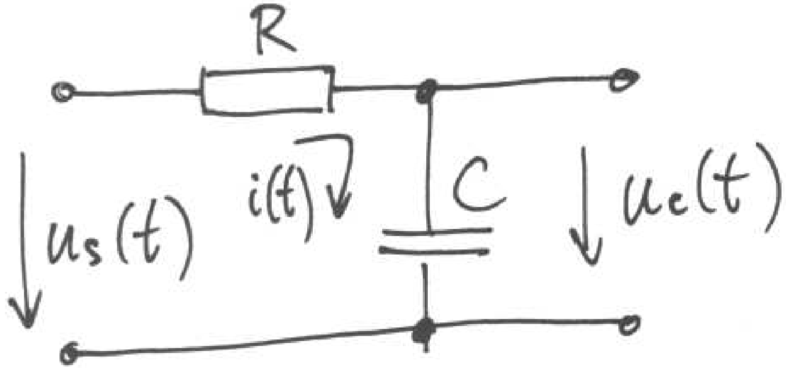
Systémy

- obecně: spojení komponentů, zařízení nebo subsystémů pro zpracování informací nebo povelů (např. řízení auta, rafinérie, populace mravenců v lese, . . .).
- systémy pro nás: zařízení obrábějící, zpracovávající či upravující signály.



Systém se spojitým časem zpracovává signály se spojitým časem, signál $y(t)$ je reakcí na $x(t)$, značíme: $x(t) \rightarrow y(t)$. **Systém s diskrétním časem** zpracovává signály s diskrétním časem, signál $y[n]$ je reakcí na $x[n]$, značíme: $x[n] \rightarrow y[n]$.

Příklad 1 spojitý: elektrický obvod – Chceme znát závislost $u_c(t)$ na $u_s(t)$:



- Proud obvodem: $i(t) = \frac{u_s(t) - u_c(t)}{R}$
- proud kondenzátorem: $i(t) = C\frac{du_c(t)}{dt}$.
- Dáme to dohromady: $\frac{du_c(t)}{dt} + \frac{1}{RC}u_c(t) = \frac{1}{RC}u_s(t)$.

...což je diferenciální rovnice, kterou můžeme vyřešit pro dané $u_s(t)$.

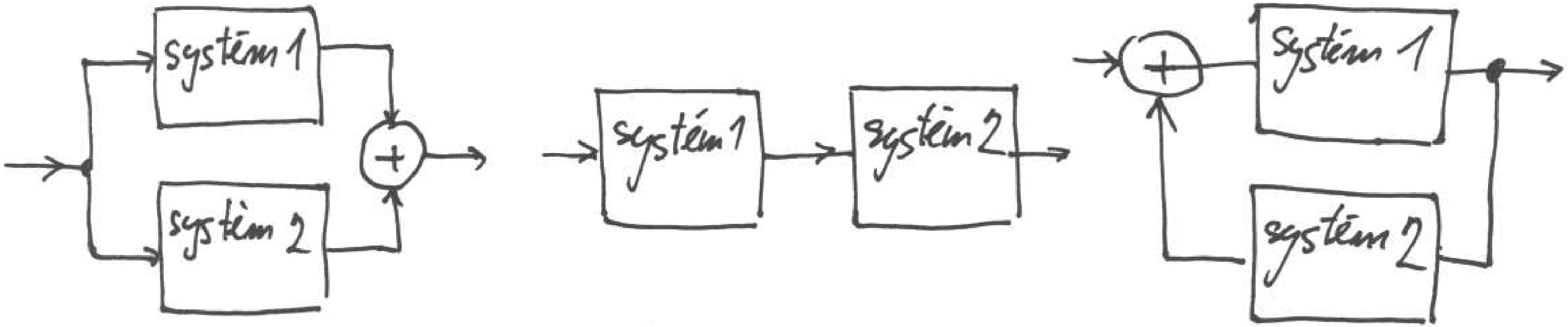
Příklad 2 diskrétní: počet neuronů v mém mozku se každý měsíc snižuje o 0.1% plus o to, kolik jsem za daný měsíc vypil alkoholu:

$$y[n] = 0.999y[n-1] - x[n]$$

Jedná se o tzv. diferenční rovnici, kterou můžeme vyřešit pro daný průběh $x[n]$ a počáteční podmínku $y[0]$ (počet neuronů při narození) a zjistit např, kdy nastane $y[n] = 0$ (tento měsíc končí přednášky ISS :-).

Spojení systémů

paralelní, sériové (kaskádní), zpětnovazební:



ZÁKLADNÍ VLASTNOSTI SYSTÉMŮ

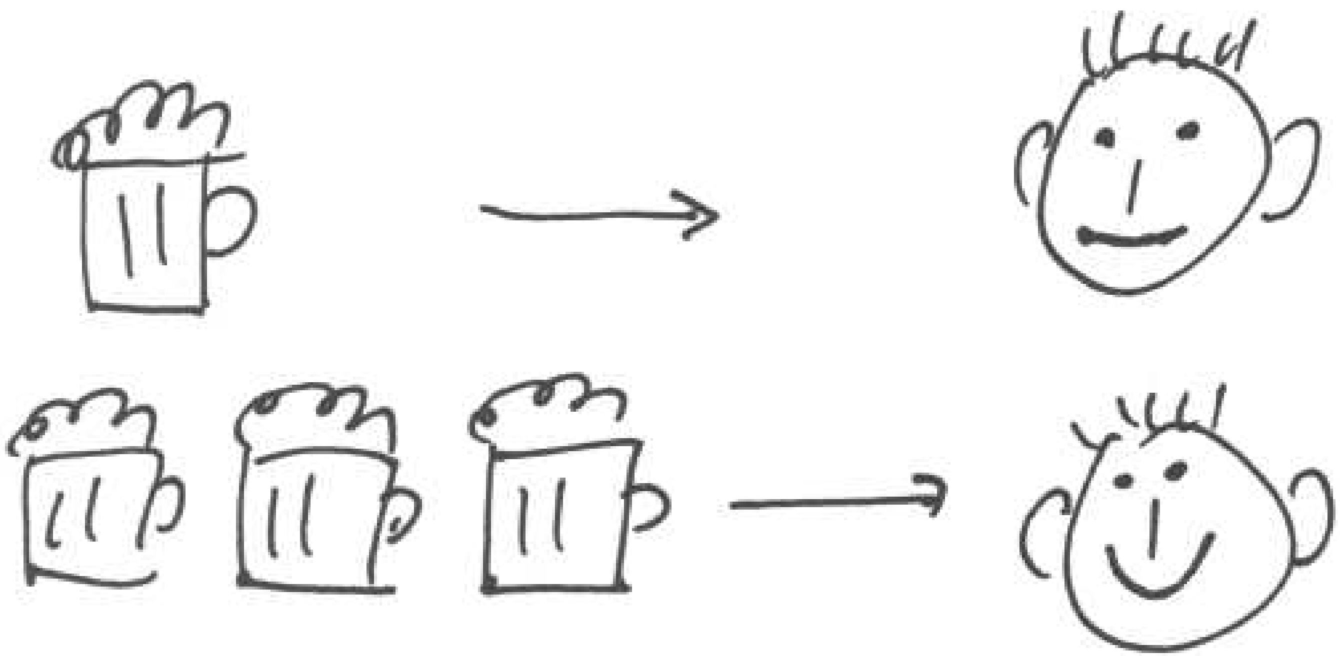
S pamětí / bez paměti

systémy s pamětí jsou schopny udržet (pamatovat si) nějakou předešlou hodnotu/hodnoty. Systémy bez paměti reagují pouze na okamžitou hodnotu vstupu.

Příklady: s pamětí: neurony v mozku (systém si pamatuje předchozí počet neuronů).

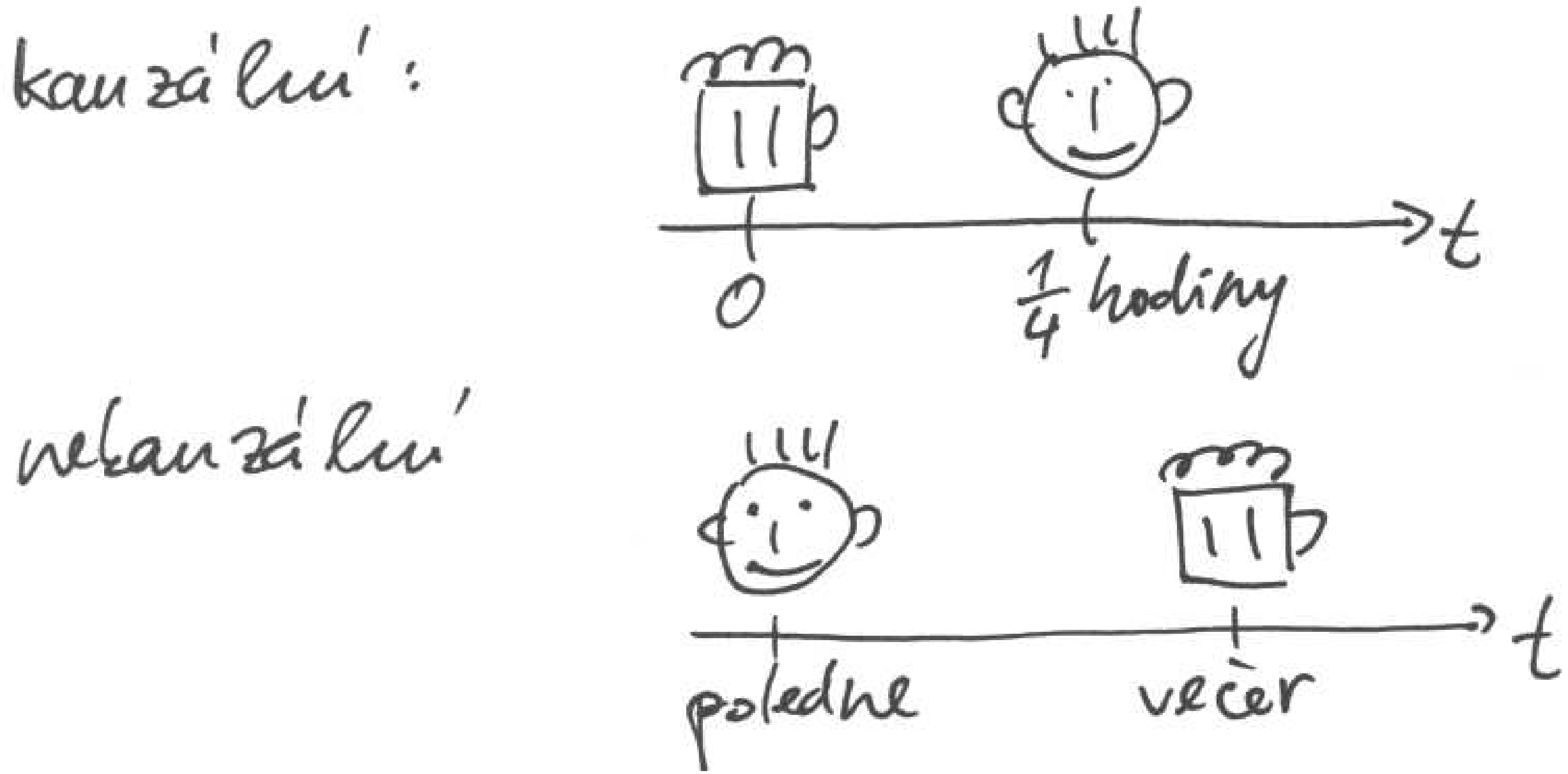
Příklady: bez paměti: $y(t) = Kx(t)$.

Další vlastnosti budeme ukazovat na systému **pití piva**: vstupem je počet vypitých piv, výstupem je velikost úsměvu:



Kauzalita

systém reaguje pouze na současný či minulý vstup. Nesmí "vidět" do budoucnosti. Pivní příklad:



Seriózní příklad – kauzální: $y[n] = x[n] - x[n-1]$.
Seriózní příklad – nekauzální: $y(t) = x(-t)$.

Stabilita

omezený vstup produkuje omezený výstup: můžeme najít taková dvě kladná reálná čísla $B, C < \infty$, že

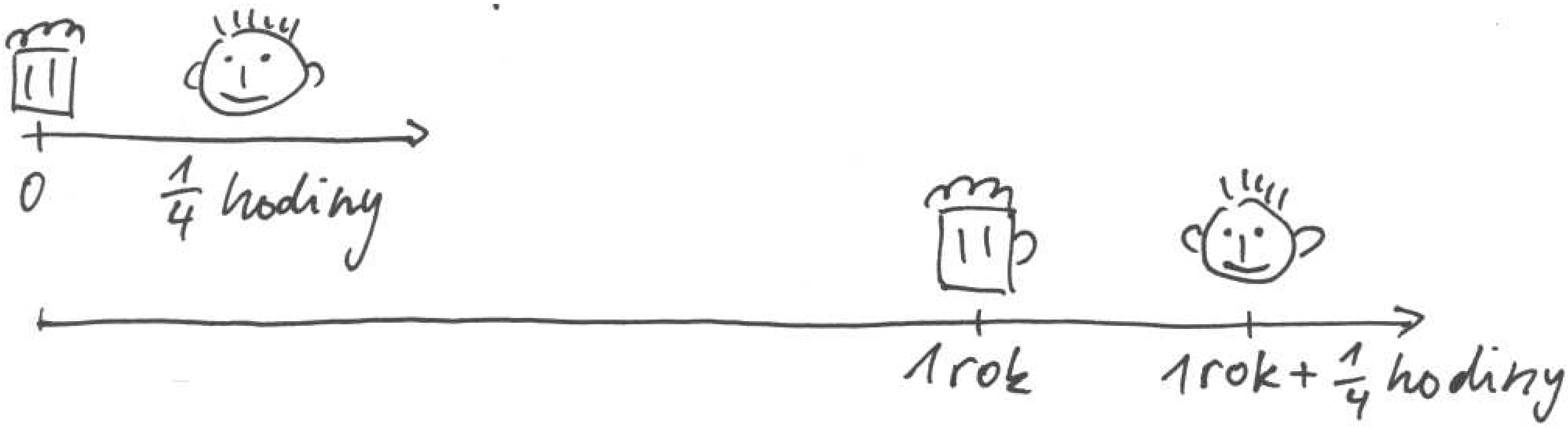
$|x(t)| < B \rightarrow |y(t)| < C \qquad |x[n]| < B \rightarrow |y[n]| < C.$

Příklad 1: $y(t) = tx(t)$. I pro omezený vstup je pro čas $t = \infty$ hodnota $y(t) = \infty$ $\Rightarrow$ nestabilní.

Příklad 2: $y(t) = e^{x(t)}$. Pro omezené $x(t)$ v intervalu $[-B, B]$, je $y(t)$ omezené v $[e^{-B}, e^{+B}]$. Vybereme-li z nich to větší, máme omezení pro výstup $C \Rightarrow$ systém je stabilní.

Časová invariantnost

"Systém nemění své chování v čase" - pokud na signál $x(t)$ zareagoval signálem $y(t)$, na signál $x(t-t_0)$ zareaguje signálem $y(t-t_0)$. Podobně pokud $x[n] \rightarrow y[n]$, tak $x[n-n_0] \rightarrow y[n-n_0]$. Pivní příklad:



Seriózní příklad 1: $y(t) = \sin[x(t)]$. Hledáme-li $y(t-t_0)$, dosadíme modifikovaný čas jako argument funkce: $y(t-t_0) = \sin[x(t-t_0)]$ a tvrzení platí $\Rightarrow$ čas. invariantní.

Seriózní příklad 2: $y[n] = nx[n]$. Najdeme protipříklad, který nevyhovuje "pokud $x[n] \to y[n]$, tak $x[n-n_0] \to y[n-n_0]$" ?
Pokud $x[n] = \delta[n]$ (diskrétní jednotkový impuls), pak $y[n] = 0\ \forall n$. Když vstup posuneme: $x[n-1] = \delta[n-1]$, výstupem bude také $\delta[n-1]$.
Našli jsme tedy taková $x[n] \to y[n]$, pro které $x[n-n_0]$ nemá jako výstup $y[n-n_0]$ $\Rightarrow$systém není invariantní (je proměnný).

Linearita

2 podmínky: předpokládáme, že $x_1(t) \to y_1(t)$ a $x_2(t) \to y_2(t)$.

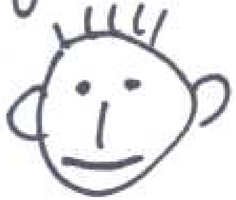
- aditivita: $x_1(t) + x_2(t) \to y_1(t) + y_2(t)$.
- scaling nebo homogenita: $ax_1(t) \to ay_1(t)$.

(obdobně pro diskrétní čas). Můžeme dohromady zapsat jako jedinou podmínku:

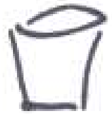
$$\boxed{\begin{array}{l} ax_1(t) + bx_2(t) \to ay_1(t) + by_2(t) \\ ax_1[n] + bx_2[n] \to ay_1[n] + by_2[n] \end{array}}$$

Pivní příklad:

$x_1(t) \longrightarrow y_1(t)$

$x_2(t) \longrightarrow y_2(t)$




$$3x_1(t) + 3x_2(t) \longrightarrow 3y_1(t) + 3y_2(t)$$


lineární

$$\not\longrightarrow 3y_1(t) + 3y_2(t)$$

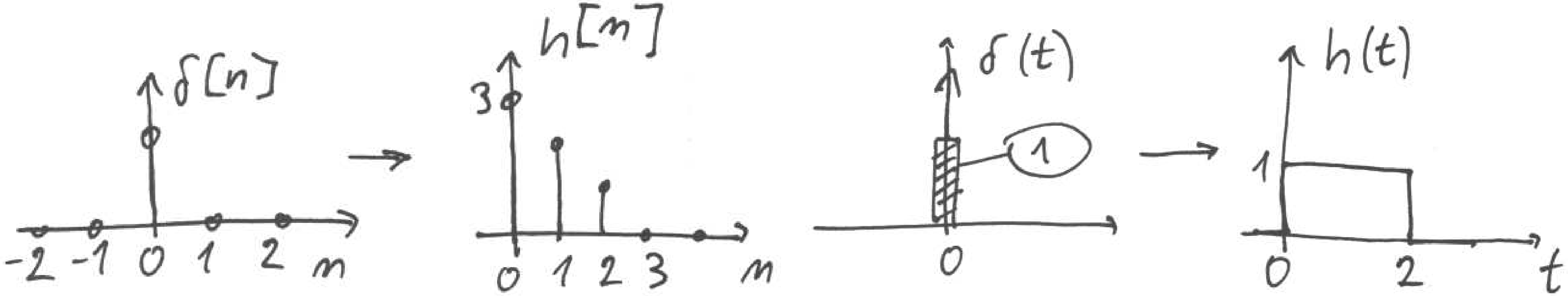
 nelineární

Seriózní příklad: $y(t) = tx(t)$. Pro libovolné $x_1(t)$ a $x_2(t)$ budou výstupy: $y_1(t) = tx_1(t)$ a $y_2(t) = tx_2(t)$. Vyrobíme $x_3(t) = ax_1(t) + bx_2(t)$. Výstup:
$y_3(t) = tx_3(t) = t[ax_1(t) + bx_2(t)] = tax_1(t) + tbx_2(t) = ay_1(t) + by_2(t)$. Je to lineární.

Linearita bude mít velký význam při analýze systémů: všechny vstupní signály budeme totiž rozkládat na jednotlivé impulsy, necháme je projít systémem. V případě, že je systém lineární, můžeme pak výstupní signál získat **součtem** reakcí na jednotlivé impulsy!

LTI SYSTÉMY

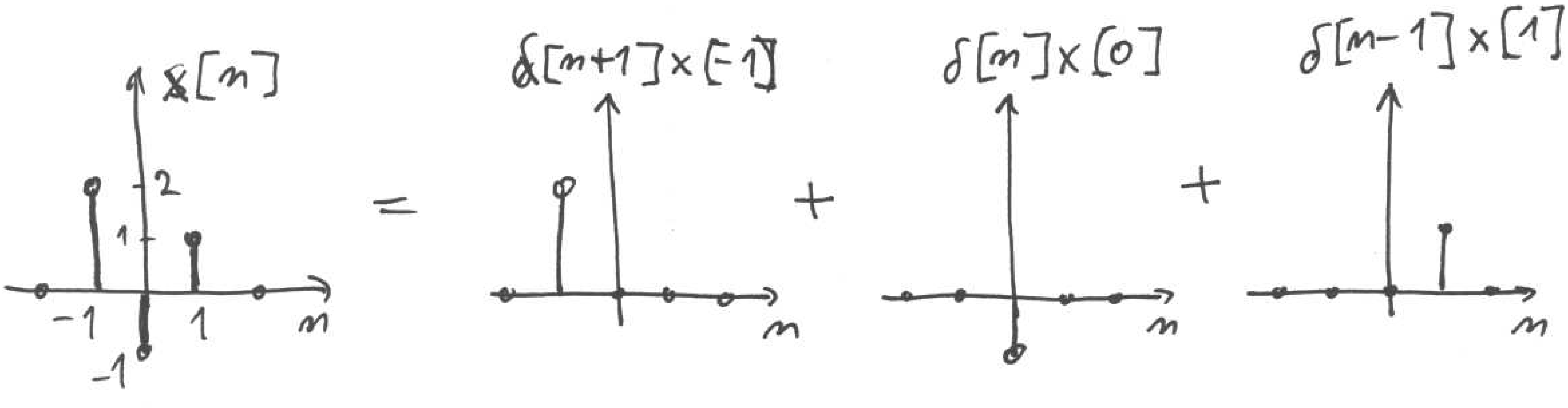
- lineární, časově invariantní (linear, time-invariant).
- nejdůležitější charakteristika těchto systémů je **impulsní odezva** - “jak systémy reagují na jednotkový impuls?”



Zajímá nás ovšem odezva systému na **obecné signály** $x(t)$ nebo $x[n]$, nejen na jednotkové impulsy. Určíme ji tak, že obecné signály na jednotkové impulsy **rozložíme**, spustíme s nimi několik impulsních odezev a pak zase sečteme!

Rozklad disk. signálu na jednotkové impulsy

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n-k].$$



Reakci systému na posunutý jednotkový impuls $\delta[n-k]$ označíme $h_k[n]$. Je-li systém časově invariantní (a žádné jiné nás momentálně nezajímají), pak jsou všechny $h_k[n]$ stejné jako základní $h[n]$, pouze časově posunuté: $h_k[n] = h[n-k]$.

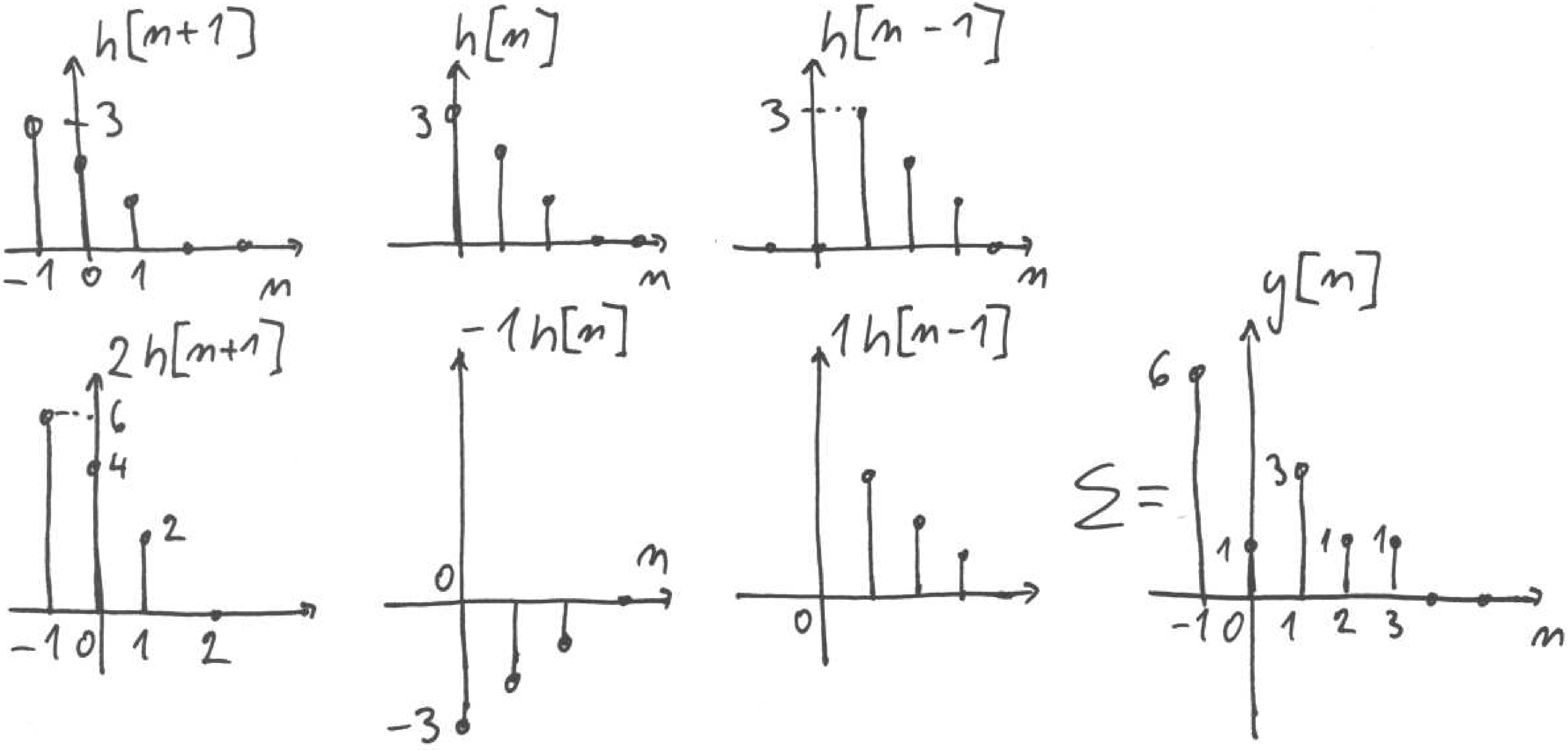
Každý posunutý jednotkový impuls $x[k]\delta[n-k]$ odstartuje "svou" $h[n-k]$ a vynásobí ji svou velikostí. Vše se pak musí sečíst (linearita!), abychom dostali výsledek:

$$\boxed{y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k]}$$

Tento vztah se nazývá **konvoluční suma, krátce konvoluce**; zapisujeme:

$$\boxed{y[n] = x[n] \star h[n]}$$

Příklad pro výše definované $h[n]$ a $x[n]$:



Na konvoluci se můžeme dívat také tak, že pod signál pro výpočet každého výstupního vzorku $y[n]$ pod signál “přiložíme” obrácenou a patřičně posunutou impulsní odezvu, vzorky nad sebou vynásobíme a sečteme:

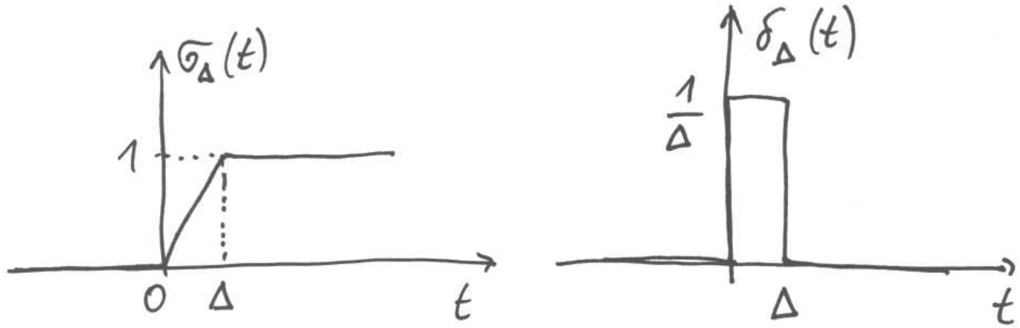
k	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	y[n]
x[k]	0	0	0	0	2	-1	1	0	0	0	0	
n=-2	0	1	2	3	0	0	0	0	0	0	0	0
n=-1	0	0	1	2	3	0	0	0	0	0	0	6
n= 0	0	0	0	1	2	3	0	0	0	0	0	1
n= 1	0	0	0	0	1	2	3	0	0	0	0	3
n= 2	0	0	0	0	0	1	2	3	0	0	0	1
n= 3	0	0	0	0	0	0	1	2	3	0	0	1
n= 4	0	0	0	0	0	0	0	1	2	3	0	0

Konvoluce se velmi dobře předvádí s proužky papíru:

- napište si na papír $x[n]$ a $h[n]$, nezapomeňte u obou poznačit, kde je $n = 0$.
- obraťte $h[n]$, sesaďte časy $n = 0$. Právě jste dostali $h[-k]$.
- pokud nyní vynásobíte vzorky nad sebou a sečtete, dostanete výsledek $y[0]$. Pro další kladná n posouvejte $h[-k]$ doprava.

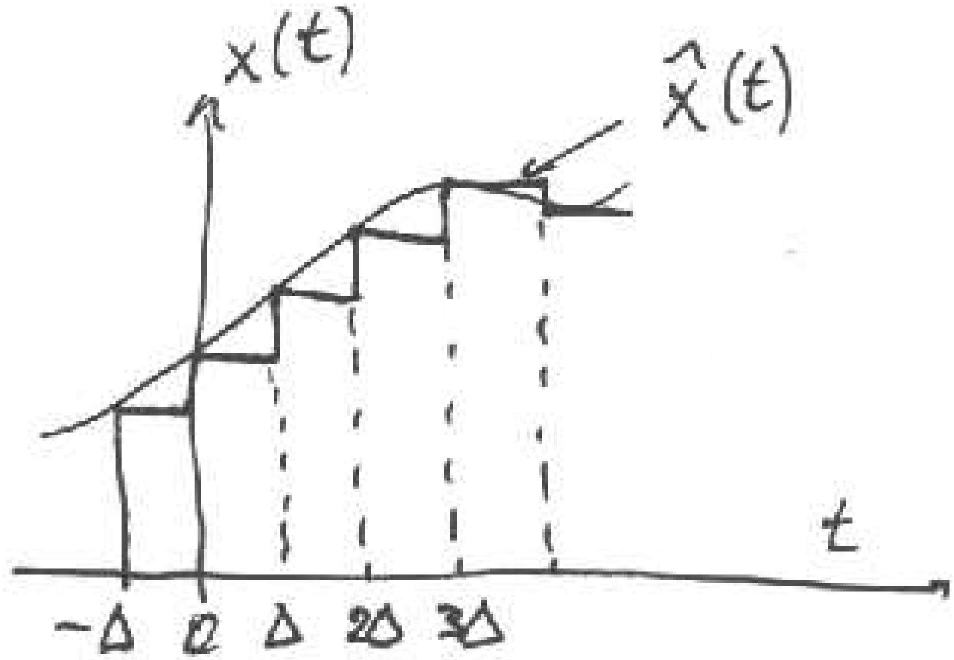
budeme chtít podobným způsobem zapsat signál jako sadu impulsů. Jak to ale udělat, když je signál *spojitý* ? Opět nám pomůže pomocná funkce $\delta_\Delta(t)$ s šířkou Δ a výškou $\frac{1}{\Delta}$ a silný svěrák.

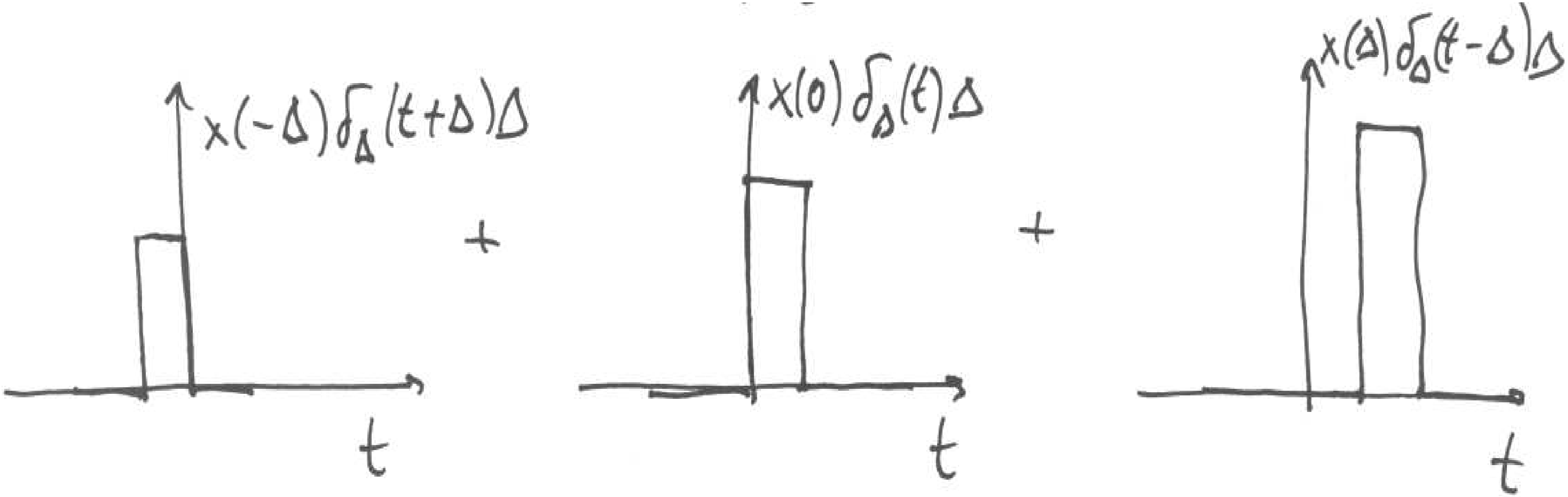
$$\delta_\Delta(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta} & \text{pro } \; 0 \leq t \leq \Delta \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$$



Pokud bude Δ dostatečně malé, můžeme signál aproximovat jako sumu posunutých a vynásobených $\delta_\Delta(t)$. Aby se $\hat{x}(t)$ dostal do stejné "výšky" jako původní $x(t)$, nesmíme zapomenout na násobení každého impulsu hodnotou Δ:

$$\hat{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)\delta_\Delta(t - k\Delta)\Delta.$$


x(t)
x̂(t)
t
−Δ
0
Δ
2Δ
3Δ

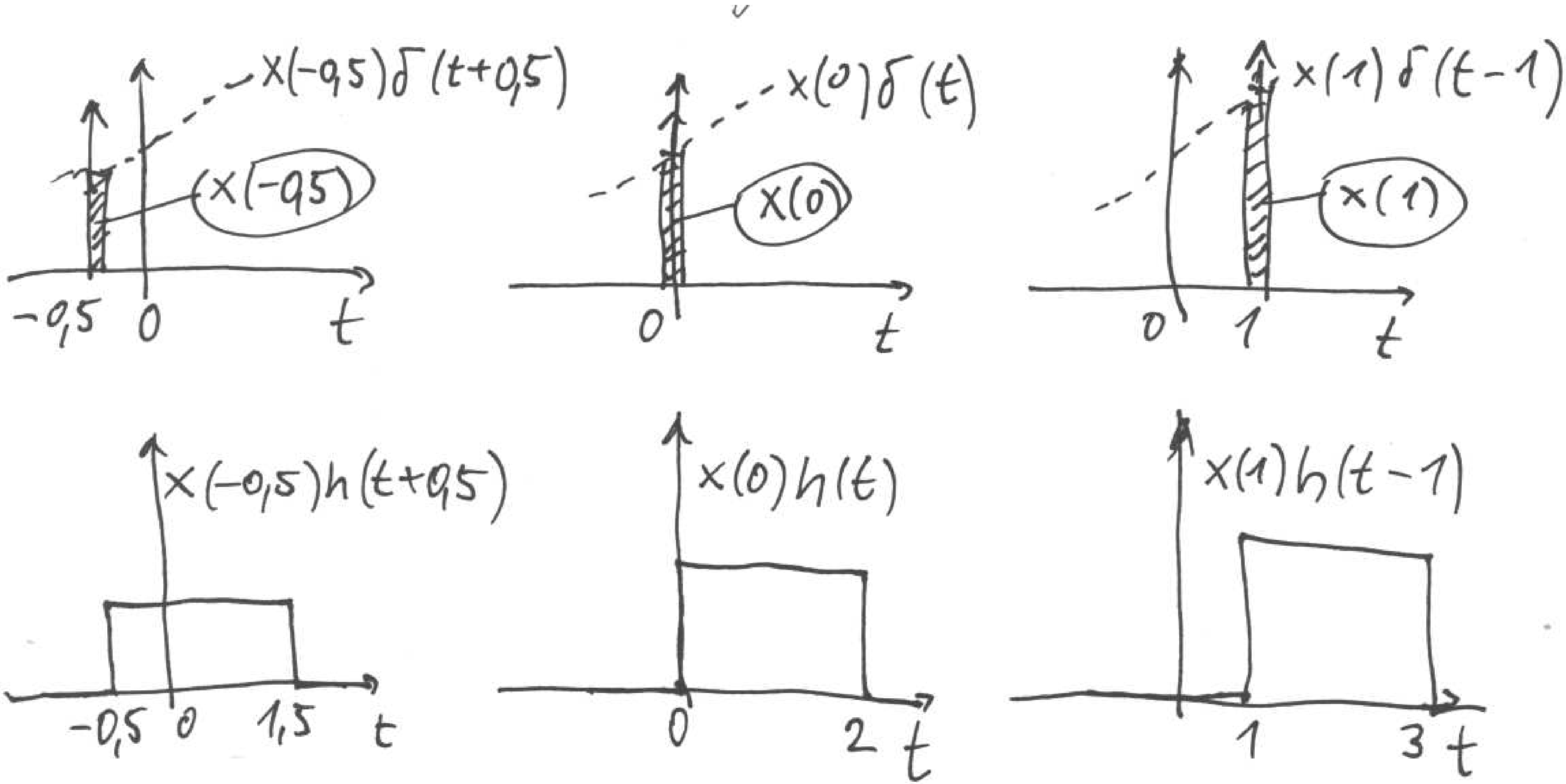

x(−Δ)δ_Δ(t+Δ)Δ
t
+
x(0)δ_Δ(t)Δ
t
+
x(Δ)δ_Δ(t−Δ)Δ
t

Budeme-li nyní Δ stlačovat svěrákem až k 0, z $\delta_\Delta(t)$ se stane $\delta(t)$ a suma přejde na integrál. $\hat{x}(t)$ už nebude aproximace, takže vynecháme stříšku:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau.$$

Každý impuls $x(\tau)\delta(t-\tau)$ ovšem vybudí impulsní odezvu systému:

$$\delta(t) \to h(t), \quad \delta(t-\tau) \to h(t-\tau), \quad x(\tau)\delta(t-\tau) \to x(\tau)h(t-\tau)$$



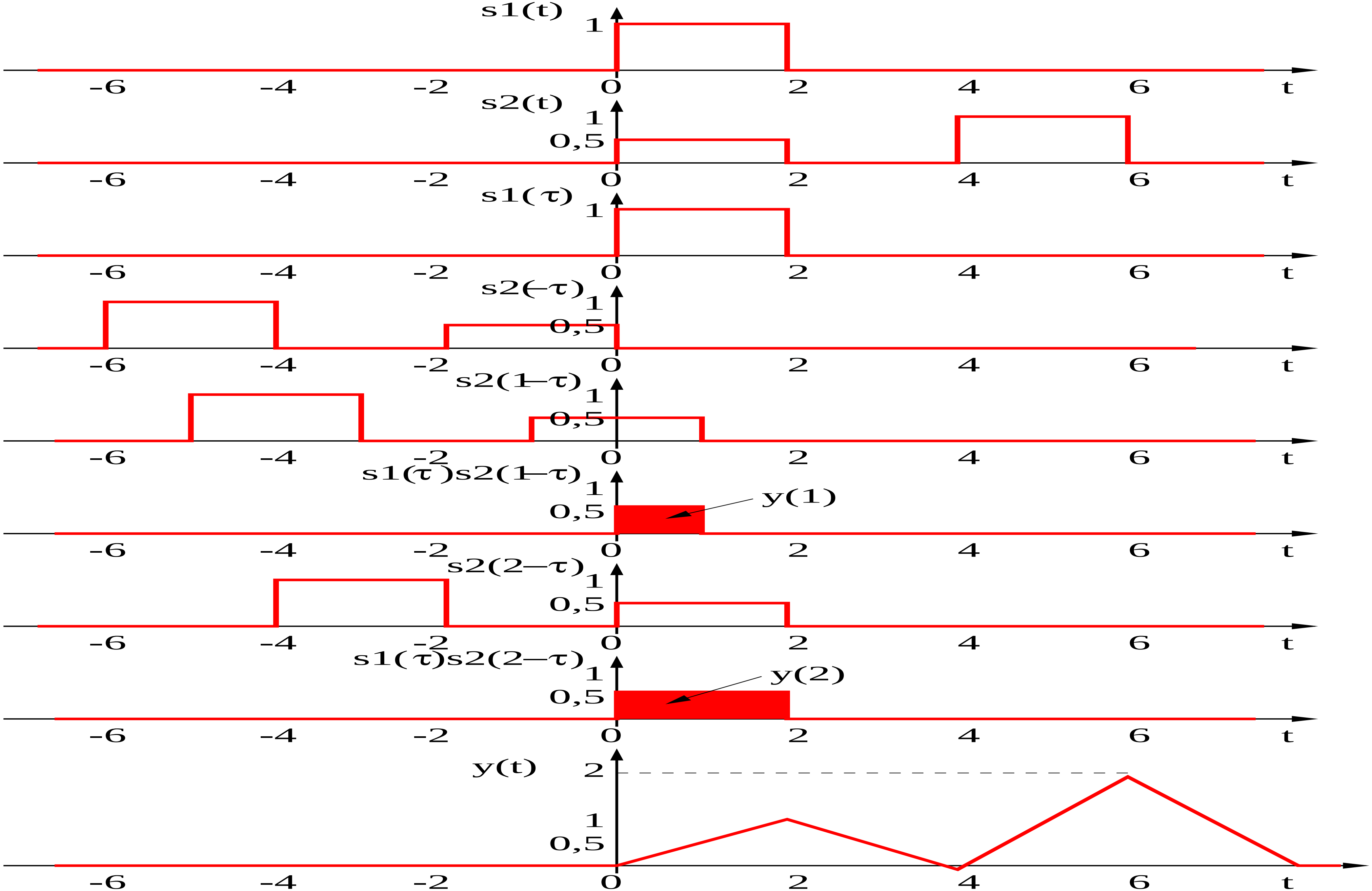
Lineární systém všechny takové odezvy sečte (integruje) přes všechna τ a dostaneme celkový výstup:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau.$$

Tento vztah se nazývá **konvoluční integrál**, zapisujeme: $y(t) = x(t) \star h(t)$.

Interpretace konvolučního integrálu:

- potřebujeme spočítat výstup pro nějaké t.
- Definujeme τ jako pomocnou časovou proměnnou, přes kterou se bude integrovat. $x(\tau)$ vypadá stejně jako $x(t)$ (přejmenováním osy se nic nezmění).
- $h(t - \tau)$ bude **otočené** a **posunuté** do času t.
- Pronásobíme, spočítáme integrál (když to jde, změříme plochu pod funkcí $x(\tau)h(t - \tau)$) a máme **jednu hodnotu** výstupu pro čas t.
- Goto 1, pro další čas t.


s1(t)
s2(t)
s1(τ)
s2(−τ)
s2(1−τ)
s1(τ)s2(1−τ)
y(1)
s2(2−τ)
s1(τ)s2(2−τ)
y(2)
y(t)
t
-6
-4
-2
0
2
4
6
0,5
1

Konvoluce – shrnutí

$$y[n] = x[n] \star h[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k]$$

$$y(t) = x(t) \star h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau.$$

VLASTNOSTI KONVOLUCE

Komutativita:

$$y[n] = x[n] \star h[n] = h[n] \star x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]x[n-k]$$

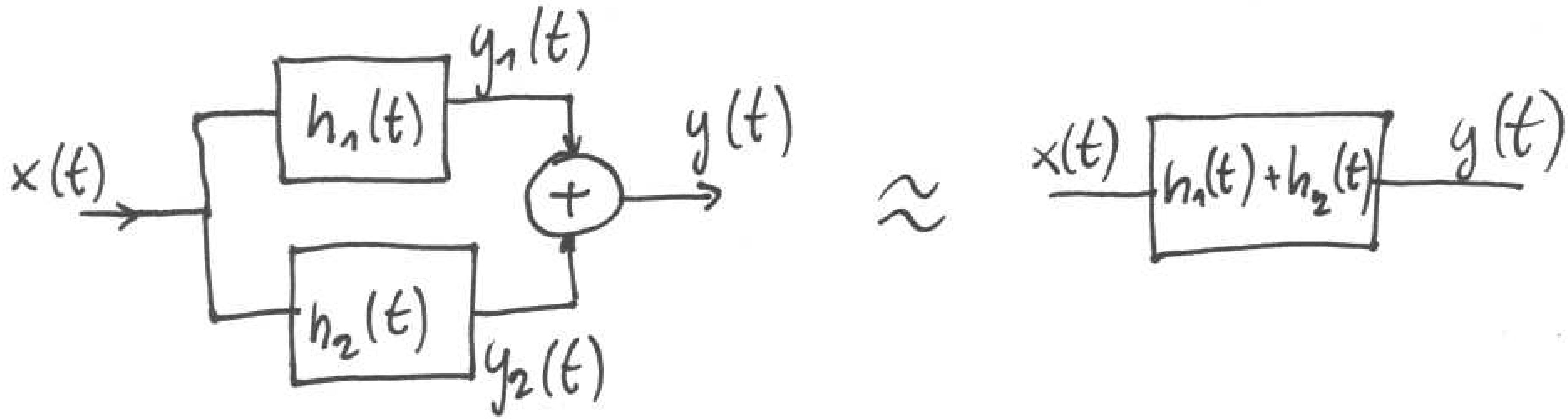
$$y(t) = x(t) \star h(t) = h(t) \star x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau.$$

Při počítání můžeme tedy buď "zmrazit" vstupní signál a otočit a posouvat imp. odezvu, nebo to udělat naopak.

Distributivita – paralelní spojení systémů:

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) = x(t) \star h_1(t) + x(t) \star h_2(t) = x(t) \star [h_1(t) + h_2(t)].$$

Systém má celkovou imp. odezvu $h(t) = h_1(t) + h_2(t)$.



Ověření:

$$\int x(\tau)h_1(t-\tau)d\tau + \int x(\tau)h_2(t-\tau)d\tau = \int x(\tau)[h_1(t-\tau)+h_2(t-\tau)]d\tau = x(t)\star[h_1(t)+h_2(t)],$$

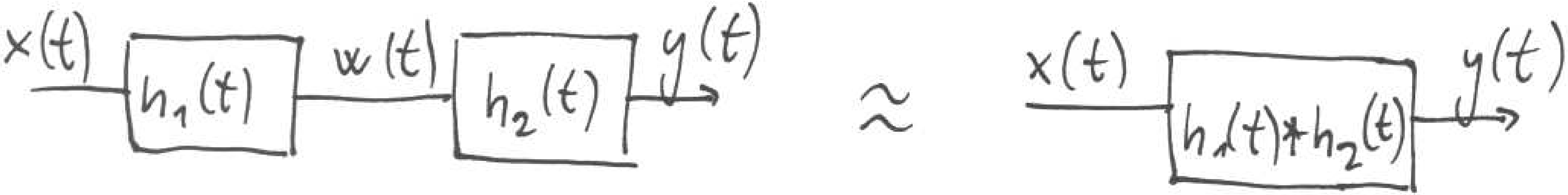
protože $\int$ je lineární operace. Podobně pro diskrétní:

$$y[n] = x[n] \star [h_1[n] + h_2[n]].$$

Asociativita – sériové spojení systémů:

$$y(t) = [x(t) \star h_1(t)] \star h_2(t) = x(t) \star [h_1(t) \star h_2(t)].$$

Systém má celkovou imp. odezvu $h(t) = h_1(t) \star h_2(t)$.



Ověření:

$$y(t) = \int_v \left[\int_\tau x(\tau) h_1(v-\tau) d\tau \right] h_2(t-v) dv = \int_v \int_\tau x(\tau) h_1(v-\tau) h_2(t-v) d\tau dv =$$

$$= \text{přehození pořadí integrace} = \int_\tau \int_v x(\tau) h_1(v-\tau) h_2(t-v) dv d\tau =$$

$$\int x(\tau) \left[\int_v h_1(v-\tau) h_2(t-v) dv \right] d\tau = \dots$$

Ve vnitřním integrálu změníme proměnnou: $v = g + \tau$ a využijeme toho, že:

$\int_g h_1(g)h_2(t-\tau-g)dg = h(t-\tau)$ takže výsledek je:

$$\ldots = x(t)[h_1(t) \star h_2(t)].$$

Podobně pro diskrétní systémy:

$$y[n] = x[n] \star [h_1[n] \star h_2[n]].$$

Systémy s pamětí a bez :

Bez paměti: impulsní odezva má jen 1 impuls pro čas 0: $h[0] = K\delta[n]$, takže:

$$y[n] = x[n] \star h[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]K\delta[n-k] = Kx[n].$$

$h(t) = K\delta(t)$, takže: $y(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)K\delta(t-\tau)d\tau = Kx(t).$

Zvláštním případem systému bez paměti je identita (drát):

$$h[n] = \delta[n]$$

$$h(t) = \delta(t).$$

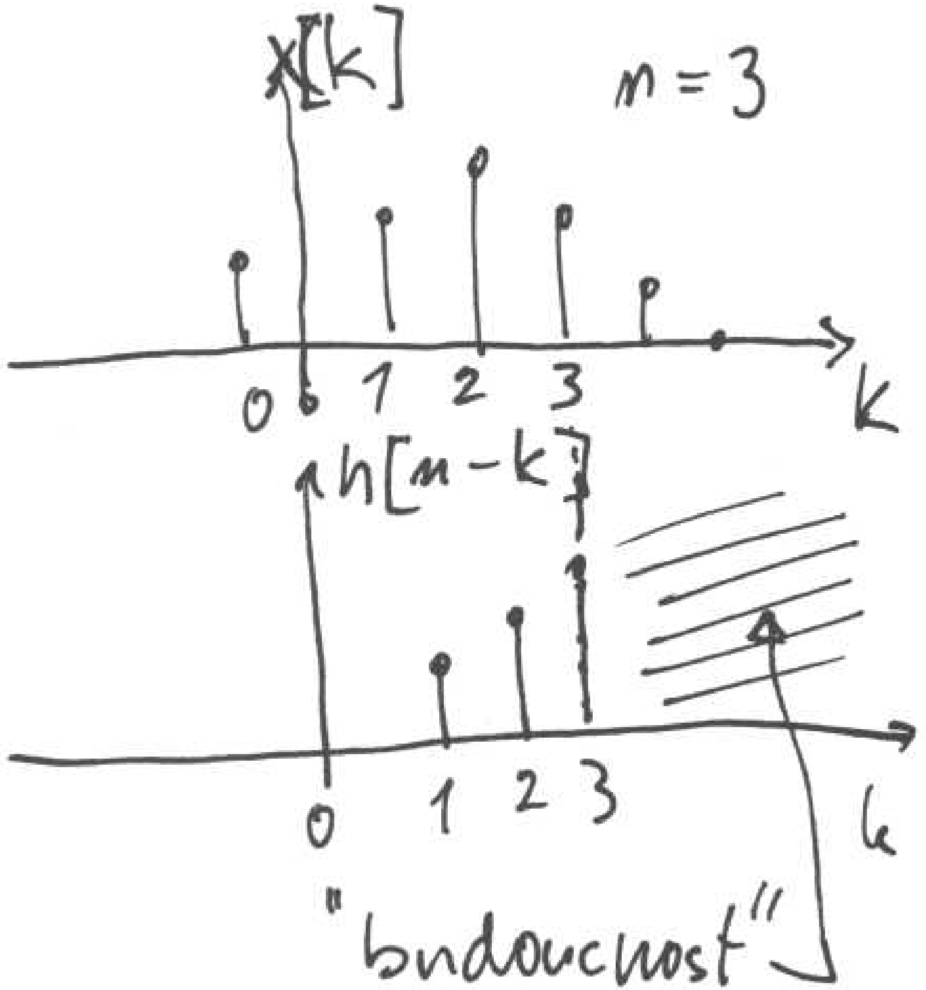
Kauzalita:

Systém nesmí "vidět do budoucna". Pro výpočet n-tého vzorku se smí použít jen vzorky $< n$. Pro výpočet t-tého času se smí použít jen časy $< t$. Toto je splněno, když:

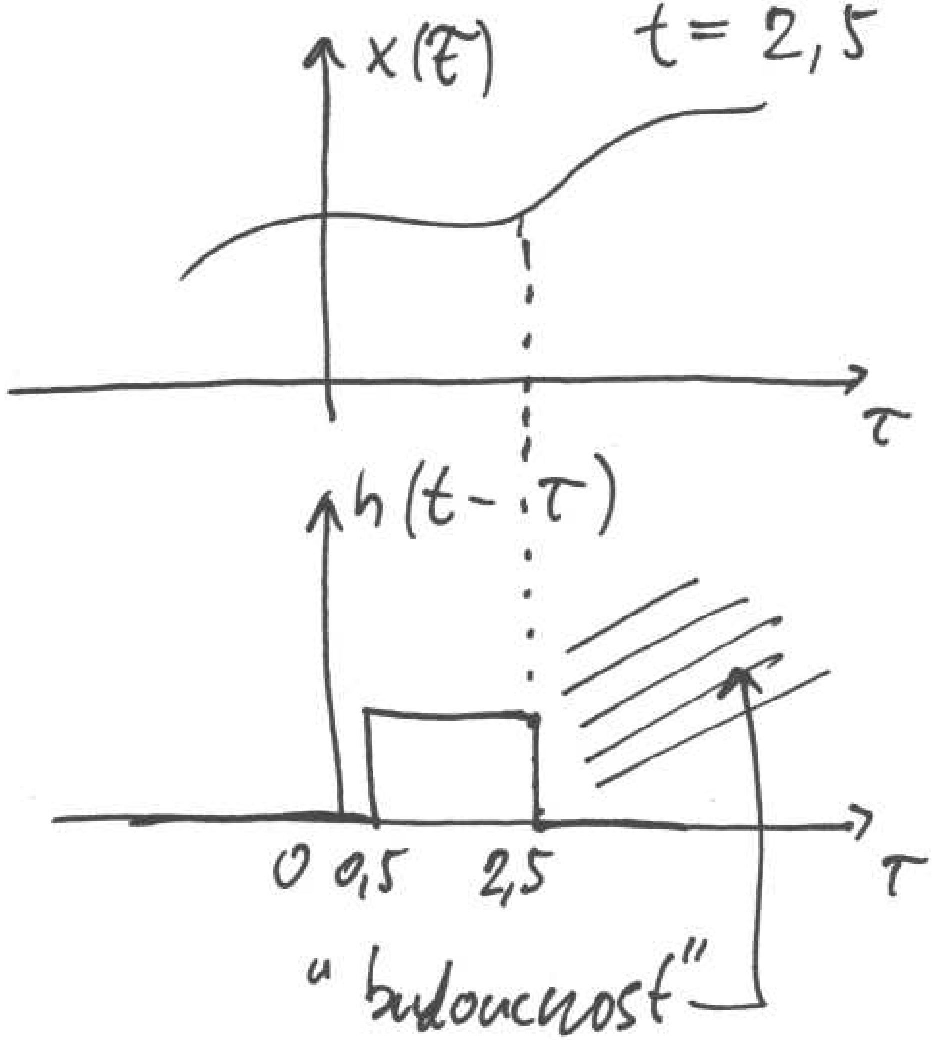
$$h[n] = 0 \text{ pro } n < 0$$

$$h(t) = 0 \text{ pro } t < 0$$

Malé opakování, jak se konvoluuje, otočená a posunutá imp. odezva nesmí zasahovat za čas n nebo t!.



x[k]
n = 3
0
1 2 3
k
h[n-k]
0 1 2 3
k
"budoucnost"



x(τ)
t = 2,5
τ
h(t-τ)
0 0,5 2,5
τ
"budoucnost"

U konvoluční sumy a integrálu můžeme v případě kauzálního systému omezit meze na:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] \rightarrow \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]h[n-k], \qquad \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]x[n-k] \rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} h[k]x[n-k]$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \rightarrow \int_{-\infty}^{t} x(\tau)h(t-\tau)d\tau,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau \rightarrow \int_{0}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau.$$

Stabilita:
"pokud je vstup omezený, výstup by měl být také nějak omezený..." Splněno, pokud je imp. odezva absolutně sumabilní/integrabilní (terminologie ?):

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[k]| < \infty, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|dt < \infty.$$