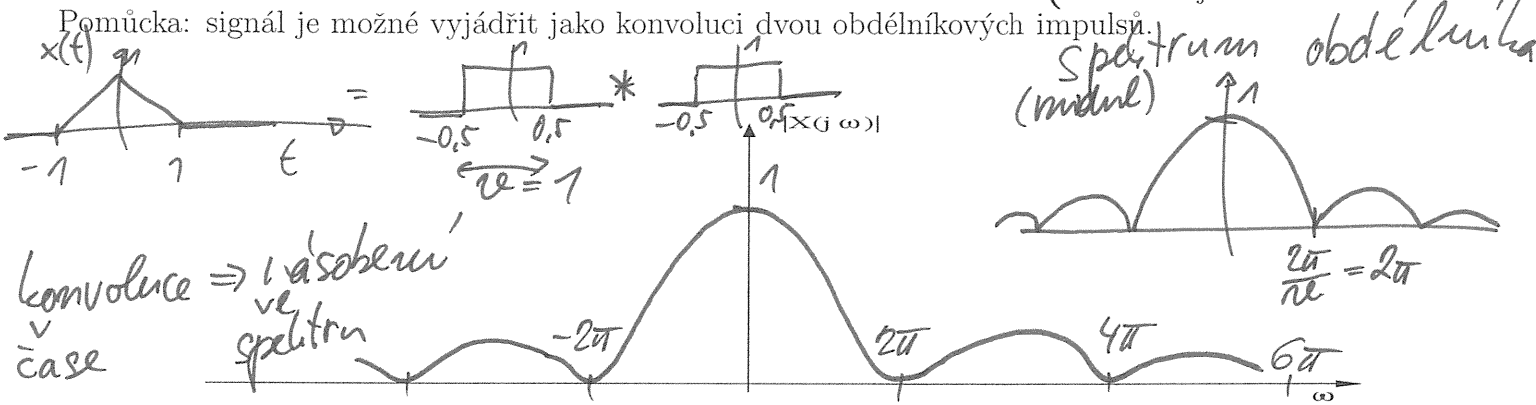


Login: Příjmení a jméno: Podpis:
(čitelně!)

Příklad 1 Nakreslete modul spektrální funkce $X(j\omega)$ signálu $x(t) = \begin{cases} t+1 & \text{pro } t \in [-1, 0] \\ -t+1 & \text{pro } t \in [0, 1] \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$



Příklad 2 Hodnota spektrální funkce $X(j\omega)$ signálu $x(t)$ na frekvenci $\omega_1 = 10\pi$ rad/s je $X(j\omega_1) = 1 + j$. Určete hodnotu spektrální funkce $Y(j\omega)$ posunutého signálu $y(t) = x(t - 0.05)$ na stejné frekvenci $\omega_1 = 10\pi$ rad/s.

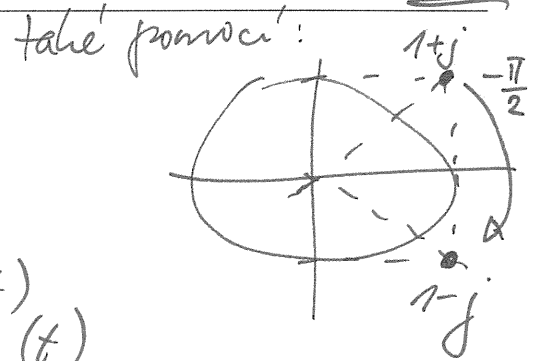
$$Y(j\omega_1) = X(j\omega_1) \cdot e^{-j\omega_1 t} = (1+j) \cdot e^{-j10\pi \cdot 0,05} = (1+j) e^{-j\frac{\pi}{2}} = (1+j)(-j) = 1-j$$

Příklad 3 Systém je popsán tzv. "step" funkcí:

$$y(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x(t) < 0 \\ 1 & \text{pro } x(t) \geq 0 \end{cases}$$

Určete, zda je systém lineární.

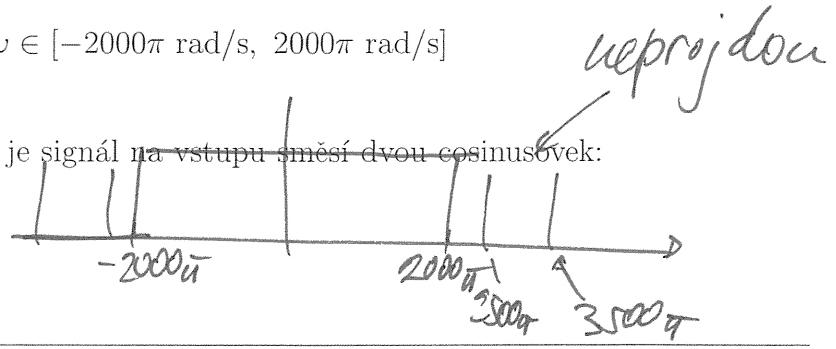
JE / NENÍ:
staci např. vyzkoušet, že
nepřítí: $x(t) \rightarrow y(t)$
 $2x(t) \rightarrow 2y(t)$



Příklad 4 Systém se spojitým časem je ideální dolní propuště s frekvenční charakteristikou:

$$H(j\omega) = \begin{cases} 1 & \text{pro } \omega \in [-2000\pi \text{ rad/s}, 2000\pi \text{ rad/s}] \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$$

Určete signál $y(t)$ na výstupu systému, pokud je signál na vstupu směsí dvou cosinusůvek:
 $x(t) = \cos(2500\pi t) + \cos(3500\pi t)$



$y(t) = \dots$

Příklad 5 Chování systému se spojitým časem je popsáno diferenciální rovnicí

$$0.2 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = 0.5 \frac{dx(t)}{dt} + x(t)$$

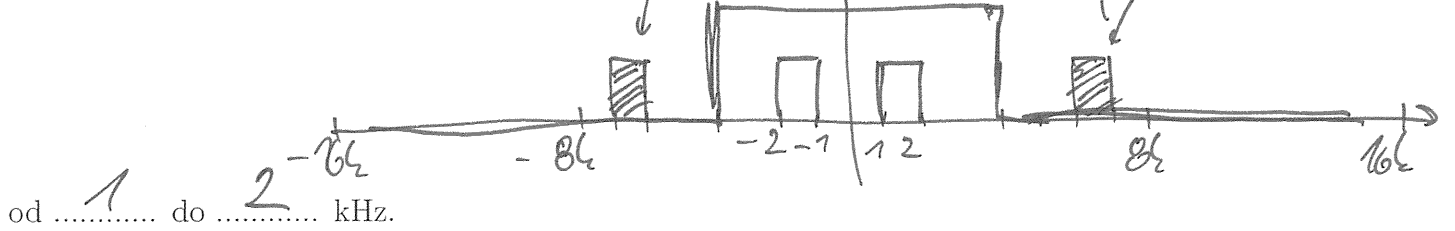
Napište jeho přenosovou funkci.

$$0,2s Y(s) + Y(s) = 0,5s X(s) + X(s)$$

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{0,5s + 1}{0,2s + 1}$$

$$H(s) = \frac{0,5s + 1}{0,2s + 1}$$

Příklad 6 Zvuk marťanského létajícího talíře má výrazné zastoupení frekvencí od 6 do 7 kHz. V jakém intervalu frekvencí marťanský talíř uslyšíme, pokud bude zvuk ideálně vzorkován na vzorkovací frekvenci $F_s = 8000$ Hz bez anti-aliasingu a poté ideálně rekonstruován? *původní*



od do kHz.

Příklad 7 Určete, zda sečtením komplexních exponenciál

$$x_1[n] = \frac{1}{2} e^{-j\frac{\pi}{2}} e^{j\frac{2\pi}{1000}n} \quad \text{a} \quad x_2[n] = \frac{1}{2} e^{j\frac{\pi}{2}} e^{-j\frac{2\pi}{1000}n}$$

vznikne reálný signál.

komplex. sdružení
také 'komplex. sdružení'

ANO / NE: ANO

Příklad 8 Vypočítejte a do tabulky doplňte kruhovou konvoluci dvou signálů s diskretním časem o délce $N = 4$:

n	0	1	2	3
$x_1[n]$	4	0	1	2
$x_2[n]$	1	2	1	2
$x_1[n] \otimes x_2[n]$	9	12	9	12

Příklad 9 Diskrétní Fourierova transformace (DFT) byla počítána na $N = 1024$ vzorcích diskretního signálu, který byl získán vzorkováním na $F_s = 8000$ Hz. Na který koeficient $X[k]$ se budeme dívat, chceme-li zjistit přítomnost frekvenční složky na $f_1 = 5$ kHz v původním signálu? Pokud řešení neexistuje, napište "NEJDE".

leží za polovicou F_s , není splněn vzorč. teorém

$k =$ NEJDE

Příklad 10 Diskrétní signál o délce $N = 4$ má tyto vzorky:

n	0	1	2	3
$x[n]$	1	0	0	-1

Určete daný koeficient $X[k]$ jeho diskretní Fourierovy transformace.

$$X[3] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{j\frac{2\pi}{N}3n} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{j\frac{3}{2}\pi n} = 1 \cdot 1 + (-1)(-j) = \underline{1+j}$$

Příklad 11 Určete, jaké vlastnosti bude mít Fourierova transformace s diskrétním časem (DTFT) $\tilde{X}(e^{j\omega})$ signálu $x[n] = \begin{cases} 1 & \text{pro } n = 4 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$

$$\tilde{X}(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n} = 1 \cdot e^{-j\omega 4}$$

toto nemůže být reálné!

Reálná: ANO/NE
 Periodická s normovanou kruhovou frekvencí 2π : ANO/NE
 Spojitá: ANO/NE
 Bude platit: $\tilde{X}(e^{j\omega}) = \tilde{X}^*(e^{-j\omega})$: ANO/NE

Příklad 12 Určete impulsní odezvu dvou číslicových filtrů s přenosovými funkcemi

$$H_1(z) = 1 + z^{-1} - z^{-2} \quad \text{a} \quad H_2(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2}$$

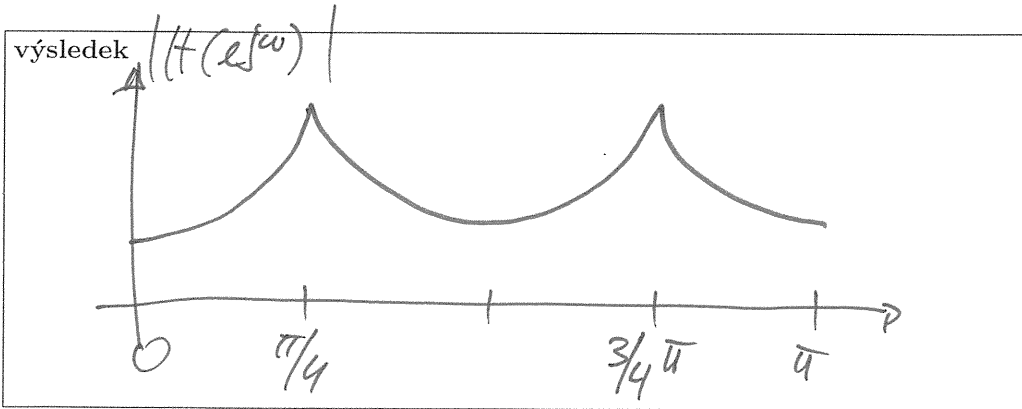
zapojených za sebou (v sérii). konvoluce $[1 \ 1 \ -1]$ a $[1 \ 1 \ 1]$

n	0	1	2	3	4	5
$h[n]$	1	2	1	0	-1	0

Příklad 13 Nakreslete přibližný průběhu modulu frekvenční charakteristiky číslicového filtru se čtyřmi póly:

$$p_{1,2} = 0.99e^{\pm j\frac{\pi}{4}}, \quad p_{3,4} = 0.99e^{\pm j\frac{3\pi}{4}}$$

a čtyřmi nulovými body $n_{1,2,3,4} = 0$ pro interval normovaných kruhových frekvencí $\omega = [0, \pi]$. Absolutní velikosti nejsou důležité, důležitý je tvar a poloha maxima, příp. maxim.

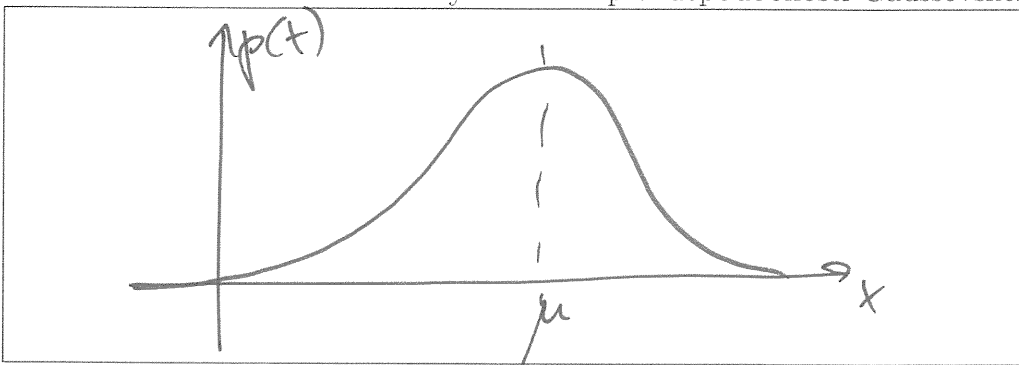


Příklad 14 Určete, zda je číslicový filtr popsáný přenosovou funkcí $H(z) = \frac{1}{1-0.49z^{-2}}$ stabilní.

JE / NENÍ: JE

$$= \frac{z^2}{z^2 - 0.49} = \frac{(z-0)(z-0)}{(z-0.7)(z+0.7)}$$

Příklad 15 Nakreslete funkci hustoty rozdělení pravděpodobnosti Gaussovského bílého šumu.

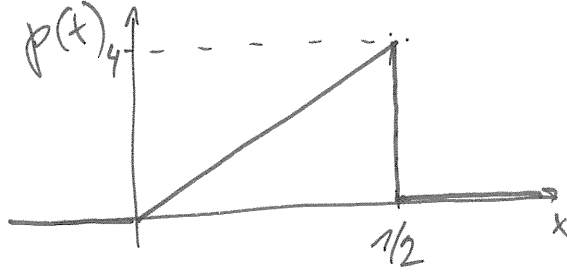


uvnitř jednotkové

Příklad 16 Funkce hustoty rozdělení pravděpodobnosti stacionárního náhodného signálu $\xi(t)$ je dána

$$p(x) = \begin{cases} 8x & \text{pro } x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$$

Vypočítejte pravděpodobnost:



$P(\xi(t) < 0) = \dots 0$

Příklad 17 Dvourozměrná funkce hustoty rozdělení pravděpodobnosti mezi časy n_1 a n_2 náhodného

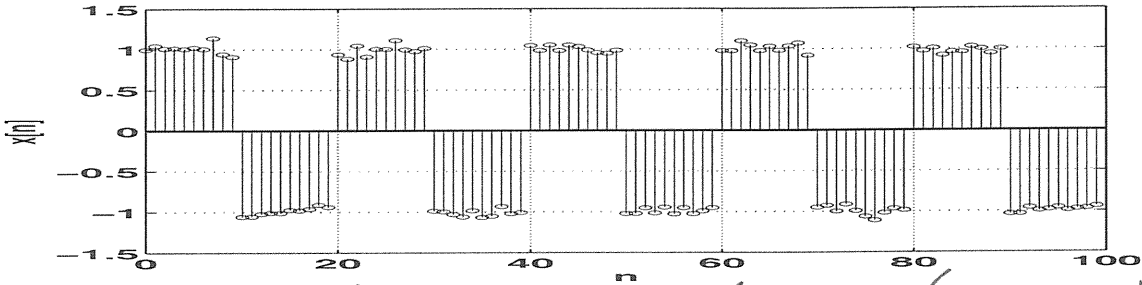
$$p(x_1, x_2, n_1, n_2) = \begin{cases} 0.2 & \text{pro } x_1 \in [0, 2] \text{ a } x_2 \in [0, 2] \\ 0.05 & \text{pro } x_1 \in [2, 4] \text{ a } x_2 \in [2, 4] \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$$

Odhadněte autokorelační koeficient $R[n_1, n_2]$. Pomůcka: Jako reprezentativní hodnoty x_1 a x_2 při numerickém výpočtu integrálu $R[n_1, n_2] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 p(x_1, x_2, n_1, n_2) dx_1 dx_2$ použijte středy intervalů.

$$0,2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 4 + 0,05 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4 = 0,2 \cdot 4 + 0,05 \cdot 36 = 0,8 + 1,8 = \underline{\underline{2,6}}$$

$R[n_1, n_2] = \dots$

Příklad 18 Na obrázku je signál $x[n]$ o délce $N = 100$ vzorků. Určete, pro který posun k dostaneme maximální hodnotu nevychýleného odhadu autokorelačního koeficientu $R[k]$. Neuvažujte triviální řešení $k_{max} = 0$.



při posunu o 20 vzorků maximální podobnost

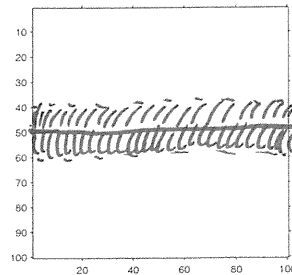
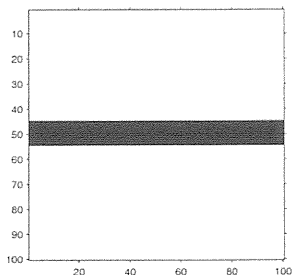
$k_{max} = \dots \underline{\underline{20}} \text{ nebo } \underline{\underline{-20}}$

Příklad 19 Obrázek $x[k, l]$ má velikost 4×4 . Dva pixely mají hodnotu jedna: $x[0, 0] = x[1, 1] = 1$, ostatní jsou nulové.

Spočítejte koeficient jeho 2D-DFT $X[m, n]$ pro $m = 1$ a $n = 1$.

$$X[1, 1] = \sum_k \sum_l x[k, l] \cdot e^{-j \frac{2\pi}{4} (k \cdot 1 + l \cdot 1)} = 1 \cdot e^0 + 1 \cdot e^{-j \frac{\pi}{2} (1+1)} = 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) = \underline{\underline{0}}$$

Příklad 20 2D filtr (konvoluční jádro, maska) je matice 10×10 se všemi hodnotami rovnými $\frac{1}{100}$. Vstup $x[k, l]$ na obrázku vlevo je vodorovná čára o šířce 10 pixelů. Bílá barva značí hodnoty 0, černá barva hodnoty 255. Výsledek filtrování nakreslete do obrázku vpravo.



← černá čára postupně sedmí, osmá a devátá

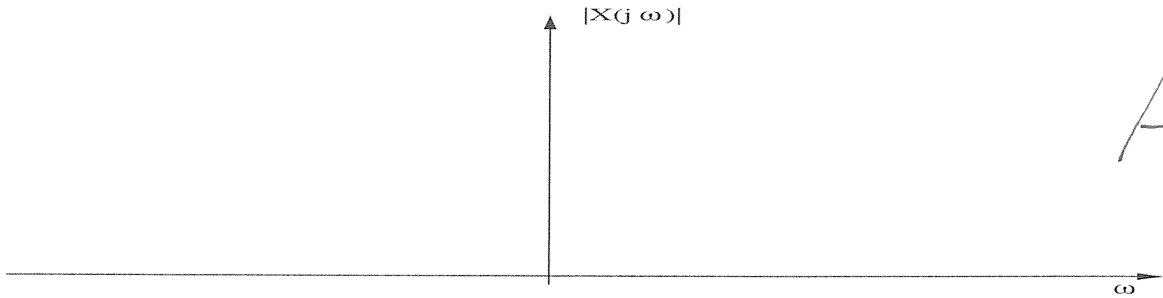
Semestrální zkouška ISS, 2. opravný termín, 1.2.2012, skupina B

REF
B

Login: Příjmení a jméno: *viž také A* Podpis:
(čitelně!)

Příklad 1 Nakreslete modul spektrální funkce $X(j\omega)$ signálu $x(t) = \begin{cases} t+1 & \text{pro } t \in [-1, 0] \\ -t+1 & \text{pro } t \in [0, 1] \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$

Pomůcka: signál je možné vyjádřit jako konvoluci dvou obdélníkových impulsů.



Příklad 2 Hodnota spektrální funkce $X(j\omega)$ signálu $x(t)$ na frekvenci $\omega_1 = 10\pi$ rad/s je $X(j\omega_1) = 1 + j$. Určete hodnotu spektrální funkce $Y(j\omega)$ posunutého signálu $y(t) = x(t - 0.1)$ na stejné frekvenci $\omega_1 = 10\pi$ rad/s.

$$Y(j\omega_1) = (1+j)e^{-j10\pi \cdot 0.1} = (1+j)e^{-j\pi} = \underline{\underline{-1-j}}$$

Příklad 3 Systém je popsán tzv. "step" funkcí:

$$y(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x(t) < 0 \\ 1 & \text{pro } x(t) \geq 0 \end{cases}$$

Určete, zda je systém lineární.

A

JE / NENÍ:

Příklad 4 Systém se spojitým časem je ideální dolní propuště s frekvenční charakteristikou:

$$H(j\omega) = \begin{cases} 1 & \text{pro } \omega \in [-2000\pi \text{ rad/s}, 2000\pi \text{ rad/s}] \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$$

Určete signál $y(t)$ na výstupu systému, pokud je signál na vstupu směsí dvou cosinusovek:

$$x(t) = \cos(2500\pi t) + \cos(2600\pi t)$$

uprojden

$$y(t) = \dots$$

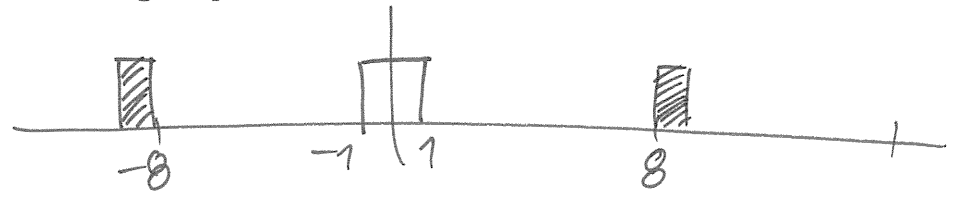
Příklad 5 Chování systému se spojitým časem je popsáno diferenciální rovnicí

$$0.5 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = 0.5 \frac{dx(t)}{dt} + x(t)$$

Napište jeho přenosovou funkci.

$$H(s) = \frac{0.5s + 1}{0.5s + 1} = 1$$

Příklad 6 Zvuk martánského létajícího talíře má výrazné zastoupení frekvencí od 8 do 9 kHz. V jakém intervalu frekvencí martánský talíř uslyšíme, pokud bude zvuk ideálně vzorkován na vzorkovací frekvenci $F_s = 8000$ Hz bez anti-aliasingu a poté ideálně rekonstruován ?



od 0 do 1 kHz.

Příklad 7 Určete, zda sečtením komplexních exponenciál

$$x_1[n] = \frac{1}{2} e^{j\frac{\pi}{2}} e^{j\frac{2\pi}{1000}n} \quad \text{a} \quad x_2[n] = \frac{1}{2} e^{j\frac{\pi}{2}} e^{-j\frac{2\pi}{1000}n}$$

vznikne reálný signál.

nejsou komplexně sdružené

ANO / NE: **NE**

Příklad 8 Vypočtete a do tabulky doplňte kruhovou konvoluci dvou signálů s diskretním časem o délce $N = 4$:

n	0	1	2	3
$x_1[n]$	4	0	1	2
$x_2[n]$	1	1	1	2
$x_1[n] \circledast x_2[n]$	7	8	9	11

Příklad 9 Diskrétní Fourierova transformace (DFT) byla počítána na $N = 1024$ vzorcích diskretního signálu, který byl získán vzorkováním na $F_s = 8000$ Hz. Na který koeficient $X[k]$ se budeme dívat, chceme-li zjistit přítomnost frekvenční složky na $f_1 = 3$ kHz v původním signálu ? Pokud řešení neexistuje, napište "NEJDE".

$$k = \frac{3000}{8000} \cdot 1024 = 3 \cdot 128 = \underline{\underline{384}}$$

Příklad 10 Diskrétní signál o délce $N = 4$ má tyto vzorky:

n	0	1	2	3
$x[n]$	1	0	0	-1

Určete daný koeficient $X[k]$ jeho diskretní Fourierovy transformace.

A

$X[3] = \dots\dots\dots$

B

Příklad 11 Určete, jaké vlastnosti bude mít Fourierova transformace s diskrétním časem (DTFT) $\tilde{X}(e^{j\omega})$ signálu $x[n] = \begin{cases} 1 & \text{pro } n = 3 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$

Reálná: ANO/NE
 Periodická s normovanou kruhovou frekvencí 2π : ANO/NE
 Spojitá: ANO/NE
 Bude platit: $\tilde{X}(e^{j\omega}) = \tilde{X}^*(e^{-j\omega})$: ANO/NE

A

Příklad 12 Určete impulsní odezvu dvou číslicových filtrů s přenosovými funkcemi

$$H_1(z) = 1 - z^{-1} - z^{-2} \quad \text{a} \quad H_2(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2}$$

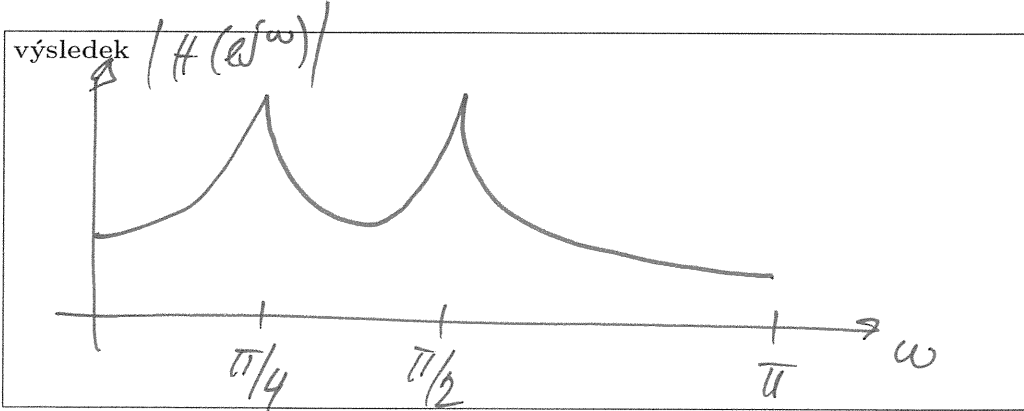
zapojených za sebou (v sérii).

n	0	1	2	3	4	5
$h[n]$	1	0	-1	-2	-1	0

Příklad 13 Nakreslete přibližný průběhu modulu frekvenční charakteristiky číslicového filtru se čtyřmi póly:

$$p_{1,2} = 0.99e^{\pm j\frac{\pi}{4}}, \quad p_{3,4} = 0.99e^{\pm j\frac{\pi}{2}}$$

a čtyřmi nulovými body $n_{1,2,3,4} = 0$ pro interval normovaných kruhových frekvencí $\omega = [0, \pi]$. Absolutní velikosti nejsou důležité, důležitý je tvar a poloha maxima, příp. maxim.

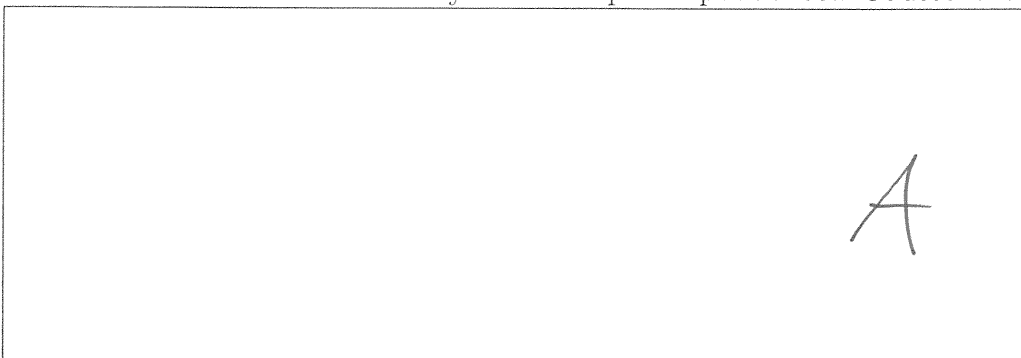


Příklad 14 Určete, zda je číslicový filtr popsáný přenosovou funkcí $H(z) = \frac{1}{1-0.25z^{-2}}$ stabilní.

JE / NENÍ: JE

$$= \frac{z^2}{(z-0.5)(z+0.5)}$$

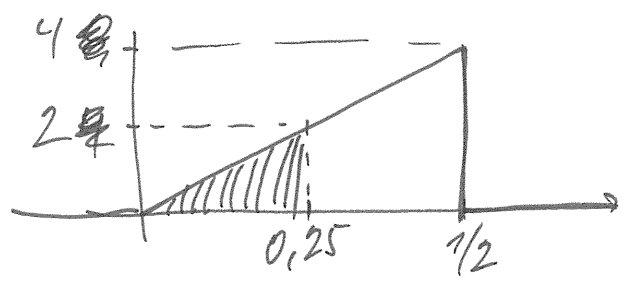
Příklad 15 Nakreslete funkci hustoty rozdělení pravděpodobnosti Gaussovského bílého šumu.



Příklad 16 Funkce hustoty rozdělení pravděpodobnosti stacionárního náhodného signálu $\xi(t)$ je dána

$$p(x) = \begin{cases} 8x & \text{pro } x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$$

Vypočtete pravděpodobnost:



$$P(\xi(t) \in [0, 0.25]) = \underline{\underline{0,25}}$$

Příklad 17 Dvourozměrná funkce hustoty rozdělení pravděpodobnosti mezi časy n_1 a n_2 náhodného

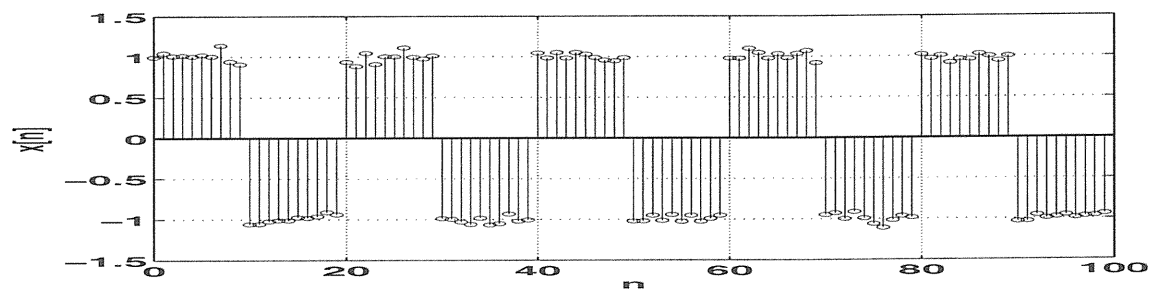
$$p(x_1, x_2, n_1, n_2) = \begin{cases} 0.2 & \text{pro } x_1 \in [0, 2] \text{ a } x_2 \in [0, 2] \\ 0.05 & \text{pro } x_1 \in [2, 4] \text{ a } x_2 \in [2, 4] \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$$

Odhadněte autokorelační koeficient $R[n_1, n_2]$. Pomůcka: Jako reprezentativní hodnoty x_1 a x_2 při numerickém výpočtu integrálu $R[n_1, n_2] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 p(x_1, x_2, n_1, n_2) dx_1 dx_2$ použijte středy intervalů.

A

$$R[n_1, n_2] = \dots\dots\dots$$

Příklad 18 Na obrázku je signál $x[n]$ o délce $N = 100$ vzorků. Určete, pro který posun k dostaneme maximální hodnotu nevychýleného odhadu autokorelačního koeficientu $R[k]$. Neuvažujte triviální řešení $k_{max} = 0$.



A

$$k_{max} = \dots\dots\dots$$

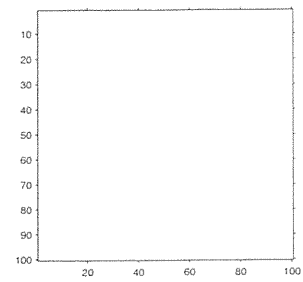
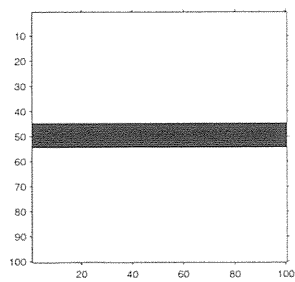
Příklad 19 Obrázek $x[k, l]$ má velikost 4×4 . Dva pixely mají hodnotu jedna: $x[0, 0] = x[1, 1] = 1$, ostatní jsou nulové.

Spočítejte koeficient jeho 2D-DFT $X[m, n]$ pro $m = 1$ a $n = 1$.

A

$$X[1, 1] = \dots\dots\dots$$

Příklad 20 2D filtr (konvoluční jádro, maska) je matice 10×10 se všemi hodnotami rovnými $\frac{1}{100}$. Vstup $x[k, l]$ na obrázku vlevo je vodorovná čára o šířce 10 pixelů. Bílá barva značí hodnoty 0, černá barva hodnoty 255. Výsledek filtrování nakreslete do obrázku vpravo.



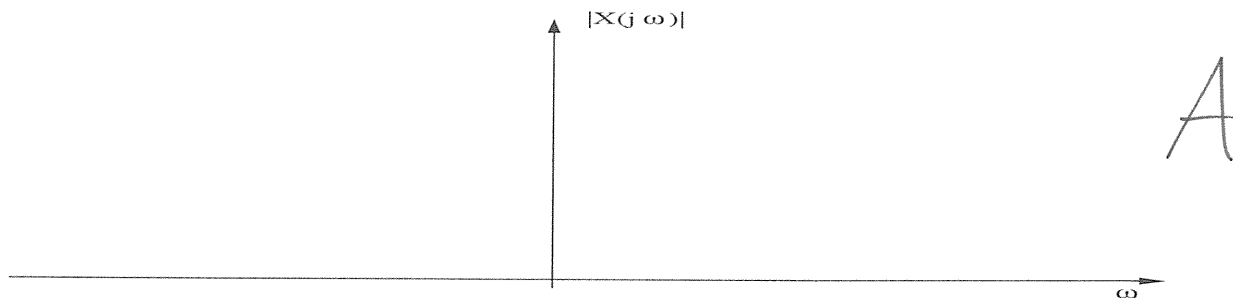
A

Semestrální zkouška ISS, 2. opravný termín, 1.2.2012, skupina C

Login: Příjmení a jméno: Podpis:
(čitelně!)

Příklad 1 Nakreslete modul spektrální funkce $X(j\omega)$ signálu $x(t) = \begin{cases} t+1 & \text{pro } t \in [-1, 0] \\ -t+1 & \text{pro } t \in [0, 1] \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$

Pomůcka: signál je možné vyjádřit jako konvoluci dvou obdélníkových impulsů.



Příklad 2 Hodnota spektrální funkce $X(j\omega)$ signálu $x(t)$ na frekvenci $\omega_1 = 10\pi$ rad/s je $X(j\omega_1) = 1+j$. Určete hodnotu spektrální funkce $Y(j\omega)$ posunutého signálu $y(t) = x(t + 0.05)$ na stejné frekvenci $\omega_1 = 10\pi$ rad/s.

$$Y(j\omega_1) = (1+j) e^{+j 10\pi \cdot 0.05} = (1+j) e^{j \frac{\pi}{2}} = (1+j) j = \underline{\underline{-1-j}}$$

Příklad 3 Systém je popsán tzv. "step" funkcí:

$$y(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x(t) < 0 \\ 1 & \text{pro } x(t) \geq 0 \end{cases}$$

Určete, zda je systém lineární.

A

JE / NENÍ:

Příklad 4 Systém se spojitým časem je ideální dolní propuště s frekvenční charakteristikou:

projde $H(j\omega) = \begin{cases} 1 & \text{pro } \omega \in [-2000\pi \text{ rad/s}, 2000\pi \text{ rad/s}] \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$

Určete signál $y(t)$ na výstupu systému, pokud je signál na vstupu směsí dvou cosinusovek:

$x(t) = \cos(500\pi t) + \cos(2500\pi t)$ *killed*

$y(t) = \cos(500\pi t)$

Příklad 5 Chování systému se spojitým časem je popsáno diferenciální rovnicí

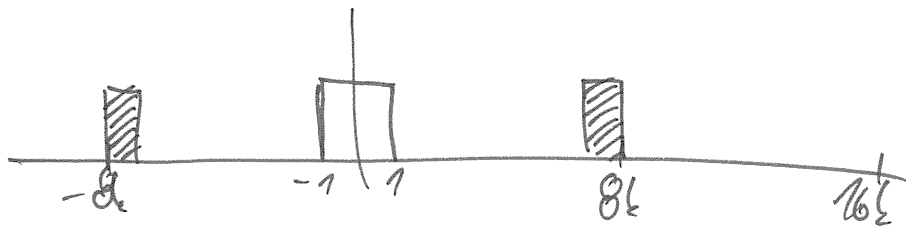
$$0.2 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = 0.2 \frac{dx(t)}{dt} + x(t)$$

Napište jeho přenosovou funkci.

$H(s) = \frac{0.2s + 1}{0.2s + 1} = 1$

Příklad 6 Zvuk martánského létajícího talíře má výrazné zastoupení frekvencí od 7 do 8 kHz. V jakém intervalu frekvencí martánský talíř uslyšíme, pokud bude zvuk ideálně vzorkován na vzorkovací frekvenci $F_s = 8000$ Hz bez anti-aliasingu a poté ideálně rekonstruován ?

od do kHz.



Příklad 7 Určete, zda sečtením komplexních exponenciál

$$x_1[n] = \frac{1}{2} e^{-j\frac{\pi}{2}} e^{-j\frac{2\pi}{1000}n} \quad \text{a} \quad x_2[n] = \frac{1}{2} e^{j\frac{\pi}{2}} e^{-j\frac{2\pi}{1000}n}$$

vznikne reálný signál.

nejsou komplexně sdružené!

NE

ANO / NE:

Příklad 8 Vypočítejte a do tabulky doplňte kruhovou konvoluci dvou signálů s diskretním časem o délce $N = 4$:

n	0	1	2	3
$x_1[n]$	4	0	1	2
$x_2[n]$	1	1	2	2
$x_1[n] \circledast x_2[n]$	8	10	13	11

Příklad 9 Diskrétní Fourierova transformace (DFT) byla počítána na $N = 1024$ vzorcích diskretního signálu, který byl získán vzorkováním na $F_s = 8000$ Hz. Na který koeficient $X[k]$ se budeme dívat, chceme-li zjistit přítomnost frekvenční složky na $f_1 = 2$ kHz v původním signálu ? Pokud řešení neexistuje, napište "NEJDE".

$$k = \frac{2000}{8000} \cdot 1024 = 2 \cdot 128 = \underline{\underline{256}}$$

Příklad 10 Diskrétní signál o délce $N = 4$ má tyto vzorky:

n	0	1	2	3
$x[n]$	1	0	0	-1

Určete daný koeficient $X[k]$ jeho diskretní Fourierovy transformace.

$$X[1] = \sum x[n] e^{-j\frac{2\pi}{4} \cdot 1 \cdot n} = 1 \cdot e^0 - 1 \cdot e^{-j\frac{\pi}{2} \cdot 3} = \underline{\underline{1-j}}$$



Příklad 11 Určete, jaké vlastnosti bude mít Fourierova transformace s diskrétním časem (DTFT) $\tilde{X}(e^{j\omega})$ signálu $x[n] = \begin{cases} 1 & \text{pro } n = 2 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$

viz A

- Reálná: ANO/NE
- Periodická s normovanou kruhovou frekvencí 2π : ANO/NE
- Spojité: ANO/NE
- Bude platit: $\tilde{X}(e^{j\omega}) = \tilde{X}^*(e^{-j\omega})$: ANO/NE

Příklad 12 Určete impulsní odezvu dvou číslicových filtrů s přenosovými funkcemi

$$H_1(z) = 1 - z^{-1} + z^{-2} \quad \text{a} \quad H_2(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2}$$

zapojených za sebou (v sérii).

n	0	1	2	3	4	5
$h[n]$	1	0	1	0	1	0

Příklad 13 Nakreslete přibližný průběhu modulu frekvenční charakteristiky číslicového filtru se čtyřmi póly:

$$p_{1,2} = 0.99e^{\pm j\frac{\pi}{4}}, \quad p_{3,4} = 0.99e^{\pm j\frac{\pi}{2}}$$

a čtyřmi nulovými body $n_{1,2,3,4} = 0$ pro interval normovaných kruhových frekvencí $\omega = [0, \pi]$. Absolutní velikosti nejsou důležité, důležitý je tvar a poloha maxima, příp. maxim.

výsledek

viz B

Příklad 14 Určete, zda je číslicový filtr popsáný přenosovou funkcí $H(z) = \frac{1}{1-16z^{-2}}$ stabilní.

JE / NENÍ: **NENÍ** = $\frac{z^2}{(z-4)(z+4)}$ *minimálně jedna*

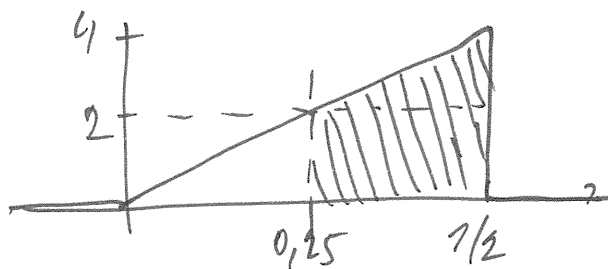
Příklad 15 Nakreslete funkci hustoty rozdělení pravděpodobnosti Gaussovského bílého šumu.

A

Příklad 16 Funkce hustoty rozdělení pravděpodobnosti stacionárního náhodného signálu $\xi(t)$ je dána

$$p(x) = \begin{cases} 8x & \text{pro } x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$$

Vypočtete pravděpodobnost:



$$P(\xi(t) \in [0.25, 0.5]) = \dots \underline{\underline{0,75}}$$

Příklad 17 Dvourozměrná funkce hustoty rozdělení pravděpodobnosti mezi časy n_1 a n_2 náhodného

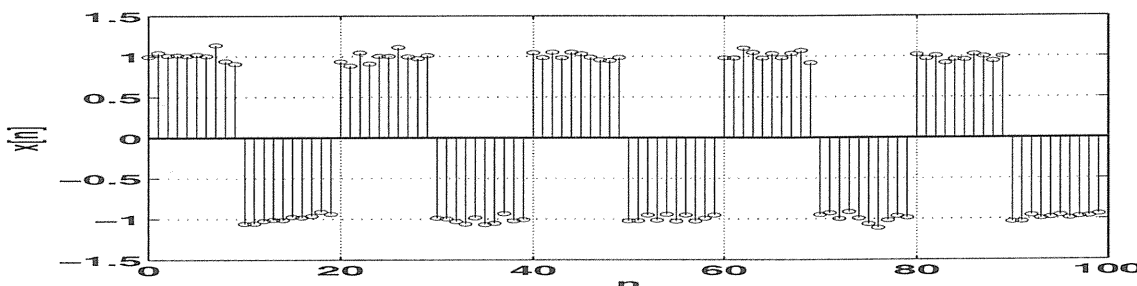
$$p(x_1, x_2, n_1, n_2) = \begin{cases} 0.2 & \text{pro } x_1 \in [0, 2] \text{ a } x_2 \in [0, 2] \\ 0.05 & \text{pro } x_1 \in [2, 4] \text{ a } x_2 \in [2, 4] \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$$

Odhadněte autokorelační koeficient $R[n_1, n_2]$. Pomůcka: Jako reprezentativní hodnoty x_1 a x_2 při numerickém výpočtu integrálu $R[n_1, n_2] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 p(x_1, x_2, n_1, n_2) dx_1 dx_2$ použijte středy intervalů.

$$R[n_1, n_2] = \dots$$

A

Příklad 18 Na obrázku je signál $x[n]$ o délce $N = 100$ vzorků. Určete, pro který posun k dostaneme maximální hodnotu nevychýleného odhadu autokorelačního koeficientu $R[k]$. Neuvažujte triviální řešení $k_{max} = 0$.



$$k_{max} = \dots$$

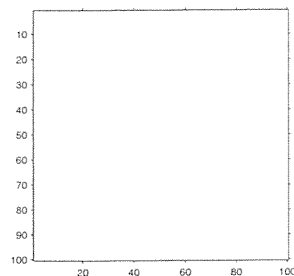
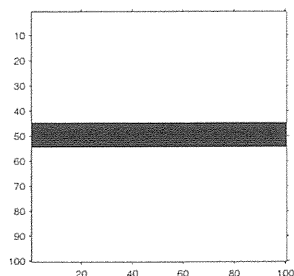
A

Příklad 19 Obrázek $x[k, l]$ má velikost 4×4 . Dva pixely mají hodnotu jedna: $x[0, 1] = x[1, 0] = 1$, ostatní jsou nulové.

Spočítejte koeficient jeho 2D-DFT $X[m, n]$ pro $m = 1$ a $n = 1$.

$$X[1, 1] = \dots \sum \sum x[k, l] e^{-j \frac{2\pi}{4} (km + ln)} = 1 \cdot e^{-j \frac{\pi}{2} (0+1)} + 1 \cdot e^{-j \frac{\pi}{2} (1+0)} = \underline{\underline{-2j}}$$

Příklad 20 2D filtr (konvoluční jádro, maska) je matice 10×10 se všemi hodnotami rovnými $\frac{1}{100}$. Vstup $x[k, l]$ na obrázku vlevo je vodorovná čára o šířce 10 pixelů. Bílá barva značí hodnoty 0, černá barva hodnoty 255. Výsledek filtrování nakreslete do obrázku vpravo.

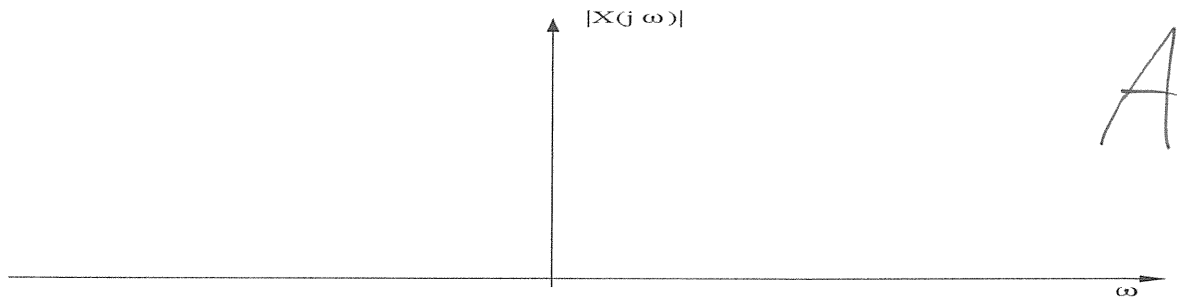


A

Login: Příjmení a jméno: Podpis:
(čitelně!)

Příklad 1 Nakreslete modul spektrální funkce $X(j\omega)$ signálu $x(t) = \begin{cases} t+1 & \text{pro } t \in [-1, 0] \\ -t+1 & \text{pro } t \in [0, 1] \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$

Pomůcka: signál je možné vyjádřit jako konvoluci dvou obdélníkových impulsů.



Příklad 2 Hodnota spektrální funkce $X(j\omega)$ signálu $x(t)$ na frekvenci $\omega_1 = 10\pi$ rad/s je $X(j\omega_1) = 1+j$. Určete hodnotu spektrální funkce $Y(j\omega)$ posunutého signálu $y(t) = x(t+0.1)$ na stejné frekvenci $\omega_1 = 10\pi$ rad/s.

$$Y(j\omega_1) = (1+j)e^{j10\pi \cdot 0.1} = (1+j)e^{j\pi} = \underline{\underline{-1-j}}$$

Příklad 3 Systém je popsán tzv. "step" funkcí:

$$y(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x(t) < 0 \\ 1 & \text{pro } x(t) \geq 0 \end{cases}$$

Určete, zda je systém lineární.

A

JE / NENÍ:

Příklad 4 Systém se spojitým časem je ideální dolní propuště s frekvenční charakteristikou:

$$H(j\omega) = \begin{cases} 1 & \text{pro } \omega \in [-2000\pi \text{ rad/s}, 2000\pi \text{ rad/s}] \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$$

Určete signál $y(t)$ na výstupu systému, pokud je signál na vstupu směsí dvou cosinusovek:

$$x(t) = \cos(500\pi t) + \cos(600\pi t) \quad \text{obě projdou}$$

$$y(t) = \cos(500\pi t) + \cos(600\pi t)$$

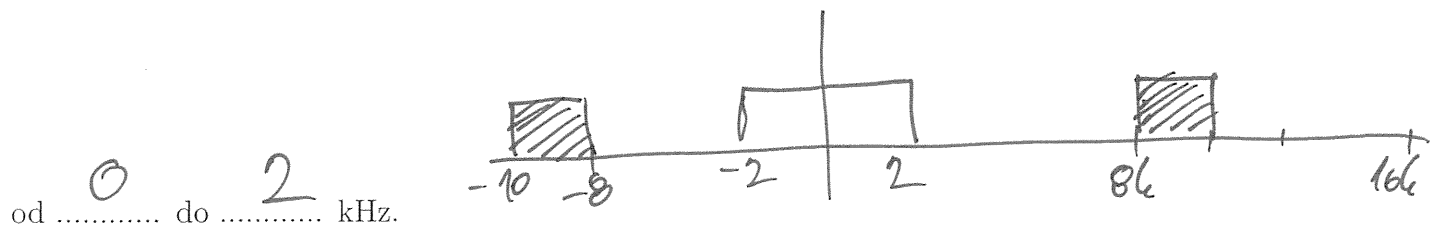
Příklad 5 Chování systému se spojitým časem je popsáno diferenciální rovnicí

$$0.5 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = 0.2 \frac{dx(t)}{dt} + x(t)$$

Napište jeho přenosovou funkci.

$$H(s) = \frac{0.2s + 1}{0.5s + 1}$$

Příklad 6 Zvuk marťanského létajícího talíře má výrazné zastoupení frekvencí od 8 do 10 kHz. V jakém intervalu frekvencí marťanský talíř uslyšíme, pokud bude zvuk ideálně vzorkován na vzorkovací frekvenci $F_s = 8000$ Hz bez anti-aliasingu a poté ideálně rekonstruován ?



Příklad 7 Určete, zda sečtením komplexních exponenciál

$$x_1[n] = \frac{1}{2} e^{-j\frac{\pi}{2}} e^{j\frac{2\pi}{1000}n} \quad \text{a} \quad x_2[n] = \frac{1}{2} e^{j\frac{\pi}{4}} e^{-j\frac{2\pi}{1000}n}$$

vznikne reálný signál.

nejsou komplexně sdružené!

ANO / NE: NE

Příklad 8 Vypočítejte a do tabulky doplňte kruhovou konvoluci dvou signálů s diskretním časem o délce $N = 4$:

n	0	1	2	3
$x_1[n]$	4	0	1	2
$x_2[n]$	1	2	2	2
$x_1[n] \circledast x_2[n]$	10	14	13	12

Příklad 9 Diskrétní Fourierova transformace (DFT) byla počítána na $N = 1024$ vzorcích diskretního signálu, který byl získán vzorkováním na $F_s = 8000$ Hz. Na který koeficient $X[k]$ se budeme dívat, chceme-li zjistit přítomnost frekvenční složky na $f_1 = 1$ kHz v původním signálu ? Pokud řešení neexistuje, napište "NEJDE".

$$k = \frac{1000}{8000} \cdot 1024 = \underline{\underline{128}}$$

Příklad 10 Diskrétní signál o délce $N = 4$ má tyto vzorky:

n	0	1	2	3
$x[n]$	1	0	0	-1

Určete daný koeficient $X[k]$ jeho diskretní Fourierovy transformace.

$$X[2] = \sum x[n] \cdot e^{-j\frac{2\pi}{4} \cdot 2 \cdot n} = 1 \cdot e^{j0} - 1 \cdot e^{j3\pi} = 1 - 1 \cdot (-1) = \underline{\underline{2}}$$

Příklad 11 Určete, jaké vlastnosti bude mít Fourierova transformace s diskrétním časem (DTFT) $\tilde{X}(e^{j\omega})$ signálu $x[n] = \begin{cases} 1 & \text{pro } n = 5 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$

Reálná: ANO/NE

Periodická s normovanou kruhovou frekvencí 2π : ANO/NE

Spojité: ANO/NE

Bude platit: $\tilde{X}(e^{j\omega}) = \tilde{X}^*(e^{-j\omega})$: ANO/NE

viz A

Příklad 12 Určete impulsní odezvu dvou číslicových filtrů s přenosovými funkcemi

$$H_1(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2} \quad \text{a} \quad H_2(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2}$$

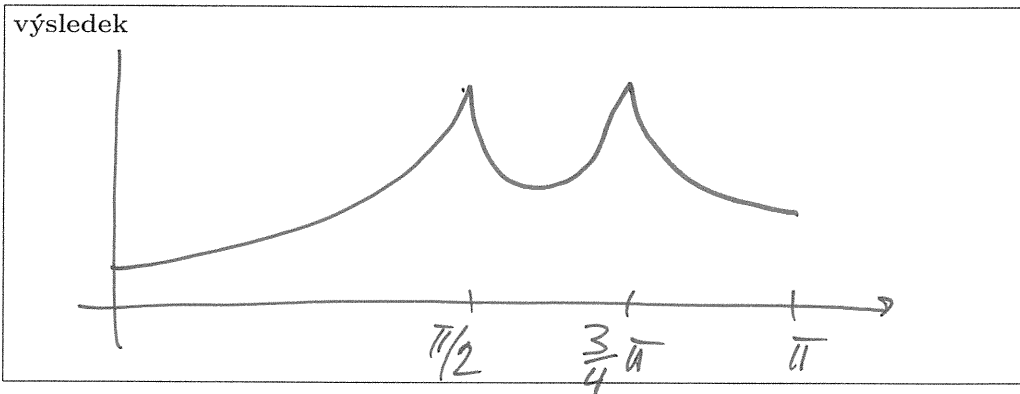
zapojených za sebou (v sérii).

n	0	1	2	3	4	5
$h[n]$	1	2	3	2	1	0

Příklad 13 Nakreslete přibližný průběhu modulu frekvenční charakteristiky číslicového filtru se čtyřmi póly:

$$p_{1,2} = 0.99e^{\pm j\frac{\pi}{2}}, \quad p_{3,4} = 0.99e^{\pm j\frac{3\pi}{4}}$$

a čtyřmi nulovými body $n_{1,2,3,4} = 0$ pro interval normovaných kruhových frekvencí $\omega = [0, \pi]$. Absolutní velikosti nejsou důležité, důležitý je tvar a poloha maxima, příp. maxim.



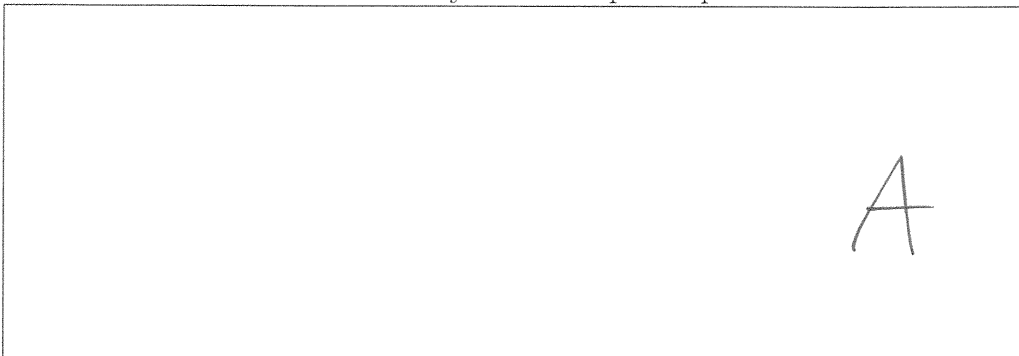
Příklad 14 Určete, zda je číslicový filtr popsáný přenosovou funkcí $H(z) = \frac{1}{1-4z^{-2}}$ stabilní.

JE / NENÍ: NENÍ

$$\frac{z^2}{(z-2)(z+2)}$$

minimálně jednooklona

Příklad 15 Nakreslete funkci hustoty rozdělení pravděpodobnosti Gaussovského bílého šumu.



Příklad 16 Funkce hustoty rozdělení pravděpodobnosti stacionárního náhodného signálu $\xi(t)$ je dána

$$p(x) = \begin{cases} 8x & \text{pro } x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$$

Vypočítejte pravděpodobnost:

viz C

$$P(\xi(t) > 0.25) = \dots\dots\dots 0,75$$

Příklad 17 Dvourozměrná funkce hustoty rozdělení pravděpodobnosti mezi časy n_1 a n_2 náhodného

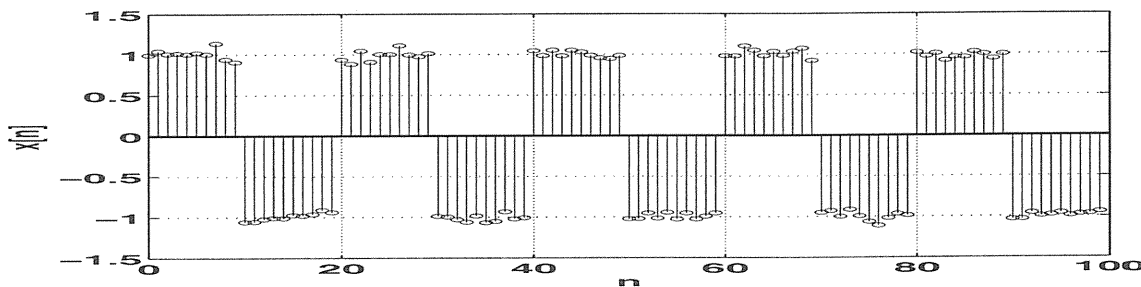
$$p(x_1, x_2, n_1, n_2) = \begin{cases} 0.2 & \text{pro } x_1 \in [0, 2] \text{ a } x_2 \in [0, 2] \\ 0.05 & \text{pro } x_1 \in [2, 4] \text{ a } x_2 \in [2, 4] \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$$

Odhadněte autokorelační koeficient $R[n_1, n_2]$. Pomůcka: Jako reprezentativní hodnoty x_1 a x_2 při numerickém výpočtu integrálu $R[n_1, n_2] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 p(x_1, x_2, n_1, n_2) dx_1 dx_2$ použijte středy intervalů.

A

$$R[n_1, n_2] = \dots\dots\dots$$

Příklad 18 Na obrázku je signál $x[n]$ o délce $N = 100$ vzorků. Určete, pro který posun k dostaneme maximální hodnotu nevychýleného odhadu autokorelačního koeficientu $R[k]$. Neuvažujte triviální řešení $k_{max} = 0$.



A

$$k_{max} = \dots\dots\dots$$

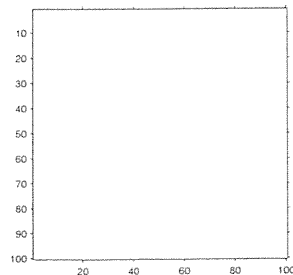
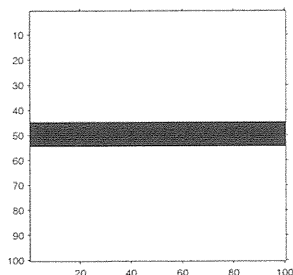
Příklad 19 Obrázek $x[k, l]$ má velikost 4×4 . Dva pixely mají hodnotu jedna: $x[0, 1] = x[1, 0] = 1$, ostatní jsou nulové.

Spočítejte koeficient jeho 2D-DFT $X[m, n]$ pro $m = 1$ a $n = 1$.

viz C

$$X[1, 1] = \dots\dots\dots -2j$$

Příklad 20 2D filtr (konvoluční jádro, maska) je matice 10×10 se všemi hodnotami rovnými $\frac{1}{100}$. Vstup $x[k, l]$ na obrázku vlevo je vodorovná čára o šířce 10 pixelů. Bílá barva značí hodnoty 0, černá barva hodnoty 255. Výsledek filtrování nakreslete do obrázku vpravo.



A