

Semestrální zkouška ISS, řádný termín, 13.1.2021, skupina večer

Login: Příjmení a jméno: Podpis:
(čitelně!)

Příklad 1 Signál se spojitým časem je dán jako: $x(t) = \begin{cases} t & \text{pro } 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$

Nakreslete tento signál a do stejného obrázku nakreslete signál $y(t) = x(\frac{t}{2}) + 1$.

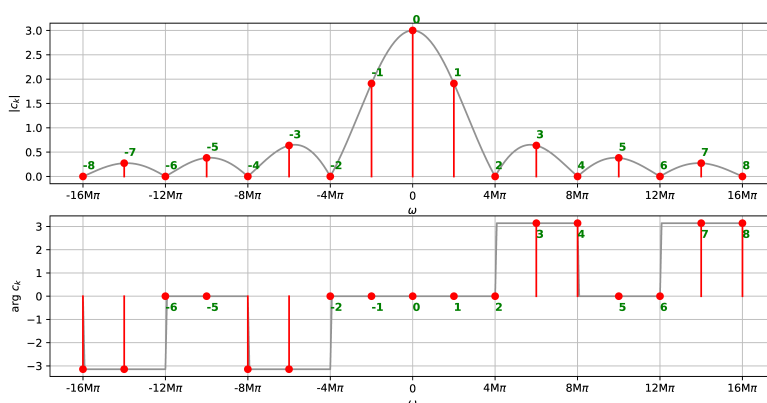
Příklad 2 Periodický signál se spojitým časem má periodu T_1 . Jedna jeho perioda je dána jako:

$x(t) = \begin{cases} A \cos(\frac{2\pi}{T_1}t) & \text{pro } 0 < t \leq \frac{T_1}{2} \\ 0 & \text{pro } \frac{T_1}{2} < t \leq T_1 \end{cases}$, kde A je konstanta. Odvoďte vztah pro střední výkon tohoto signálu.

$P_s = \dots\dots\dots$

Příklad 3 Signál se spojitým časem je komplexní exponenciála: $x(t) = e^{-j\frac{\pi}{4}}e^{j20\pi t}$. Nakreslete ji jako 3D graf, ve kterém bude reálná osa, imaginární osa a časová osa. Do obrázku jasně vyznačte bod $x(0)$ a napište jeho hodnotu jako komplexní číslo v exponenciálním tvaru.

Příklad 4 Na obrázku jsou koeficienty Fourierovy řady signálu $x(t)$. Nakreslete do stejného obrázku koeficienty Fourierovy řady signálu $y(t) = x(t) + 1$



Příklad 5 Koeficienty Fourierovy řady signálu $x(t)$ s periodou $T_1 = 10$ ms jsou $c_1 = 2e^{-j\frac{\pi}{2}}$, $c_{-1} = 2e^{+j\frac{\pi}{2}}$, $c_2 = 0.1$, $c_{-2} = 0.1$. Nakreslete co nej přesněji signál $x(t)$ od 0 do T_1 .

Příklad 6 Signál se spojitým časem je dán jako: $x(t) = \begin{cases} 1 - \frac{t}{3} & \text{pro } 0 \leq t \leq 3 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$

Vypočtěte $\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t-4)dt$, kde $\delta(t)$ je Diracův impuls.

Příklad 7 Spektrální funkce signálu se spojitým časem má tvar obdélníka:

$X(j\omega) = \begin{cases} 5 & \text{pro } -1000\pi \text{ rad/s} \leq \omega \leq +1000\pi \text{ rad/s} \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$. Pomocí inverzní Fourierovy transformace spočítejte

odpovídající signál $x(t)$: запиšte jej výrazem a nakreslete, na osách označte důležité hodnoty.

$x(t) = \dots\dots\dots$

Příklad 8 Přenosová funkce systému se spojitým časem $H(s)$ má dva nulové body a jeden pól:

$n_1 = -1 + j4000$, $n_2 = -1 - j4000$, $p_1 = -1$. Do systému vstupuje signál $x(t) = A \cos(4000t)$. Napište vztah pro signál na výstupu. Pokud při výpočtu použijete zjednodušení, krátce je popište.

$y(t) = \dots\dots\dots$

Příklad 9 Do sekvence ideálního vzorkování a ideální rekonstrukce se vzorkovací frekvencí $F_s = 16$ kHz vstupuje kosinuská vlna na frekvenci 9 kHz. Je použitý anti-aliasingový filtr. Napište, co bude na výstupu, a krátce zdůvodněte.

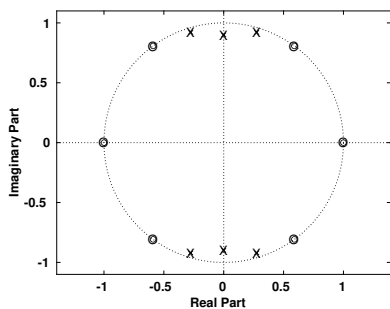
Příklad 10 Diskrétní signál $x[n]$ je všude nulový kromě jednoho vzorku: $x[3] = 2$. Vypočítejte a nakreslete modul i argument jeho Fourierovy transformace s diskrétním časem (DTFT) $\tilde{X}(e^{j\omega})$ pro interval normovaných kruhových frekvencí ω od $-\pi$ rad do $+\pi$ rad.

Příklad 11 Periodický signál s diskretním časem $\tilde{x}[n]$ má periodu $N = 8$ vzorků a koeficienty diskretní Fourierovy řady $\tilde{X}[1] = 8e^{-j\frac{\pi}{4}}$ a $\tilde{X}[7] = 8e^{j\frac{\pi}{4}}$, ostatní jsou nulové. Nakreslete signál $\tilde{x}[n]$.

Příklad 12 Je spočítána Diskretní Fourierova transformace (DFT) $X[k]$ reálného diskretního signálu $x[n]$ o délce $N = 256$ vzorků a jsou ponechány pouze koeficienty $X[0] \dots X[128]$. Napište, zda zůstalo dost informace pro přesnou rekonstrukci původního signálu $x[n]$ a krátce zdůvodněte.

Příklad 13 Napište v C nebo v Pythonu (numpy) kód pro výpočet Diskretní Fourierovy transformace (DFT). Vstupem je pole \mathbf{x} o délce N vzorků. Výstupem je pole \mathbf{Xr} s reálnými složkami výstupu a pole \mathbf{Xi} s imaginárními složkami výstupu, obě o délce N . Smíte použít pouze funkce `sin` a `cos`, nesmíte použít komplexní proměnné. Proměnné \mathbf{x} , \mathbf{Xr} , \mathbf{Xi} , N již nemusíte definovat.

Příklad 14 Na obrázku je rozmístění nulových bodů a pólů přenosové funkce číslicového filtru IIR. Nakreslete přibližně modul jeho frekvenční charakteristiky pro interval normovaných kruhových frekvencí ω od 0 do $+\pi$ rad.



Příklad 15 Číslicový filtr IIR druhého řádu má přenosovou funkci $H(z) = \frac{1}{1+4z^{-2}}$. Určete, zda je stabilní. Pomůcka: řešení kvadratické rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ jsou $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Příklad 16 Funkce hustoty pravděpodobnosti stacionárního náhodného signálu je dána jako

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta} & \text{pro } -\Delta \leq x \leq 0 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases} . \text{ Odvoďte vztah pro střední výkon tohoto signálu.}$$

Pomůcka: $P_s = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x) dx$.

$P_s = \dots\dots\dots$

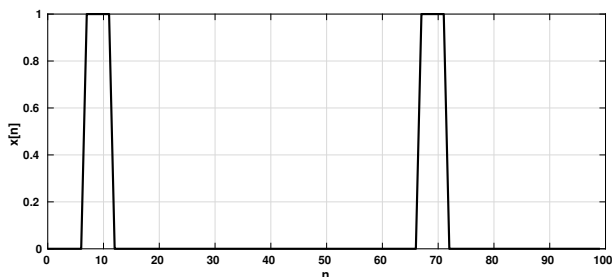
Příklad 17 Na $\Omega = 4000$ realizacích náhodného procesu byla naměřena tabulka (sdružený histogram) hodnot mezi časy n_1 a n_2 . Spočítejte korelační koeficient $R[n_1, n_2]$.

Pomůcka: Jako reprezentativní hodnoty x_1 a x_2 při numerickém výpočtu integrálu $R[n_1, n_2] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 p(x_1, x_2, n_1, n_2) dx_1 dx_2$ použijte středy intervalů v tabulce.

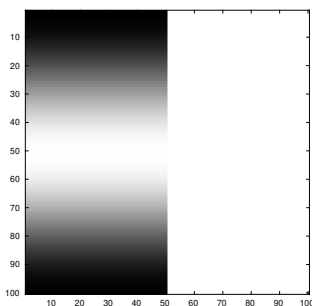
intervaly x_1	intervaly x_2			
	[-20, -10]	[-10, 0]	[0, 10]	[10, 20]
[10, 20]	0	0	0	1000
[0, 10]	0	0	1000	0
[-10, 0]	0	1000	0	0
[-20, -10]	1000	0	0	0

$R[n_1, n_2] = \dots\dots\dots$

Příklad 18 Na obrázku je průběh náhodného signálu $x[n]$ o délce 100 vzorků. Impulsy jsou široké 5 vzorků a mají výšku 1. Nakreslete průběh autokorelačních koeficientů $R[k]$ získaných vychýleným odhadem pro $k = -99 \dots 99$.



Příklad 19 Napište kód (C nebo Python/numpy) pro generování obrázku $x[k, l]$ o rozměrech 100×100 pixelů. Na rozdíl od přednášek je bílá barva nula, černá maximum (1). Kód musí obsahovat volání funkce `cos`. Dvourozměrné pole `x` je již alokováno, zobrazováním se nemusíte zabývat.



Příklad 20 Navrhněte konvoluční jádro (2D filtr) o rozměrech 3×3 , které bude v obrázku zvýrazňovat šikmé hrany jdoucí z levého dolního rohu do horního pravého rohu (např. velkou ručičku ukazující na 7.5 minuty na klasickém ciferníku).