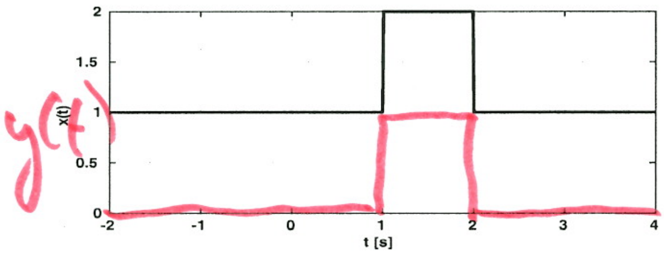
Semestrální zkouška ISS, 2. opravný termín, 28.1.2020, skupina A

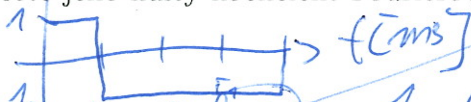
Login: .... Příjmení a jméno: .... Podpis: ....
(prosím čitelně!)

Příklad 1 Na obrázku je signál se spojitým časem $x(t)$. Nakreslete do stejného obrázku signál $y(t) = x(t) - 1$.



Příklad 2 Periodický signál se spojitým časem má periodu $T_1 = 4$ ms. Jedna perioda je definována takto: $x(t) = \begin{cases} 1 & \text{pro } 0 \leq t < 1 \text{ ms} \\ -1 & \text{pro } 1 \text{ ms} \leq t < 4 \text{ ms} \end{cases}$. Určete jeho nultý koeficient Fourierovy řady.

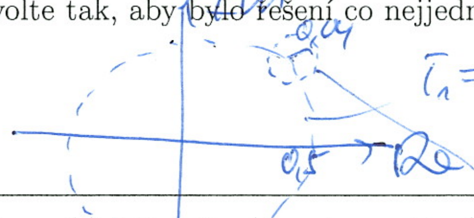
střední hodnota



$c_0 = \ldots -\frac{1}{2}$

$c_0 = \frac{1}{T_1}\int_0^{T_1} x(t)\, e^{-jk\omega_1 t}\, dt = \frac{1}{T_1}\int_0^{T_1} x(t)\, dt = \frac{1}{4\cdot 10^{-3}}(1\cdot 10^{-3} - 3\cdot 10^{-3}) = -\frac{1}{2}$

Příklad 3 Na podlaze se otáčí dětská hračka "káča" o poloměru 0.04 m, která má na okraji červený bod. Jedna otáčka trvá 0.1 s. Káča se zároveň pohybuje po kružnici o poloměru 0.5 m, jeden oběh trvá 5 s. Popište dráhu červeného bodu jako komplexní funkci času: $x(t)$. Podlahu pokládejte za komplexní rovinu, počáteční polohu a směr otáčení a oběhu neřešte, počátek zvolte tak, aby bylo řešení co nejjednodušší.

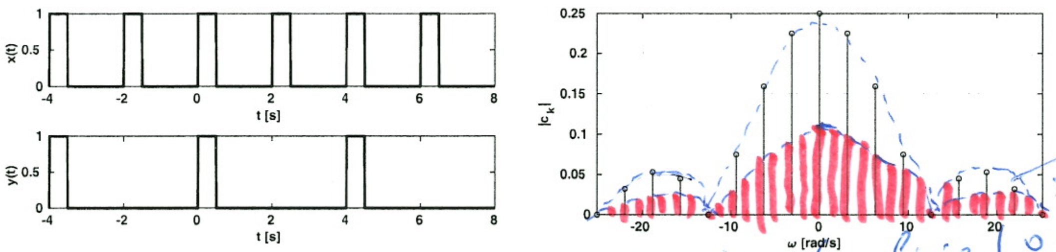


$T_1 = 5, \ \omega_1 = \frac{2\pi}{5}$

$T_2 = 0{,}1 \ \ \omega_2 = \frac{2\pi}{0{,}1} = 20\pi$

$x(t) = \ldots 0{,}5\, e^{j\frac{2\pi}{5}t} + 0{,}04\, e^{j 20\pi t}$

Příklad 4 Na levém obrázku jsou periodické signály $x(t)$ a $y(t)$. Signál $y(t)$ má oproti $x(t)$ dvakrát větší periodu. Vpravo jsou moduly koeficientů Fourierovy řady signálu $x(t)$ na odpovídajících frekvencích. Nakreslete do stejného obrázku moduly koeficientů FŘ signálu $y(t)$, také na odpovídajících frekvencích



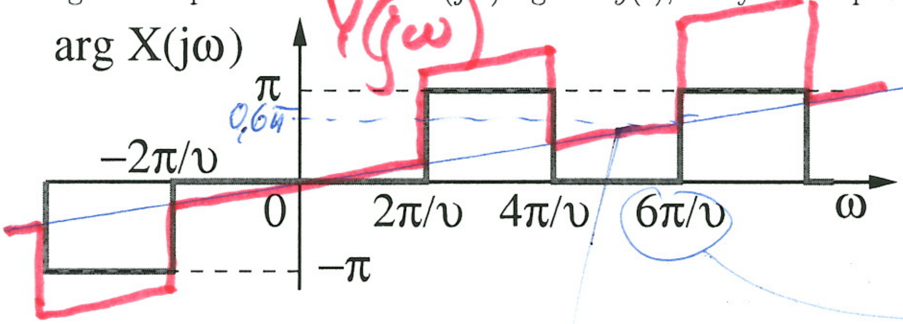
$c_k = \frac{D\vartheta_1}{T_1}\, \mathrm{sinc}\left(\frac{\vartheta}{2} k\omega_1\right)$

tvar obálky se nezmění

zvětšení T_1 2x $\Rightarrow$ $\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}$, ω_1 2x zmenšení

zmenšení koeficientů 2x,

Příklad 5 Na obrázku je argument spektrální funkce $X(j\omega)$ signálu $x(t)$. Nakreslete do stejného obrázku argument spektrální funkce $Y(j\omega)$ signálu $y(t)$, který vznikl posunutím signálu $x(t)$ takto: $y(t) = x(t + \frac{\vartheta}{10})$.



$Y(j\omega) = X(j\omega)\, e^{+j\omega\tau}$

$\arg Y(j\omega) = \arg X(j\omega) + \omega\tau =$
$= \arg X(j\omega) + \omega \frac{\vartheta}{10}$

pro $\omega = \frac{6\pi}{\vartheta}$ je to

$\frac{6\pi}{\vartheta} \cdot \frac{\vartheta}{10} = 0{,}6\pi$

$\omega \frac{\vartheta}{10}$

A

Příklad 6 Převeďte diferenciální rovnici systému se spojitým časem
$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 0.5\frac{dx(t)}{dt} + 0.4x(t) = \frac{d^2y(t)}{dt^2} - 0.2\frac{dy(t)}{dt} - 0.1y(t)$
na přenosovou funkci.

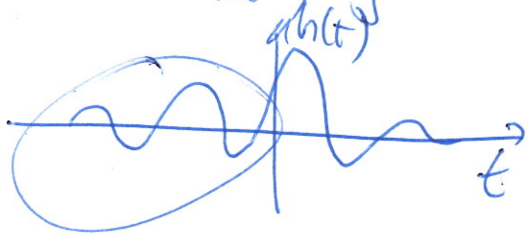
$s^2 X(s) + 0{,}5s\,X(s) + 0{,}4X(s) = s^2 Y(s) - 0{,}2s\,Y(s) - 0{,}1Y(s)$

$\frac{s^2 + 0{,}5s + 0{,}4}{s^2 - 0{,}2s - 0{,}1} = \frac{Y(s)}{X(s)} \leftarrow$ toto je $H(s)$

$H(s) = \frac{s^2 + 0{,}5s + 0{,}4}{s^2 - 0{,}2s - 0{,}1}$

Příklad 7 Nakreslete nebo matematicky zapište impulsní odezvu $h(t)$ libovolného **nekauzálního** systému se spojitým časem.

$h(t)$ je nenulová pro $t < 0$



Příklad 8 Vzorkovací frekvence je F_s =100 kHz. Uveďte, jaká může být maximální frekvence obsažená ve spektru vzorkovaného signálu, pokud nemá docházet k aliasingu.

polovina F_s

f_{max} = 50 kHz.

Příklad 9 Perioda periodického signálu s diskrétním časem $\tilde{x}[n]$ je N = 10 vzorků. Uveďte, jakou má tento signál základní frekvenci v Hz, pokud je vzorkovací frekvence F_s =8000 Hz.

normovaná frekvence: $f' = \frac{1}{N} = \frac{1}{10}$

převod na frekvenci v Hz: odnormování (násobení) F_s

f = 800 Hz.

Příklad 10 Vztah pro Fourierovu transformaci s diskrétním časem (DTFT) diskrétního signálu $x[n]$ je $\tilde{X}(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$. Odvoďte vztah pro získání DTFT signálu zpožděného o jeden vzorek: $y[n] = x[n-1]$ ze spektrální funkce $\tilde{X}(e^{j\omega})$.

$n = m+1$

$\tilde{Y}(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underbrace{x[n-1]}_{\text{nová proměnná } m=n-1} e^{-j\omega n} = \sum_{m=-\infty+1}^{\infty+1} x[m]\, e^{-j\omega(m+1)} =$

$= \underbrace{\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] e^{-j\omega m}}_{\text{DTFT, tedy } \tilde{X}(e^{j\omega})} \cdot e^{-j\omega}$

dále viz B

$\tilde{Y}(e^{j\omega}) = \tilde{X}(e^{j\omega})e^{-j\omega}$

A

Příklad 11 Periodický signál s diskrétním časem má periodu $N = 4$ vzorky. Pro $n = [0\ \ 1\ \ 2\ \ 3]$ jsou jeho hodnoty $x[n] = [1\ \ 0\ \ 0\ \ 0]$. Vypočtěte všechny koeficienty jeho diskrétní Fourierovy řady (DFŘ)

$$\tilde X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

jediný nenulový vzorek řady je $x[0] = 1$,

$$\tilde X[k] = 1\cdot \underbrace{e^{-j\frac{2\pi}{4}\cdot k\cdot 0}}_{1} = 1$$

$\tilde X[0] =$ 1 $\quad \tilde X[1] =$ 1 $\quad \tilde X[2] =$ 1 $\quad \tilde X[3] =$ 1

Příklad 12 Přenosová funkce číslicového filtru je $H(z) = \frac{1+0.5z^{-1}-0.25z^{-2}}{1-0.81z^{-2}}$. Napište jeho diferenční rovnici.

$$\frac{b_0+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}}{1+\cancel{a_1z^{-1}}+a_2z^{-2}}$$

u koeficientů jmenovatele se mění znaménka

$y[n] =$ $x[n] + 0{,}5\,x[n-1] - 0{,}25\,x[n-2] + 0{,}81\,y[n-2]$

Příklad 13 Pro číslicový filtr napište vztah mezi jeho impulsní odezvou $h[n]$ a frekvenční charakteristikou $H(e^{j\omega})$.

převod pomocí Fourierovy transformace s diskrétním časem (DTFT):

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-j\omega n}$$

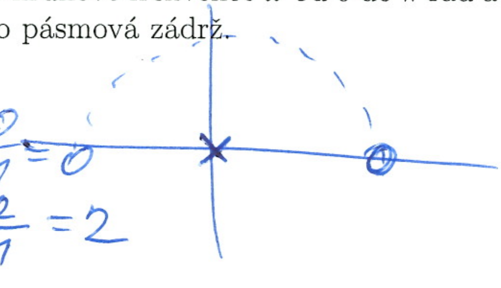
u kauzálních filtrů jen od $n=0$

Příklad 14 Přenosová funkce číslicového filtru je $H(z) = 1 - z^{-1}$. Nakreslete přibližný průběh modulu frekvenční charakteristiky tohoto filtru $|H(e^{j\omega})|$ pro normované kruhové frekvence ω od 0 do π rad a určete typ filtru: dolní propust, horní propust, pásmová propust nebo pásmová zádrž.

$$H(z) = \frac{z-1}{z} = \frac{z-1}{z-0}$$

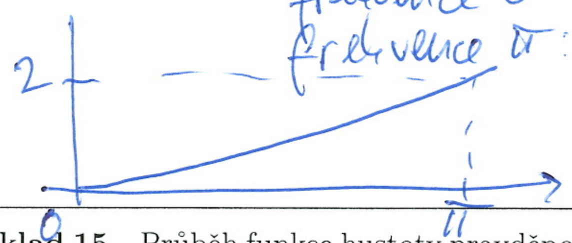
← nulový bod

← pól



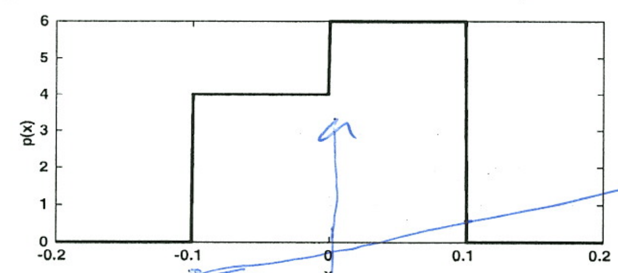
frekvence 0: modul $= \frac{0}{1} = 0$

frekvence π: modul $= \frac{2}{1} = 2$

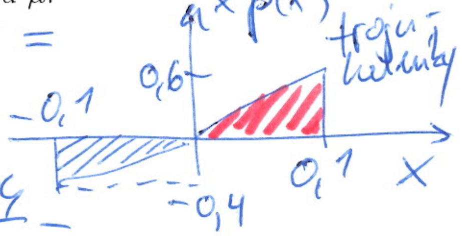


HORNÍ PROPUST

Příklad 15 Průběh funkce hustoty pravděpodobnosti $p(x)$ stacionárního náhodného signálu je na obrázku. Vypočtěte na základě této funkce hustoty střední hodnotu náhodného signálu μ.



$$\mu = \int x\,p(x)\,dx = \frac{0{,}06}{2} - \frac{0{,}04}{2} = \underline{0{,}01}$$

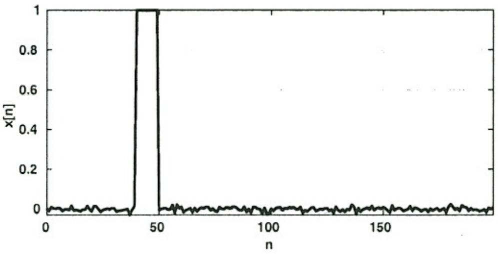


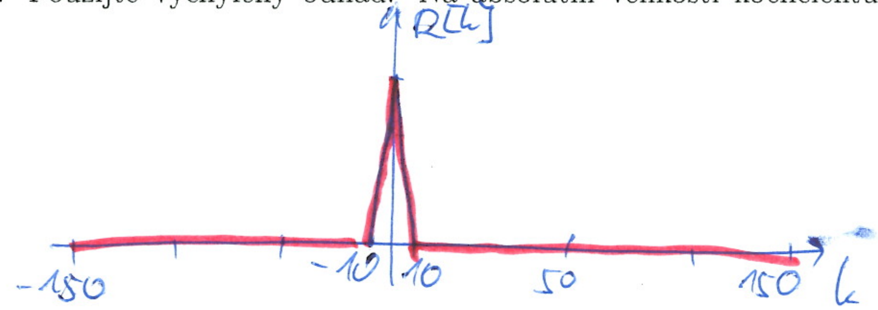
A

Příklad 16 Pole `x` v jazyce C má `N = 1000` prvků a obsahuje jednu realizaci ergodického náhodného signálu. Napište kód pro časový odhad rozptylu D. Můžete použít jen `+`, `-`, `*`, `/`, `^`, žádné statistické funkce.

```
float acc = 0.0, mu, D;
int n;
for (n = 0; n < N; n++) {
   acc += x[n]
}
mu = acc / float(N);
acc = 0.0;
for (n = 0; n < N; n++) {
   acc += (x[n] - mu) * (x[n] - mu);
}
D = acc / float(N);
```

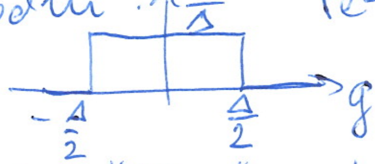
Příklad 17 Na obrázku je průběh náhodného signálu $x[n]$. Nakreslete přibližně průběh jeho korelačních koeficientů $R[k]$ pro k od -150 do +150. Použijte vychýlený odhad. Na absolutní velikosti koeficientů nezáleží.



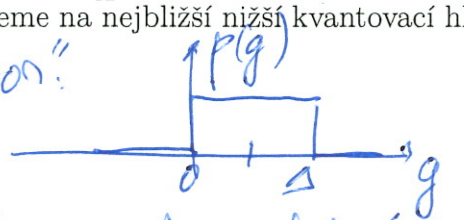


Příklad 18 Rozestup kvantovaích hladin při kvantování je Δ. Pokud kvantujeme zaokrouhlením na nebližší hladinu ("round"), je střední výkon chyby kvantování $P_e = \frac{\Delta^2}{12}$. Odvoďte vztah pro výpočet středního výkonu chyby kvantování P_e pro případ, že zaokrouhlujeme na nejbližší nižší kvantovací hladinu ("floor").

Původní: $P_e = \frac{\Delta^2}{12}$



"floor":



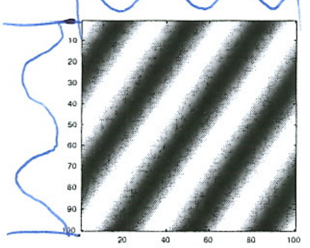
Řešení 1: "floor" má střední hodnotu $a = \frac{\Delta}{2}$, stejný rozptyl jako "round", tedy výkon: $P_e = D + a^2 = \frac{\Delta^2}{12} + \left(\frac{\Delta}{2}\right)^2 = \frac{\Delta^2}{12} + \frac{\Delta^2}{4} = \frac{\Delta^2}{3}$

Řešení 2 viz B!

Příklad 19 Navrhněte obrazový filtr (2D filtr, masku, konvoluční jádro, ...) o rozměrech 5×5, který bude **zaostřovat** obrázek. Můžete napsat, nakreslit, nebo vysvětlit slovně.

viz B (sorry...)

Příklad 20 Obrázek má rozměry $K = 100$ řádků a $L = 100$ sloupců. Bílá má hodnotu 1. Určete, které koeficienty $X[m, n]$ jeho 2D-DFT budou nenulové. Pro m i n se zaměřte pouze na interval od 0 do 50. Pomůcka: pokud obrázek není úplně černý, nemůže být $X[0, 0]$ nula.



2 periody svisle,
3 periody vodorovně

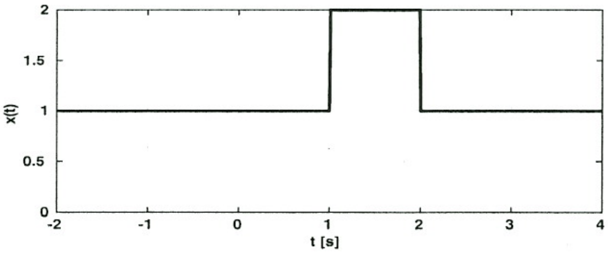
$X[0, 0]$

$X[2, 3]$

Semestrální zkouška ISS, 2. opravný termín, 28.1.2020, skupina B

Login: .... Příjmení a jméno: .... Podpis: ....
(prosím čitelně!)

Příklad 1 Na obrázku je signál se spojitým časem $x(t)$. Nakreslete do stejného obrázku signál $y(t) = x(t) - 1$.



viz A

Příklad 2 Periodický signál se spojitým časem má periodu $T_1 = 4$ ms. Jedna perioda je definována takto: $x(t) = \begin{cases} 1 & \text{pro } 0 \le t < 1 \text{ ms} \\ -1 & \text{pro } 1 \text{ ms} \le t < 4 \text{ ms} \end{cases}$. Určete jeho nultý koeficient Fourierovy řady.

viz A

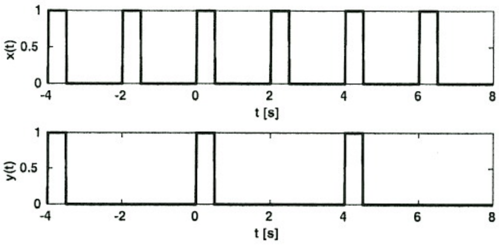
$c_0 =$...........

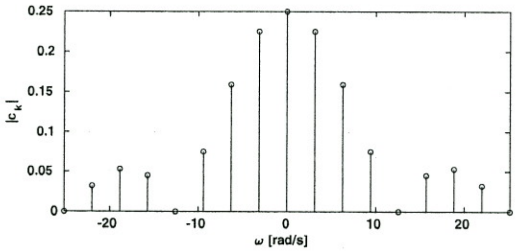
Příklad 3 Na podlaze se otáčí dětská hračka "káča" o poloměru 0.04 m, která má na okraji červený bod. Jedna otáčka trvá 0.1 s. Káča se zároveň pohybuje po kružnici o poloměru 0.5 m, jeden oběh trvá 5 s. Popište dráhu červeného bodu jako komplexní funkci času: $x(t)$. Podlahu pokládejte za komplexní rovinu, počáteční polohu a směr otáčení a oběhu neřešte, počátek zvolte tak, aby bylo řešení co nejjednodušší.

viz A

$x(t) =$...........................

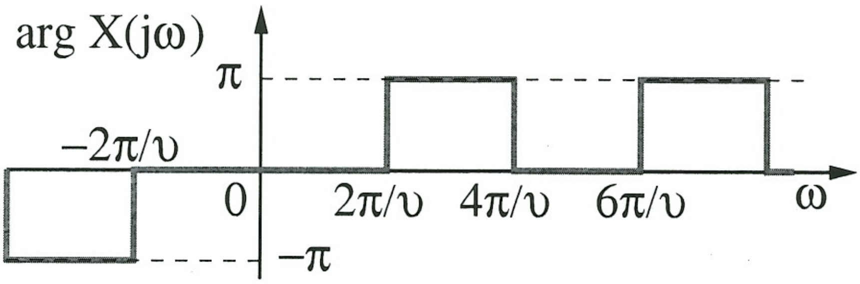
Příklad 4 Na levém obrázku jsou periodické signály $x(t)$ a $y(t)$. Signál $y(t)$ má oproti $x(t)$ dvakrát větší periodu. Vpravo jsou moduly koeficientů Fourierovy řady signálu $x(t)$ na odpovídajících frekvencích. Nakreslete do stejného obrázku moduly koeficientů FŘ signálu $y(t)$, také na odpovídajících frekvencích





viz A

Příklad 5 Na obrázku je argument spektrální funkce $X(j\omega)$ signálu $x(t)$. Nakreslete do stejného obrázku argument spektrální funkce $Y(j\omega)$ signálu $y(t)$, který vznikl posunutím signálu $x(t)$ takto: $y(t) = x(t + \frac{\vartheta}{10})$.



viz A

B

Příklad 6 Převeďte diferenciální rovnici systému se spojitým časem
$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 0.1\frac{dx(t)}{dt} + 0.2x(t) = \frac{d^2y(t)}{dt^2} - 0.2\frac{dy(t)}{dt} - 0.1y(t)$
na přenosovou funkci.

viz A

$H(s) = \frac{s^2 + 0{,}1s + 0{,}2}{s^2 - 0{,}2s - 0{,}1}$

Příklad 7 Nakreslete nebo matematicky zapište impulsní odezvu $h(t)$ libovolného **nekauzálního** systému se spojitým časem.

viz A

Příklad 8 Vzorkovací frekvence je F_s =100 kHz. Uveďte, jaká může být maximální frekvence obsažená ve spektru vzorkovaného signálu, pokud nemá docházet k aliasingu.

viz A

f_{max} =.......... kHz.

Příklad 9 Perioda periodického signálu s diskrétním časem $\tilde{x}[n]$ je $N = 10$ vzorků. Uveďte, jakou má tento signál základní frekvenci v Hz, pokud je vzorkovací frekvence F_s =8000 Hz.

f =........... Hz.

Příklad 10 Vztah pro Fourierovu transformaci s diskrétním časem (DTFT) diskrétního signálu $x[n]$ je $\tilde{X}(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$. Odvoďte vztah pro získání DTFT signálu zpožděného o jeden vzorek: $y[n] = x[n-1]$ ze spektrální funkce $\tilde{X}(e^{j\omega})$.

viz A, dá se řešit i tak, že pokud je $x[n]$ zpožděný o 1 vzorek, je proti němu komplex. exp $e^{-j\omega n}$ předběhnutá, tedy:

$\tilde{Y}(e^{j\omega}) = \sum_{n=\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega(n+1)} = \dots$ atd.

B

Příklad 11 Periodický signál s diskrétním časem má periodu $N = 4$ vzorky. Pro $n = [0 \ \ 1 \ \ 2 \ \ 3]$ jsou jeho hodnoty $x[n] = [1 \ \ 0 \ \ 0 \ \ 0]$. Vypočtěte všechny koeficienty jeho diskrétní Fourierovy řady (DFŘ)

viz A

$\tilde{X}[0] =$......... $\tilde{X}[1] =$......... $\tilde{X}[2] =$......... $\tilde{X}[3] =$.........

Příklad 12 Přenosová funkce číslicového filtru je $H(z) = \frac{1-0.5z^{-1}+0.25z^{-2}}{1+0.81z^{-2}}$. Napište jeho diferenční rovnici.

postup viz A

$y[n] =$ $x[n] - 0{,}5\,x[n-1] + 0{,}25\,x[n-2] - 0{,}81\,y[n-2]$

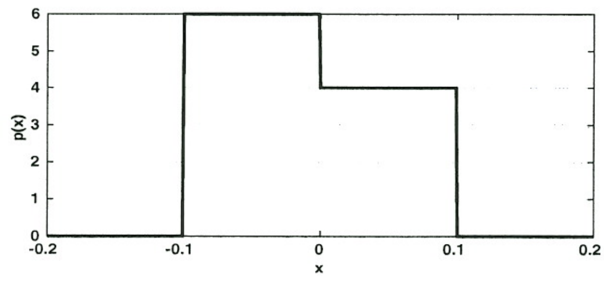
Příklad 13 Pro číslicový filtr napište vztah mezi jeho impulsní odezvou $h[n]$ a frekvenční charakteristikou $H(e^{j\omega})$.

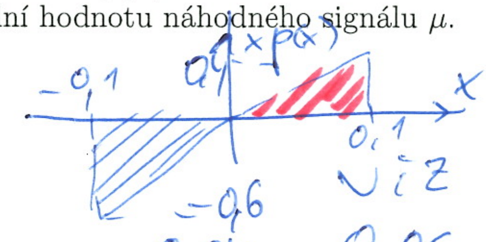
viz A

Příklad 14 Přenosová funkce číslicového filtru je $H(z) = 1 - z^{-1}$. Nakreslete přibližný průběh modulu frekvenční charakteristiky tohoto filtru $|H(e^{j\omega})|$ pro normované kruhové frekvence ω od 0 do π rad a určete typ filtru: dolní propusť, horní propusť, pásmová propusť nebo pásmová zádrž.

viz A

Příklad 15 Průběh funkce hustoty pravděpodobnosti $p(x)$ stacionárního náhodného signálu je na obrázku. Vypočtěte na základě této funkce hustoty střední hodnotu náhodného signálu μ.





viz A

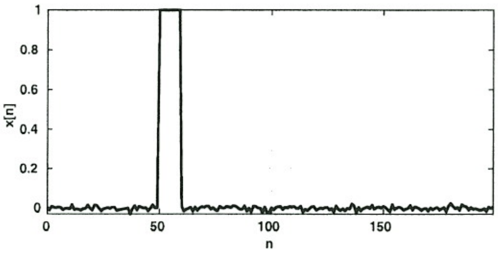
$\mu = \frac{0{,}04}{2} - \frac{0{,}06}{2} = \underline{\underline{-0{,}01}}$

B

Příklad 16 Pole `x` v jazyce C má `N = 1000` prvků a obsahuje jednu realizaci ergodického náhodného signálu. Napište kód pro časový odhad rozptylu D. Můžete použít jen `+`, `-`, `*`, `/`, `^`, žádné statistické funkce.

viz A

Příklad 17 Na obrázku je průběh náhodného signálu $x[n]$. Nakreslete přibližně průběh jeho korelačních koeficientů $R[k]$ pro k od -150 do +150. Použijte vychýlený odhad. Na absolutní velikosti koeficientů nezáleží.



viz A

Příklad 18 Rozestup kvantovaích hladin při kvantování je Δ. Pokud kvantujeme zaokrouhlením na neblížší hladinu ("round"), je střední výkon chyby kvantování $P_e = \frac{\Delta^2}{12}$. Odvoďte vztah pro výpočet středního výkonu chyby kvantování P_e pro případ, že zaokrouhlujeme na nejbližší nižší kvantovací hladinu ("floor").

Řešení 1 viz A.

Řešení 2: výkon je očekávání (expectation) hodnoty signálu na druhou (bez ustředění!), tedy

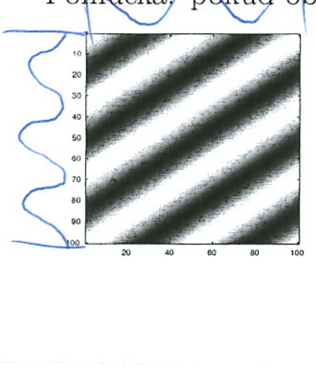
$$P_e = \int_0^{\Delta} g^2 p(g)\,dg = \frac{1}{\Delta}\left[\frac{g^3}{3}\right]_0^{\Delta} = \frac{1}{\Delta}\left[\frac{\Delta^3}{3} - 0\right] = \underline{\underline{\frac{\Delta^2}{3}}}$$

Příklad 19 Navrhněte obrazový filtr (2D filtr, masku, konvoluční jádro, ...) o rozměrech 5×5, který bude **zaostřovat** obrázek. Můžete napsat, nakreslit, nebo vysvětlit slovně.

Musí zvýrazňovat rozdíly v obou směrech, takže třeba takto:

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & -2 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -3 & -2 & -1 \\ -2 & -3 & 40 & -3 & -2 \\ -1 & -2 & -3 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Příklad 20 Obrázek má rozměry $K = 100$ řádků a $L = 100$ sloupců. Bílá má hodnotu 1. Určete, které koeficienty $X[m, n]$ jeho 2D-DFT budou nenulové. Pro m i n se zaměřte pouze na interval od 0 do 50. Pomůcka: pokud obrázek není úplně černý, nemůže být $X[0, 0]$ nula.



3 periody svisle,
2 periody vodorovně

$X[0, 0]$

$X[3, 2]$