Semestrální zkouška ISS, řádný termín, 13.1.2021, skupina poledne

Login: .... Příjmení a jméno: .... Podpis: ....
(čitelně!)

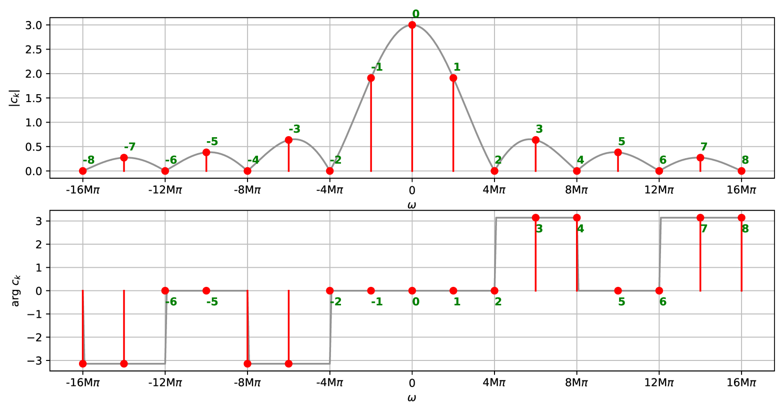
Příklad 1 Signál se spojitým časem je dán jako: $x(t) = \begin{cases} t & \text{pro} \quad 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$
Nakreslete tento signál a do stejného obrázku nakreslete signál $y(t) = x(-t-2)$.

Příklad 2 Periodický signál se spojitým časem má periodu T_1. Jedna jeho perioda je dána jako:
$x(t) = \begin{cases} A & \text{pro} \quad 0 < t \leq \frac{T_1}{4} \\ -A & \text{pro} \quad \frac{T_1}{4} < t \leq \frac{T_1}{2} \\ 0 & \text{pro} \quad \frac{T_1}{2} < t \leq T_1 \end{cases}$, kde A je konstanta. Odvoďte vztah pro střední výkon tohoto signálu.

$P_s =$ ....

Příklad 3 Signál se spojitým časem je komplexní exponenciála: $x(t) = e^{j\frac{\pi}{2}} e^{-j20\pi t}$. Nakreslete ji jako 3D graf, ve kterém bude reálná osa, imaginární osa a časová osa. Do obrázku jasně vyznačte bod $x(0)$ a napište jeho hodnotu jako komplexní číslo v exponenciálním tvaru.

Příklad 4 Na obrázku jsou koeficienty Fourierovy řady signálu $x(t)$. Nakreslete do stejného obrázku koeficienty Fourierovy řady signálu $y(t) = x(t) - 3$



Příklad 5 Koeficienty Fourierovy řady signálu $x(t)$ s periodou $T_1 = 10$ ms jsou
$c_1 = e^{j\frac{\pi}{2}}, \quad c_{-1} = e^{-j\frac{\pi}{2}}, \quad c_2 = 0.1, \quad c_{-2} = 0.1.$
Nakreslete co nejpřesněji signál $x(t)$ od 0 do T_1.

Příklad 6 Signál se spojitým časem je dán jako: $x(t) = \begin{cases} 1 - \frac{t}{3} & \text{pro } \ 0 \leq t \leq 3 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$

Vypočtěte $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t-2)dt$, kde $\delta(t)$ je Diracův impuls.

Příklad 7 Spektrální funkce signálu se spojitým časem má tvar obdélníka:
$X(j\omega) = \begin{cases} 5 & \text{pro } \ -100\pi \text{ rad/s} \leq \omega \leq +100\pi \text{ rad/s} \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$. Pomocí inverzní Fourierovy transformace spočítejte odpovídající signál $x(t)$: zapište jej výrazem a nakreslete, na osách označte důležité hodnoty.

$x(t) =$ ....

Příklad 8 Přenosová funkce systému se spojitým časem $H(s)$ má dva nulové body a jeden pól:
$n_1 = -1 + j2000, \quad n_2 = -1 - j2000, \quad p_1 = -1$. Do systému vstupuje signál $x(t) = A\cos(2000t)$. Napište vztah pro signál na výstupu. Pokud při výpočtu použijete zjednodušení, krátce je popište.

$y(t) =$ ....

Příklad 9 Do sekvence ideálního vzorkování a ideální rekonstrukce se vzorkovací frekvencí $F_s = 16$ kHz vstupuje cosinusovka na frekvenci 9 kHz. Není použitý anti-aliasignový filtr. Napište, co bude na výstupu, a krátce zdůvodněte.

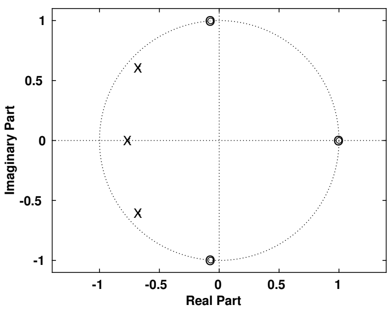
Příklad 10 Diskrétní signál $x[n]$ je všude nulový kromě jednoho vzorku: $x[2] = 1$. Vypočítejte a nakreslete modul i argument jeho Fourierovy transformace s diskrétním časem (DTFT) $\tilde{X}(e^{j\omega})$ pro interval normovaných kruhových frekvencí ω od $-\pi$ rad do $+\pi$ rad.

Příklad 11 Periodický signál s diskrétním časem $\tilde{x}[n]$ má periodu $N = 8$ vzorků a koeficienty diskrétní Fourierovy řady $\tilde{X}[1] = 40e^{j\frac{\pi}{2}}$ a $\tilde{X}[7] = 40e^{-j\frac{\pi}{2}}$, ostatní jsou nulové. Nakreslete signál $\tilde{x}[n]$.

Příklad 12 Je spočítána Diskrétní Fourierova transformace (DFT) $X[k]$ reálného diskrétního signálu $x[n]$ o délce $N = 256$ vzorků a jsou ponechány pouze koeficienty $X[0] \ldots X[127]$. Napište, zda zůstalo dost informace pro přesnou rekonstrukci původního signálu $x[n]$ a krátce zdůvodněte.

Příklad 13 Napište v C nebo v Pythonu (numpy) kód pro výpočet Diskrétní Fourierovy transformace (DFT). Vstupem je pole `x` o délce `N` vzorků. Výstupem je pole `Xr` s reálnými složkami výstupu a pole `Xi` s imaginárními složkami výstupu, obě o délce `N`. Smíte použít pouze funkce `sin` a `cos`, nesmíte použít komplexní proměnné. Proměnné `x, Xr, Xi, N` již nemusíte definovat.

Příklad 14 Na obrázku je rozmístění nulových bodů a pólů přenosové funkce číslicového filtru IIR. Nakreslete přibližně modul jeho frekvenční charakteristiky pro interval normovaných kruhových frekvencí ω od 0 do $+\pi$ rad.



Příklad 15 Číslicový filtr IIR druhého řádu má přenosovou funkci $H(z) = \frac{1}{1+2z^{-1}+2z^{-2}}$.
Určete, zda je stabilní. Pomůcka: řešení kvadratické rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ jsou $x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

Příklad 16 Funkce hustoty pravděpodobnosti stacionárního náhodného signálu je dána jako $p(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta} & \text{pro } \ 0 \leq x \leq \Delta \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$. Odvoďte vztah pro střední výkon tohoto signálu.
Pomůcka: $P_s = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x) dx$.

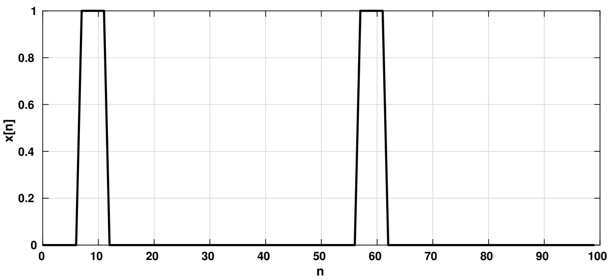
$P_s =$ ....

Příklad 17 Na $\Omega = 4000$ realizacích náhodného procesu byla naměřena tabulka (sdružený histogram) hodnot mezi časy n_1 a n_2. Spočítejte korelační koeficient $R[n_1, n_2]$. Pomůcka: Jako reprezentativní hodnoty x_1 a x_2 při numerickém výpočtu integrálu $R[n_1, n_2] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 p(x_1, x_2, n_1, n_2) dx_1 dx_2$ použijte středy intervalů v tabulce.

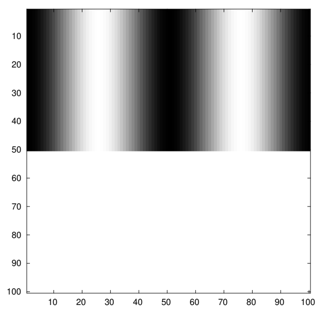
intervaly	intervaly x_2			
x_1	[-20, -10]	[-10, 0]	[0, 10]	[10, 20]
[10, 20]	500	0	0	0
[0, 10]	0	1500	0	0
[-10, 0]	0	0	1500	0
[-20, -10]	0	0	0	500

$R[n_1, n_2] =$................

Příklad 18 Na obrázku je průběh náhodného signálu $x[n]$ o délce 100 vzorků. Impulsy jsou široké 5 vzorků a mají výšku 1. Nakreslete průběh autokorelačních koeficientů $R[k]$ získaných vychýleným odhadem pro $k = -99 \ldots 99$.



Příklad 19 Napište kód (C nebo Python/numpy) pro generování obrázku $x[k,l]$ o rozměrech 100×100 pixelů. Na rozdíl od přednášek je bílá barva nula, černá maximum (1). Kód musí obsahovat volání funkce `cos`. Dvourozměrné pole `x` je již alokováno, zobrazováním se nemusíte zabývat.



Příklad 20 Navrhněte konvoluční jádro (2D filtr) o rozměrech 3×3, které bude v obrázku zvýrazňovat šikmé hrany jdoucí z levého dolního rohu do horního pravého rohu (např. velkou ručičku ukazující na 7.5 minuty na klasickém ciferníku).