Semestrální zkouška ISS/ISSk, řádný termín, 15.1.2024, skupina A

Login: .... Příjmení a jméno: .... Podpis: ....
(prosím čitelně!)

Příklad 1 V tabulce jsou dány dva diskrétní signály o délce $N = 3$. Vypočtěte a zapište všechny nenulové vzorky jejich lineární konvoluce $y[n] = x_1[n] \star x_2[n]$. Pozor, tabulku budete možná muset rozšířit.

n	0	1	2	3	4
$x_1[n]$	1	2	3		
$x_2[n]$	1	-1	1		
$y[n]$	1	1	2	-1	3

Příklad 2 Napište podmínku, kterou musí splňovat impulsní odezva $h[n]$ kauzálního číslicového filtru.

$h[n] = 0$ pro $n < 0$.

Příklad 3 Je dán číslicový filtr 4. řádu s přenosovou funkcí $H(z) = \frac{1+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}+b_3z^{-3}+b_4z^{-4}}{1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}+a_3z^{-3}+a_4z^{-4}}$. Pro jeho implementaci máte k disposici jen bloky 2. řádu, které můžete řetězit za sebou. Jeden blok 2. řádu má přenosovou funkci $H_k(z) = \frac{1+b_{k1}z^{-1}+b_{k2}z^{-2}}{1+a_{k1}z^{-1}+a_{k2}z^{-2}}$. Kolik takových bloků budete potřebovat a jak určíte jejich koeficienty a_{ki}, b_{ki} ? Není potřeba psát veškerou matematiku, stačí popsat základní myšlenku.

$$H(z) = \boxed{\frac{(z-n_1)(z-n_2)}{(z-p_1)(z-p_2)}}\,\boxed{\frac{(z-n_3)(z-n_4)}{(z-p_3)(z-p_4)}}$$

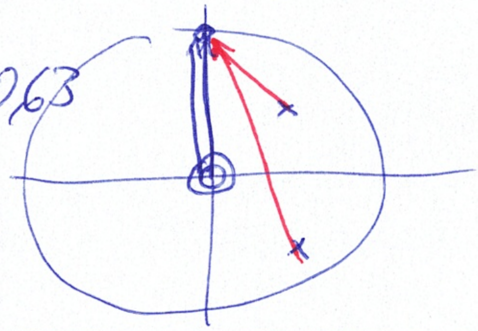
2 bloky

$\downarrow b_{11}, b_{12}, a_{11}, a_{12}$ $\qquad$ $\downarrow b_{21}, b_{22}, a_{21}, a_{22}$

1. faktorizace
2. výběr kompl. sdružených nul a pólů
3. převod na koef. filtrů

Příklad 4 Číslicový filtr má dva nulové body: $n_1 = 0$ a $n_2 = 0$ a dva póly: $p_1 = 0.5+0.5j$ a $p_2 = 0.5-0.5j$. Určete modul jeho frekvenční charakteristiky na normované kruhové frekvenci $\omega_1 = \frac{\pi}{2}$ rad.
Pomůcka: $\frac{1}{\sqrt{0.5^2+0.5^2}} = 1.41$, $\qquad \frac{1}{\sqrt{0.5^2+1.5^2}} = 0.63$.

$$|H| = \frac{1 \cdot 1}{\sqrt{0{,}5^2+0{,}5^2} \cdot \sqrt{0{,}5^2+1{,}5^2}} = 1{,}41 \cdot 0{,}63$$



$|H(e^{j\omega_1})| = $ 0,84 (přesně 0,894...)

Příklad 5 V programu byla odhadnuta funkce hustoty rozdělení pravděpodobnosti $p(x)$. Její hodnoty jsou uloženy v poli `px`, které má `N` prvků. Hodnoty parametru x jsou uloženy v poli `x`, které má také `N` prvků. Hodnoty v `x` stoupají rovnoměrně, vzdálenost mezi nimi je v proměnné `Delta`. Napište kód v C, Python/Numpy nebo pseudokód pro určení střední hodnoty.

$$a = \int_{-\infty}^{\infty} x\, p(x)\, dx$$

a = Delta * np.sum(x * px)

nebo Delta * np.dot(x, px), atd.

A

Příklad 6 Ve vektoru $\mathbf{x}$ o délce `N = 200` jsou vzorky ergodického náhodného signálu (pozor, v minulém cvičení byl x parametr funkce hustoty, teď je to signál). Máte k disposici funkce pro výpočet FFT a autokorelace. Napište kód v C, Python/Numpy nebo pseudokód pro odhad a zobrazení spektrální hustoty výkonu $G_x(e^{j\omega})$ pro normované kruhové frekvence ω od 0 rad do π rad.

```
X = np.fft(x)
G = X * np.conj(X)/N
om = np.linspace(0,np.pi,N/2)
plot(om, G[0:(N/2)])
```

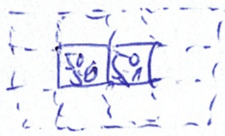
další možné řešení v B

Příklad 7 Popište, jak se liší 2D-DFT $X[m,n] = \sum_{k=0}^{K-1}\sum_{l=0}^{L-1} x[k,l]e^{-j2\pi\left(\frac{mk}{K}+\frac{nl}{L}\right)}$ od 2D-DCT $X[m,n] = \sum_{k=0}^{K-1}\sum_{l=0}^{L-1} x[k,l]\cos\left[\frac{\pi}{K}(k+\frac{1}{2})m\right]\cos\left[\frac{\pi}{L}(l+\frac{1}{2})n\right]$. Zaměřte se na charakter a frekvence bází a na charakter a případné symetrie ve výstupu $X[m,n]$.

	2D-DFT	2D-DCT
báze	komplexní	reálné
frekvence bází	dvojnásobek předchozí	1,5 násobek předcho
výstup	K×L komplexních čísel, spousta symetrií	K×L reálných čísel, žádné symetrie

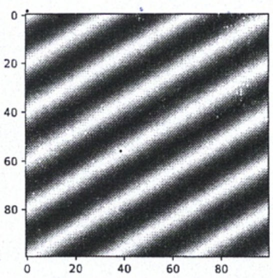
---

Příklad 8 Obrázek $x[k,l]$ o rozměrech $K = 100$ krát $L = 100$ pixelů obsahuje dva bílé pixely: $x[50,50] = 1$, $x[50,51] = 1$, ostatní jsou nulové. Obrázek je filtrován 2D-filtrem (maskou, konvolučním jádrem) o rozměrech 3×3, jehož všechny prvky mají hodnotu $\frac{1}{9}$. Určete počet nenulových pixelů ve výsledném obrázku.



12 nenulových pixelů

Příklad 9 Na obrázku je zobrazena reálná složka báze 2D-DFT $X[m,n] = \sum_{k=0}^{K-1}\sum_{l=0}^{L-1} x[k,l]e^{-j2\pi\left(\frac{mk}{K}+\frac{nl}{L}\right)}$. Černá odpovídá hodnotě -1, bílá +1. Určete, který koeficient 2D-DFT $X[m,n]$ bude tato báze počítat.



počet period svisle

počet period vodorovně

$m = $ 5, $n = $ 3

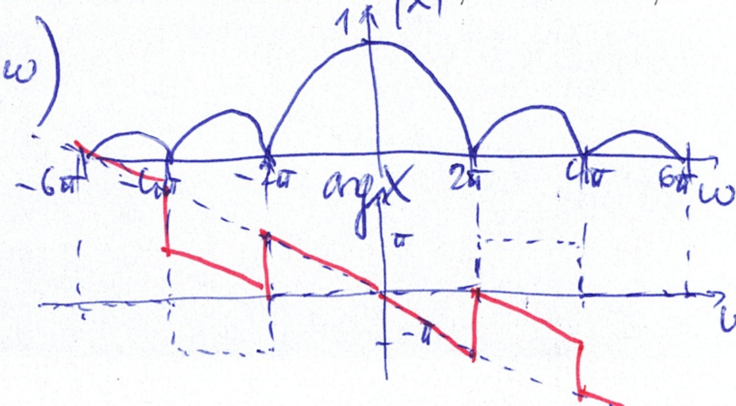
Příklad 10 Nakreslete do obrázků pod sebe modulovou i argumentovou část spektrální funkce $X(j\omega)$ signálu se spojitým časem – posunutého obdélníkového impulsu: $x(t) = \begin{cases} 1 & \text{pro } 0 \le t \le 1 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$.

Všechny časy jsou v sekundách. Doporučuji kreslit pro kruhovou frekvenci ω od -6π rad/s do $+6\pi$ rad/s. Osy řádně označte a uveďte přesně hodnoty na nich.

$X(j\omega) = D\tau\, \mathrm{sinc}\left(\frac{\tau}{2}\omega\right) = 1 \cdot 1\, \mathrm{sinc}\left(\frac{1}{2}\omega\right)$

$\frac{1}{2}\omega = \pi \quad \omega = 2\pi$

posun o $\tau = -0{,}5$ sec $\Rightarrow$ sklopení fáze o $-0{,}5\omega$



A

Příklad 11 V programu je pole X o rozměrech 512×512 naplněné hodnotami Laplaceovy transformace $X(s)$ signálu se spojitým časem $x(t)$ (signál nemáte k disposici). Reálná složka proměnné s byla vygerována jako 512 hodnot od -5 do +5 a určuje hlavní (řádkový) index pole X, imaginární složka proměnné s byla vygerována také jako 512 hodnot od -5 do +5 a určuje vedlejší (sloupcový) index pole X. Napište (kód nebo vysvětlení), jak naplníte vektor `Xjom`, kde bude spektrální funkce $X(j\omega)$ signálu $x(t)$.

$X(j\omega) = X(s)\Big|_{\text{pro } s=j\omega}$ musíme tedy vybrat hodnoty pro Re. složku 0 a "projít" všechny imaginární

Xjom = X[:, 256]

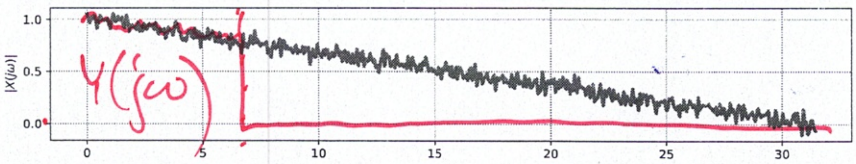
Příklad 12 Přenosová funkce systému se spojitým časem je $H(s) = \frac{0.5s-1}{0.5s+1}$.
Napište výraz pro frekvenční charakteristiku takového systému.

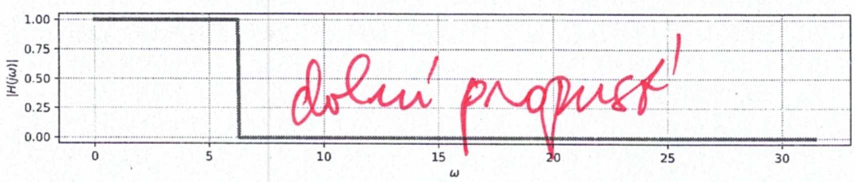
$H(j\omega) = \dfrac{0{,}5\,j\omega - 1}{0{,}5\,j\omega + 1}$

Příklad 13 Krátce vysvětlete, jak se v diferenciální rovnici popisující chování systému se spojitým časem mohou objevit derivace. Opsání diferenciální rovnice ze seznamu rovnic nebo pouhé uvedení příkladu diferenciální rovnice nepovažuji za vysvětlení.

např. proud kondenzátorem $i(t) = C\dfrac{du(t)}{dt}$, podobně pro induktnosti. Pokud je těchto komponentů více ⇒ derivace vyšších řádů. To stejné pro mechanické systémy, atd.

Příklad 14 Na prvním obrázku je modul spektrální funkce $X(j\omega)$ signálu na vstupu systému se spojitým časem. Na druhém obrázku je modul frekvenční charakteristiky systému $H(j\omega)$. Nakreslete modul spektrální funkce $Y(j\omega)$ na výstupu systému. Můžete kreslit do kteréhokoliv z obrázků.





$Y(j\omega) = X(j\omega) \cdot H(j\omega)$

součin

Příklad 15 Dokažte, že jednocestný usměrňovač $y(t) = \begin{cases} x(t) & \text{pro } x(t) \geq 0 \\ 0 & \text{pro } x(t) < 0 \end{cases}$ není lineární tak, že na příkladu ukážete porušení podmínky linearity: $x_1(t) \to y_1(t)$, $x_2(t) \to y_2(t)$ $\Rightarrow$ $ax_1(t) + bx_2(t) \to ay_1(t) + by_2(t)$.

např. $a = 1$, $b = 1$, $x_1(t) = 5$, $x_2(t) = -5$

$y_1(t) = 5$ $y_2(t) = 0$

$y(t)$ pro mix $ax_1(t) + bx_2(t) = 0$

mix $a \cdot y_1(t) + b\,y_2(t) = 1\cdot5 + 1\cdot0 = 5$

0 je nerovná se 5

⇒ nelineární

A

Příklad 16 Napište impulsní odezvu $h[n]$ diskrétního systému (číslicového filtru), který převrací hodnotu a zpožďuje vstup: $y[n] = -x[n-2]$.

n	0	1	2
$h[n]$	0	0	-1

Příklad 17 Odvoďte vztah pro numerický výpočet Fourierovy řady spojitého periodického signálu $x(t)$ s periodou T_1. Pomůcka: počítejte s tím, že máte navzorkovanou přesně jednu periodu signálu a že počet získaných vzorků je N. Pokud ve výsledku vyjde diskrétní Fourierova transformace (DFT), jasně ji vyznačte.

$$c_k = \frac{1}{T_1}\int_0^{T_1} x(t)\, e^{-jk\omega_1 t}\, dt = \frac{1}{N\cancel{T_s}} \sum_{n=0}^{N-1} \underbrace{x(nT_s)}_{x[n]}\, e^{-jk\frac{2\pi}{N\cancel{T_s}} n\cancel{T_s}}\, \cancel{T_s} =$$

základní kruhová frekvence $\frac{2\pi}{T_1}$

$$= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$$

numerická integrace

DFT

Příklad 18 Napište kód v C, Python/Numpy nebo pseudokód pro vygenerování signálu s diskrétním časem, který při přehrání na vzorkovací frekvenci $F_s = 44.1$ kHz bude cosinusovka na frekvenci $f_1 = 250$ Hz s trváním 2 sekundy. Výsledek nechť je v poli **x**. Určení počtu vzorků je součástí řešení.

```
Fs = 44100
n = np.arange(2 * Fs)
x = np.cos(2 * np.pi * 250/Fs * n)
```

normovaná kruhová frekvence

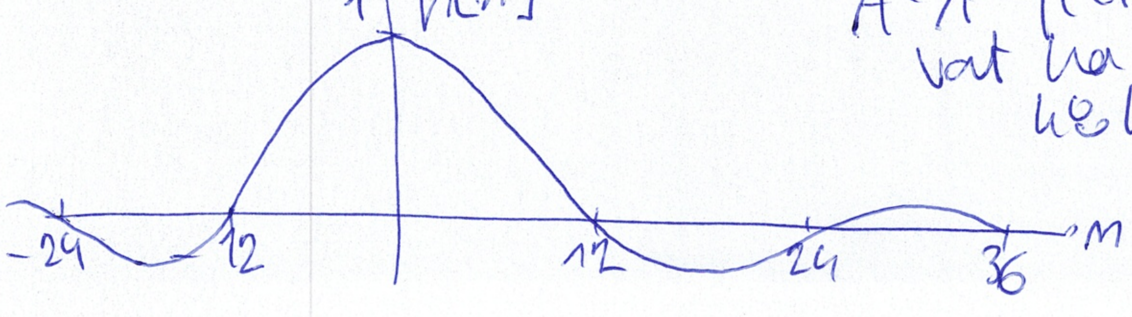
normovaná frekvence

Příklad 19 Napište matematicky navzorkovaný signál $x_s(t)$, který vznikne násobením vzorkovaného signálu $x(t)$ se vzorkovacím signálem $s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_s)$, kde T_s je vzorkovací perioda. Napsat $x_s(t) = x(t)s(t)$ nestačí, výsledek chci jako jednu sumu.

Diracy vzorkují signál pro násobky nT_s ...

$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_s)\, \delta(t - nT_s)$$

Příklad 20 Nakreslete impulsní odezvu $h_{aa}[n]$ anti-aliasingového filtru pro podvzorkování (downsampling) diskrétního signálu vzorkovaného na $F_{s1} = 48$ kHz na nižší vzorkovací frekvenci $F_{s2} = 4$ kHz. Přesně napište, na které vzorkovací frekvenci bude anti-aliasingový filtr pracovat, přesně popište osy v obrázku. 48/4 = 12 → každý 12. vzorek



A-A filtr musí pracovat na vyšší F_s = 48 kHz

Semestrální zkouška ISS/ISSk, řádný termín, 15.1.2024, skupina B

Login: .... Příjmení a jméno: .... Podpis: ....
(prosím čitelně!)

Příklad 1 V tabulce jsou dány dva diskrétní signály o délce $N = 3$. Vypočtěte a zapište všechny nenulové vzorky jejich lineární konvoluce $y[n] = x_1[n] \star x_2[n]$. Pozor, tabulku budete možná muset rozšířit.

n	0	1	2	3	4
$x_1[n]$	1	2	3		
$x_2[n]$	1	-1	-1		
$y[n]$	1	1	0	-5	-3

Příklad 2 Napište podmínku, kterou musí splňovat impulsní odezva $h[n]$ kauzálního číslicového filtru.

$h[n] = 0$ pro $n < 0$

Příklad 3 Je dán číslicový filtr 4. řádu s přenosovou funkcí $H(z) = \frac{1+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}+b_3z^{-3}+b_4z^{-4}}{1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}+a_3z^{-3}+a_4z^{-4}}$. Pro jeho implementaci máte k disposici jen bloky 2. řádu, které můžete řetězit za sebou. Jeden blok 2. řádu má přenosovou funkci $H_k(z) = \frac{1+b_{k1}z^{-1}+b_{k2}z^{-2}}{1+a_{k1}z^{-1}+a_{k2}z^{-2}}$. Kolik takových bloků budete potřebovat a jak určíte jejich koeficienty $a_{ki},\ b_{ki}$? Není potřeba psát veškerou matematiku, stačí popsat základní myšlenku.

viz A

Příklad 4 Číslicový filtr má dva nulové body: $n_1 = 0$ a $n_2 = 0$ a dva póly: $p_1 = 0.5+0.5j$ a $p_2 = 0.5-0.5j$. Určete modul jeho frekvenční charakteristiky na normované kruhové frekvenci $\omega_1 = \frac{\pi}{2}$ rad.
Pomůcka: $\frac{1}{\sqrt{0.5^2+0.5^2}} = 1.41$, $\frac{1}{\sqrt{0.5^2+1.5^2}} = 0.63$.

viz A

$|H(e^{j\omega_1})| =$ ....

Příklad 5 V programu byla odhadnuta funkce hustoty rozdělení pravděpodobnosti $p(x)$. Její hodnoty jsou uloženy v poli `px`, které má `N` prvků. Hodnoty parametru x jsou uloženy v poli `x`, které má také `N` prvků. Hodnoty v `x` stoupají rovnoměrně, vzdálenost mezi nimi je v proměnné `Delta`. Napište kód v C, Python/Numpy nebo pseudokód pro určení střední hodnoty.

viz A

další možné řešení v A B

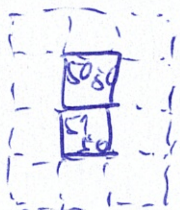
Příklad 6 Ve vektoru x o délce N = 200 jsou vzorky ergodického náhodného signálu (pozor, v minulém cvičení byl x parametr funkce hustoty, teď je to signál). Máte k disposici funkce pro výpočet FFT a autokorelace. Napište kód v C, Python/Numpy nebo pseudokód pro odhad a zobrazení spektrální hustoty výkonu $G_x(e^{j\omega})$ pro normované kruhové frekvence ω od 0 rad do π rad.

```
R = np.correlate(x)
R = np.fftshift(R) ← jako správné bereme i bez tohoto
om = np.linspace(0, np.pi, N)
G = np.fft(R)
plot(om, G[0:N])
nebo pro jistotu plot(om, np.real G[0:N])
```

Příklad 7 Popište, jak se liší 2D-DFT $X[m,n] = \sum_{k=0}^{K-1}\sum_{l=0}^{L-1} x[k,l]e^{-j2\pi\left(\frac{mk}{K}+\frac{nl}{L}\right)}$ od 2D-DCT $X[m,n] = \sum_{k=0}^{K-1}\sum_{l=0}^{L-1} x[k,l]\cos\left[\frac{\pi}{K}(k+\frac{1}{2})m\right]\cos\left[\frac{\pi}{L}(l+\frac{1}{2})n\right]$. Zaměřte se na charakter a frekvence bází a na charakter a případné symetrie ve výstupu $X[m,n]$.

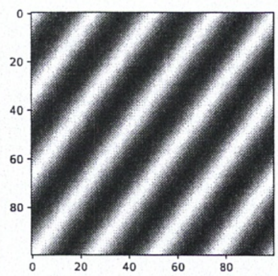
viz A

Příklad 8 Obrázek $x[k,l]$ o rozměrech $K = 100$ krát $L = 100$ pixelů obsahuje dva bílé pixely: $x[50,50] = 1$, $x[51,50] = 1$, ostatní jsou nulové. Obrázek je filtrován 2D-filtrem (maskou, konvolučním jádrem) o rozměrech 3×3, jehož všechny prvky mají hodnotu $\frac{1}{9}$. Určete počet nenulových pixelů ve výsledném obrázku.



12 nenulových pixelů

Příklad 9 Na obrázku je zobrazena reálná složka báze 2D-DFT $X[m,n] = \sum_{k=0}^{K-1}\sum_{l=0}^{L-1} x[k,l]e^{-j2\pi\left(\frac{mk}{K}+\frac{nl}{L}\right)}$. Černá odpovídá hodnotě -1, bílá +1. Určete, který koeficient 2D-DFT $X[m,n]$ bude tato báze počítat.



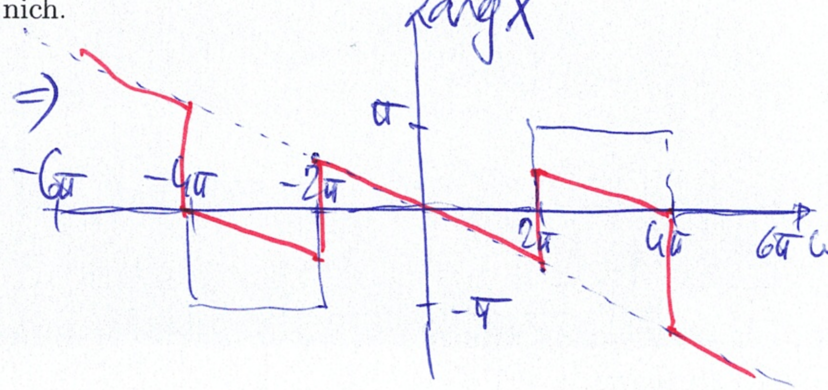
$m =$ 3, $n =$ 4 viz A

Příklad 10 Nakreslete do obrázků pod sebe modulovou i argumentovou část spektrální funkce $X(j\omega)$ signálu se spojitým časem – posunutého obdélníkového impulsu: $x(t) = \begin{cases} 1 & \text{pro} \quad -0.25 \le t \le 0.75 \\ 0 & \text{jinde}\end{cases}$.

Všechny časy jsou v sekundách. Doporučuji kreslit pro kruhovou frekvenci ω od -6π rad/s do $+6\pi$ rad/s. Osy řádně označte a uveďte přesné hodnoty na nich.

modul viz A

posun o $\tau = -0{,}25$ sec ⇒ sklopení fáze o $-0{,}25\omega$



3

Příklad 11 V programu je pole `X` o rozměrech 512×512 naplněné hodnotami Laplaceovy transformace $X(s)$ signálu se spojitým časem $x(t)$ (signál nemáte k disposici). Reálná složka proměnné s byla vygerována jako 512 hodnot od -5 do +5 a určuje hlavní (řádkový) index pole `X`, imaginární složka proměnné s byla vygerována také jako 512 hodnot od -5 do +5 a určuje vedlejší (sloupcový) index pole `X`. Napište (kód nebo vysvětlení), jak naplníte vektor `Xjom`, kde bude spektrální funkce $X(j\omega)$ signálu $x(t)$.

viz A

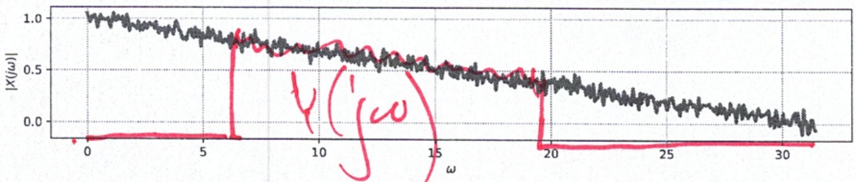
Příklad 12 Přenosová funkce systému se spojitým časem je $H(s) = \frac{s-1}{0.5s+1}$.
Napište výraz pro frekvenční charakteristiku takového systému.

$H(j\omega) = \frac{j\omega - 1}{0{,}5 j\omega + 1}$

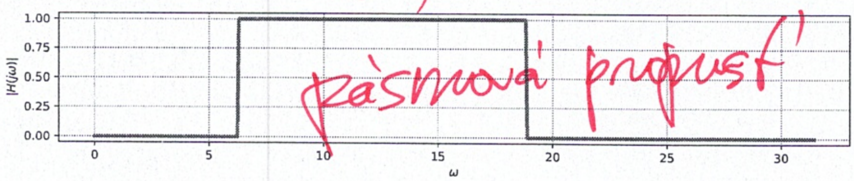
Příklad 13 Krátce vysvětlete, jak se v diferenciální rovnici popisující chování systému se spojitým časem mohou objevit derivace. Opsání diferenciální rovnice ze seznamu rovnic nebo pouhé uvedení příkladu diferenciální rovnice nepovažuji za vysvětlení.

viz A

Příklad 14 Na prvním obrázku je modul spektrální funkce $X(j\omega)$ signálu na vstupu systému se spojitým časem. Na druhém obrázku je modul frekvenční charakteristiky systému $H(j\omega)$. Nakreslete modul spektrální funkce $Y(j\omega)$ na výstupu systému. Můžete kreslit do kteréhokoliv z obrázků.



viz A



Příklad 15 Dokažte, že jednocestný usměrňovač $y(t) = \begin{cases} x(t) & \text{pro } x(t) \geq 0 \\ 0 & \text{pro } x(t) < 0 \end{cases}$ není lineární tak, že na příkladu ukážete porušení podmínky linearity: $x_1(t) \to y_1(t)$, $x_2(t) \to y_2(t) \quad \Rightarrow$ $ax_1(t) + bx_2(t) \to ay_1(t) + by_2(t)$.

viz A

B

Příklad 16 Napište impulsní odezvu $h[n]$ diskrétního systému (číslicového filtru), který převrací hodnotu a zpožďuje vstup: $y[n] = -x[n-3]$.

n	0	1	2	3
$h[n]$	0	0	0	-1

Příklad 17 Odvoďte vztah pro numerický výpočet Fourierovy řady spojitého periodického signálu $x(t)$ s periodou T_1. Pomůcka: počítejte s tím, že máte navzorkovanou přesně jednu periodu signálu a že počet získaných vzorků je N. Pokud ve výsledku vyjde diskrétní Fourierova transformace (DFT), jasně ji vyznačte.

viz A

Příklad 18 Napište kód v C, Python/Numpy nebo pseudokód pro vygenerování signálu s diskrétním časem, který při přehrání na vzorkovací frekvenci $F_s = 32000$ Hz bude cosinusovka na frekvenci $f_1 = 250$ Hz s trváním 2 sekundy. Výsledek nechť je v poli **x**. Určení počtu vzorků je součástí řešení.

$F_s = 32\,000$

dále viz A

Příklad 19 Napište matematicky navzorkovaný signál $x_s(t)$, který vznikne násobením vzorkovaného signálu $x(t)$ se vzorkovacím signálem $s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_s)$, kde T_s je vzorkovací perioda. Napsat $x_s(t) = x(t)s(t)$ nestačí, výsledek chci jako jednu sumu.

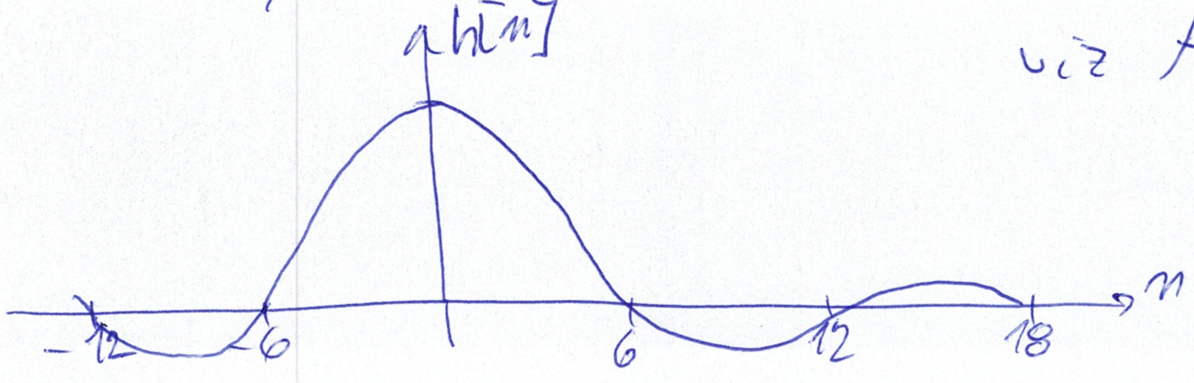
viz A

$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \dots\dots\dots\dots$$

Příklad 20 Nakreslete impulsní odezvu $h_{aa}[n]$ anti-aliasingového filtru pro podvzorkování (downsampling) diskrétního signálu vzorkovaného na $F_{s1} = 48$ kHz na nižší vzorkovací frekvenci $F_{s2} = 8$ kHz. Přesně napište, na které vzorkovací frekvenci bude anti-aliasingový filtr pracovat, přesně popište osy v obrázku.

$48/8 = 6$

viz A



Semestrální zkouška ISS/ISSk, řádný termín, 15.1.2024, skupina C

Login: .... Příjmení a jméno: .... Podpis: ....
(prosím čitelně!)

Příklad 1 V tabulce jsou dány dva diskrétní signály o délce $N = 3$. Vypočtěte a zapište všechny nenulové vzorky jejich lineární konvoluce $y[n] = x_1[n] \star x_2[n]$. Pozor, tabulku budete možná muset rozšířit.

n	0	1	2	3	4
$x_1[n]$	1	2	3		
$x_2[n]$	1	-1	-2		
$y[n]$	1	1	-1	-7	-6

Příklad 2 Napište podmínku, kterou musí splňovat impulsní odezva $h[n]$ nekauzálního číslicového filtru.

$h[n] \neq 0$ alespoň pro jeden vzorek $n < 0$ ✓

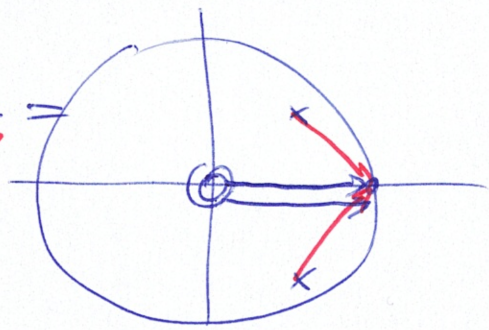
Příklad 3 Je dán číslicový filtr 4. řádu s přenosovou funkcí $H(z) = \frac{1+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}+b_3z^{-3}+b_4z^{-4}}{1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}+a_3z^{-3}+a_4z^{-4}}$. Pro jeho implementaci máte k disposici jen bloky 2. řádu, které můžete řetězit za sebou. Jeden blok 2. řádu má přenosovou funkci $H_k(z) = \frac{1+b_{k1}z^{-1}+b_{k2}z^{-2}}{1+a_{k1}z^{-1}+a_{k2}z^{-2}}$. Kolik takových bloků budete potřebovat a jak určíte jejich koeficienty a_{ki}, b_{ki} ? Není potřeba psát veškerou matematiku, stačí popsat základní myšlenku.

viz A

Příklad 4 Číslicový filtr má dva nulové body: $n_1 = 0$ a $n_2 = 0$ a dva póly: $p_1 = 0.5+0.5j$ a $p_2 = 0.5-0.5j$. Určete modul jeho frekvenční charakteristiky na normované kruhové frekvenci $\omega_1 = 0$ rad.
Pomůcka: $\frac{1}{\sqrt{0.5^2+0.5^2}} = 1.41$, $\frac{1}{\sqrt{0.5^2+1.5^2}} = 0.63$.

$$|H| = \frac{1 \cdot 1}{\sqrt{0{,}5^2+0{,}5^2} \cdot \sqrt{0{,}5^2+0{,}5^2}} =$$

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$$



$|H(e^{j\omega_1})| =$ ....2....

Příklad 5 V programu byla odhadnuta funkce hustoty rozdělení pravděpodobnosti $p(x)$. Její hodnoty jsou uloženy v poli `px`, které má `N` prvků. Hodnoty parametru x jsou uloženy v poli `x`, které má také `N` prvků. Hodnoty v `x` stoupají rovnoměrně, vzdálenost mezi nimi je v proměnné `Delta`. Napište kód v C, Python/Numpy nebo pseudokód pro určení střední hodnoty.

viz A

C

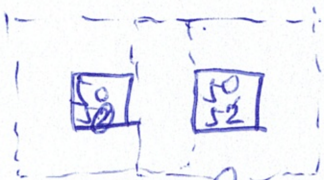
Příklad 6 Ve vektoru **x** o délce `N = 200` jsou vzorky ergodického náhodného signálu (pozor, v minulém cvičení byl x parametr funkce hustoty, teď je to signál). Máte k disposici funkce pro výpočet FFT a autokorelace. Napište kód v C, Python/Numpy nebo pseudokód pro odhad a zobrazení spektrální hustoty výkonu $G_x(e^{j\omega})$ pro normované kruhové frekvence ω od 0 rad do π rad.

viz A/B

Příklad 7 Popište, jak se liší 2D-DFT $X[m,n] = \sum_{k=0}^{K-1}\sum_{l=0}^{L-1} x[k,l]e^{-j2\pi\left(\frac{mk}{K}+\frac{nl}{L}\right)}$ od 2D-DCT $X[m,n] = \sum_{k=0}^{K-1}\sum_{l=0}^{L-1} x[k,l]\cos\left[\frac{\pi}{K}(k+\frac{1}{2})m\right]\cos\left[\frac{\pi}{L}(l+\frac{1}{2})n\right]$. Zaměřte se na charakter a frekvence bází a na charakter a případné symetrie ve výstupu $X[m,n]$.

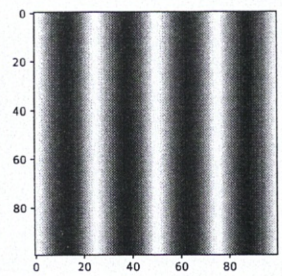
viz A

Příklad 8 Obrázek $x[k,l]$ o rozměrech $K = 100$ krát $L = 100$ pixelů obsahuje dva bílé pixely: $x[50,50] = 1$, $x[50,52] = 1$, ostatní jsou nulové. Obrázek je filtrován 2D-filtrem (maskou, konvolučním jádrem) o rozměrech 3×3, jehož všechny prvky mají hodnotu $\frac{1}{9}$. Určete počet nenulových pixelů ve výsledném obrázku.



15 nenulových pixelů

Příklad 9 Na obrázku je zobrazena reálná složka báze 2D-DFT $X[m,n] = \sum_{k=0}^{K-1}\sum_{l=0}^{L-1} x[k,l]e^{-j2\pi\left(\frac{mk}{K}+\frac{nl}{L}\right)}$. Černá odpovídá hodnotě -1, bílá +1. Určete, který koeficient 2D-DFT $X[m,n]$ bude tato báze počítat.

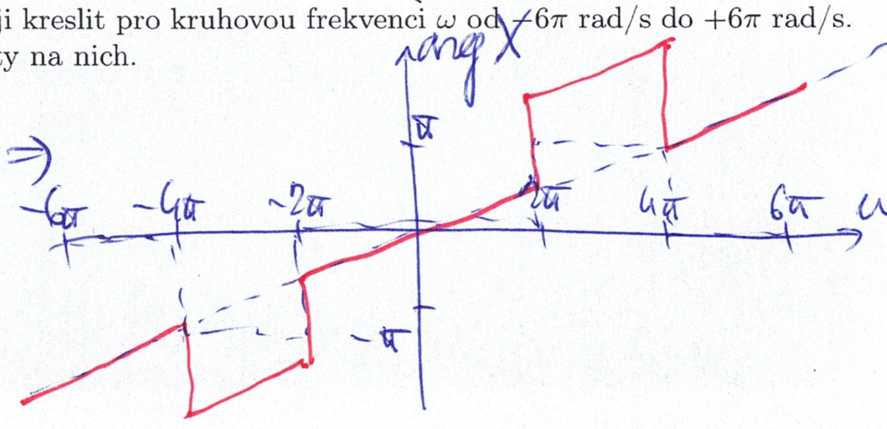


$m =$ 0, $n =$ 4   viz A

Příklad 10 Nakreslete do obrázků pod sebe modulovou i argumentovou část spektrální funkce $X(j\omega)$ signálu se spojitým časem – posunutého obdélníkového impulsu: $x(t) = \begin{cases} 1 & \text{pro} \quad -0.75 \le t \le 0.25 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$.

Všechny časy jsou v sekundách. Doporučuji kreslit pro kruhovou frekvenci ω od -6π rad/s do $+6\pi$ rad/s. Osy řádně označte a uveďte přesně hodnoty na nich.

modul viz A
posun o $\tau = +0{,}25$sec ⇒
vyklopení fáze o
$+0{,}25\omega$



C

Příklad 11 V programu je pole `X` o rozměrech 512×512 naplněné hodnotami Laplaceovy transformace $X(s)$ signálu se spojitým časem $x(t)$ (signál nemáte k disposici). Reálná složka proměnné s byla vygerována jako 512 hodnot od -5 do +5 a určuje hlavní (řádkový) index pole `X`, imaginární složka proměnné s byla vygerována také jako 512 hodnot od -5 do +5 a určuje vedlejší (sloupcový) index pole `X`. Napište (kód nebo vysvětlení), jak naplníte vektor `Xjom`, kde bude spektrální funkce $X(j\omega)$ signálu $x(t)$.

viz A

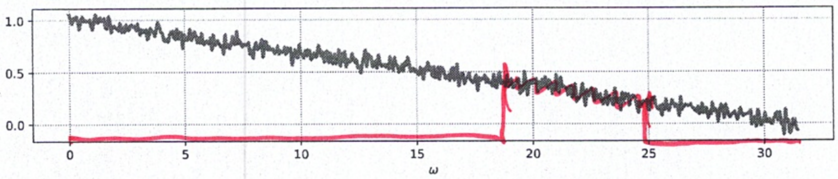
Příklad 12 Přenosová funkce systému se spojitým časem je $H(s) = \frac{0.5s-1}{s+1}$.
Napište výraz pro frekvenční charakteristiku takového systému.

$H(j\omega) = \frac{0{,}5\, j\omega - 1}{j\omega + 1}$

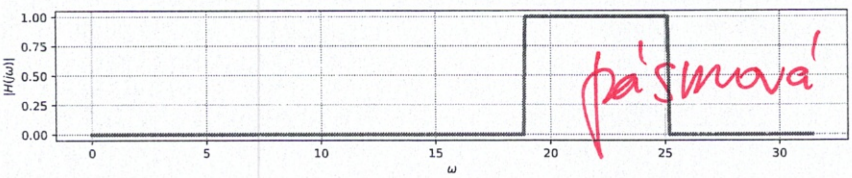
Příklad 13 Krátce vysvětlete, jak se v diferenciální rovnici popisující chování systému se spojitým časem mohou objevit derivace. Opsání diferenciální rovnice ze seznamu rovnic nebo pouhé uvedení příkladu diferenciální rovnice nepovažuji za vysvětlení.

viz A

Příklad 14 Na prvním obrázku je modul spektrální funkce $X(j\omega)$ signálu na vstupu systému se spojitým časem. Na druhém obrázku je modul frekvenční charakteristiky systému $H(j\omega)$. Nakreslete modul spektrální funkce $Y(j\omega)$ na výstupu systému. Můžete kreslit do kteréhokoliv z obrázků.



viz A



pásmová propust

Příklad 15 Dokažte, že jednocestný usměrňovač $y(t) = \begin{cases} x(t) & \text{pro } x(t) \geq 0 \\ 0 & \text{pro } x(t) < 0 \end{cases}$ není lineární tak, že na příkladu ukážete porušení podmínky linearity: $x_1(t) \to y_1(t)$, $x_2(t) \to y_2(t) \quad \Rightarrow$ $ax_1(t) + bx_2(t) \to ay_1(t) + by_2(t)$.

viz A

C

Příklad 16 Napište impulsní odezvu $h[n]$ diskrétního systému (číslicového filtru), který převrací hodnotu a zpožďuje vstup: $y[n] = -x[n-4]$.

n	0	1	2	3	4
$h[n]$	0	0	0	0	-1

Příklad 17 Odvoďte vztah pro numerický výpočet Fourierovy řady spojitého periodického signálu $x(t)$ s periodou T_1. Pomůcka: počítejte s tím, že máte navzorkovanou přesně jednu periodu signálu a že počet získaných vzorků je N. Pokud ve výsledku vyjde diskrétní Fourierova transformace (DFT), jasně ji vyznačte.

viz A

Příklad 18 Napište kód v C, Python/Numpy nebo pseudokód pro vygenerování signálu s diskrétním časem, který při přehrání na vzorkovací frekvenci $F_s = 16000$ Hz bude cosinusovka na frekvenci $f_1 = 250$ Hz s trváním 2 sekundy. Výsledek nechť je v poli x. Určení počtu vzorků je součástí řešení.

$F_s = 16000$
dále viz A

Příklad 19 Napište matematicky navzorkovaný signál $x_s(t)$, který vznikne násobením vzorkovaného signálu $x(t)$ se vzorkovacím signálem $s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_s)$, kde T_s je vzorkovací perioda. Napsat $x_s(t) = x(t)s(t)$ nestačí, výsledek chci jako jednu sumu.

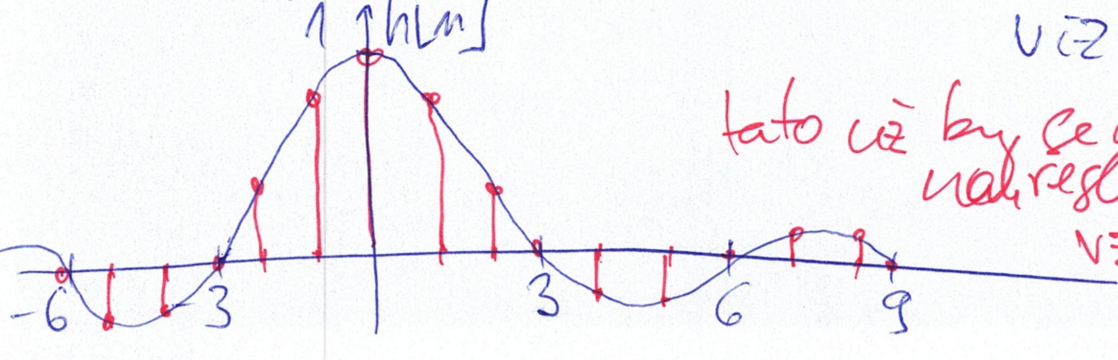
$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \ldots\ldots\ldots\ldots$$

viz A

Příklad 20 Nakreslete impulsní odezvu $h_{aa}[n]$ anti-aliasingového filtru pro podvzorkování (downsampling) diskrétního signálu vzorkovaného na $F_{s1} = 48$ kHz na nižší vzorkovací frekvenci $F_{s2} = 16$ kHz. Přesně napište, na které vzorkovací frekvenci bude anti-aliasingový filtr pracovat, přesně popište osy v obrázku.

$48/16 = 3$

viz A



tato už by se dala nakreslit i po vzorcích ;)

Semestrální zkouška ISS/ISSk, řádný termín, 15.1.2024, skupina D

Login: .... Příjmení a jméno: .... Podpis: ....
(prosím čitelně!)

Příklad 1 V tabulce jsou dány dva diskrétní signály o délce $N = 3$. Vypočtěte a zapište všechny nenulové vzorky jejich lineární konvoluce $y[n] = x_1[n] \star x_2[n]$. Pozor, tabulku budete možná muset rozšířit.

n	0	1	2	3	4
$x_1[n]$	1	2	3		
$x_2[n]$	1	-1	2		
$y[n]$	1	1	3	1	6

Příklad 2 Napište podmínku, kterou musí splňovat impulsní odezva $h[n]$ nekauzálního číslicového filtru.

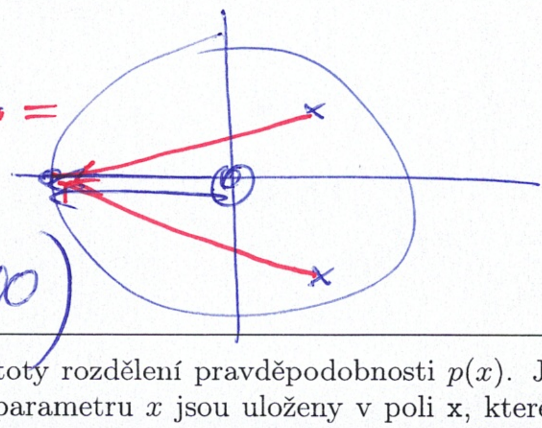
$h[n] \neq 0$ alespoň pro jeden vzorek $n < 0$

Příklad 3 Je dán číslicový filtr 4. řádu s přenosovou funkcí $H(z) = \frac{1+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}+b_3z^{-3}+b_4z^{-4}}{1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}+a_3z^{-3}+a_4z^{-4}}$. Pro jeho implementaci máte k disposici jen bloky 2. řádu, které můžete řetězit za sebou. Jeden blok 2. řádu má přenosovou funkci $H_k(z) = \frac{1+b_{k1}z^{-1}+b_{k2}z^{-2}}{1+a_{k1}z^{-1}+a_{k2}z^{-2}}$. Kolik takových bloků budete potřebovat a jak určíte jejich koeficienty a_{ki}, b_{ki} ? Není potřeba psát veškerou matematiku, stačí popsat základní myšlenku.

viz A

Příklad 4 Číslicový filtr má dva nulové body: $n_1 = 0$ a $n_2 = 0$ a dva póly: $p_1 = 0.5+0.5j$ a $p_2 = 0.5-0.5j$. Určete modul jeho frekvenční charakteristiky na normované kruhové frekvenci $\omega_1 = \pi$ rad.
Pomůcka: $\frac{1}{\sqrt{0.5^2+0.5^2}} = 1.41$, $\frac{1}{\sqrt{0.5^2+1.5^2}} = 0.63$.

$$|H| = \frac{1 \cdot 1}{\sqrt{0{,}5^2+1{,}5^2}\,\sqrt{0{,}5^2 \cdot 1{,}5^2}} = (0{,}63)^2$$



$|H(e^{j\omega_1})| =$ 0,36 (přesně 0,400)

Příklad 5 V programu byla odhadnuta funkce hustoty rozdělení pravděpodobnosti $p(x)$. Její hodnoty jsou uloženy v poli `px`, které má `N` prvků. Hodnoty parametru x jsou uloženy v poli `x`, které má také `N` prvků. Hodnoty v `x` stoupají rovnoměrně, vzdálenost mezi nimi je v proměnné `Delta`. Napište kód v C, Python/Numpy nebo pseudokód pro určení střední hodnoty.

viz A

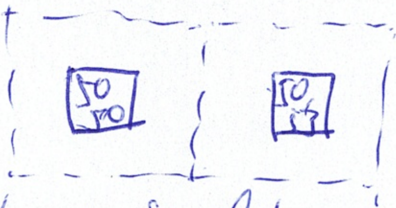
Příklad 6 Ve vektoru x o délce `N = 200` jsou vzorky ergodického náhodného signálu (pozor, v minulém cvičení byl x parametr funkce hustoty, teď je to signál). Máte k disposici funkce pro výpočet FFT a autokorelace. Napište kód v C, Python/Numpy nebo pseudokód pro odhad a zobrazení spektrální hustoty výkonu $G_x(e^{j\omega})$ pro normované kruhové frekvence ω od 0 rad do π rad.

viz A/B

Příklad 7 Popište, jak se liší 2D-DFT $X[m,n] = \sum_{k=0}^{K-1}\sum_{l=0}^{L-1} x[k,l]e^{-j2\pi\left(\frac{mk}{K}+\frac{nl}{L}\right)}$ od 2D-DCT $X[m,n] = \sum_{k=0}^{K-1}\sum_{l=0}^{L-1} x[k,l]\cos\left[\frac{\pi}{K}(k+\frac{1}{2})m\right]\cos\left[\frac{\pi}{L}(l+\frac{1}{2})n\right]$. Zaměřte se na charakter a frekvence bází a na charakter a případné symetrie ve výstupu $X[m,n]$.

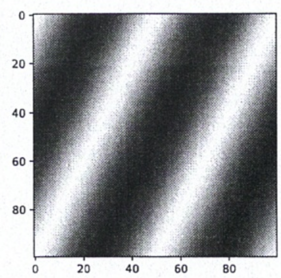
viz A

Příklad 8 Obrázek $x[k,l]$ o rozměrech $K = 100$ krát $L = 100$ pixelů obsahuje dva bílé pixely: $x[50,50] = 1$, $x[50,53] = 1$, ostatní jsou nulové. Obrázek je filtrován 2D-filtrem (maskou, konvolučním jádrem) o rozměrech 3×3, jehož všechny prvky mají hodnotu $\frac{1}{9}$. Určete počet nenulových pixelů ve výsledném obrázku.



18 nenulových pixelů

Příklad 9 Na obrázku je zobrazena reálná složka báze 2D-DFT $X[m,n] = \sum_{k=0}^{K-1}\sum_{l=0}^{L-1} x[k,l]e^{-j2\pi\left(\frac{mk}{K}+\frac{nl}{L}\right)}$. Černá odpovídá hodnotě -1, bílá +1. Určete, který koeficient 2D-DFT $X[m,n]$ bude tato báze počítat.



$m =$ ...1......, $n =$ ...2......   viz A

Příklad 10 Nakreslete do obrázků pod sebe modulovou i argumentovou část spektrální funkce $X(j\omega)$ signálu se spojitým časem – posunutého obdélníkového impulsu: $x(t) = \begin{cases} 1 & \text{pro } -1 \le t \le 0 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$.

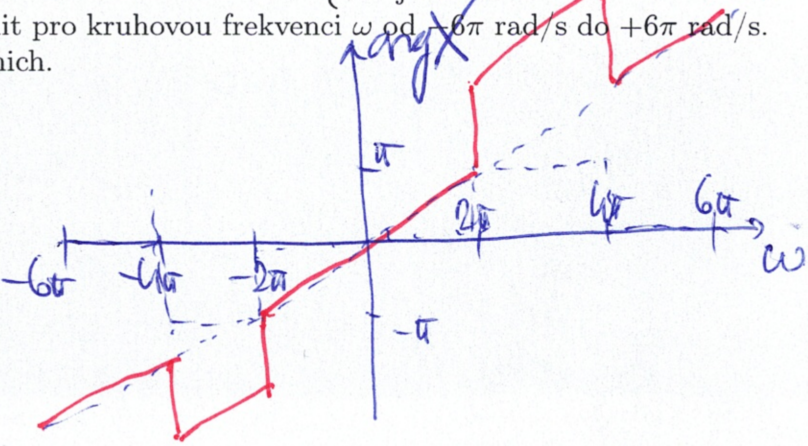
Všechny časy jsou v sekundách. Doporučuji kreslit pro kruhovou frekvenci ω od -6π rad/s do $+6\pi$ rad/s. Osy řádně označte a uveďte přesně hodnoty na nich.

modul viz A

posun o $\tau = +0{,}5$ sec

$\Rightarrow$ vyklopení fáze

0   0,5ω



Příklad 11 V programu je pole `X` o rozměrech 512×512 naplněné hodnotami Laplaceovy transformace $X(s)$ signálu se spojitým časem $x(t)$ (signál nemáte k disposici). Reálná složka proměnné s byla vygerována jako 512 hodnot od -5 do +5 a určuje hlavní (řádkový) index pole `X`, imaginární složka proměnné s byla vygerována také jako 512 hodnot od -5 do +5 a určuje vedlejší (sloupcový) index pole `X`. Napište (kód nebo vysvětlení), jak naplníte vektor `Xjom`, kde bude spektrální funkce $X(j\omega)$ signálu $x(t)$.

viz A

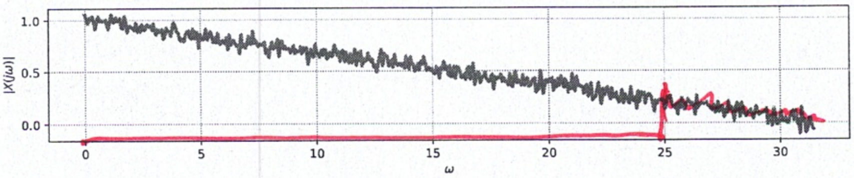
Příklad 12 Přenosová funkce systému se spojitým časem je $H(s) = \frac{0.3s-1}{0.5s+1}$.
Napište výraz pro frekvenční charakteristiku takového systému.

$H(j\omega) = \frac{0{,}3\,j\omega - 1}{0{,}5\,j\omega + 1}$

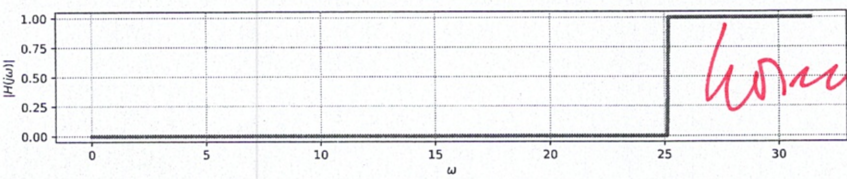
Příklad 13 Krátce vysvětlete, jak se v diferenciální rovnici popisující chování systému se spojitým časem mohou objevit derivace. Opsání diferenciální rovnice ze seznamu rovnic nebo pouhé uvedení příkladu diferenciální rovnice nepovažuji za vysvětlení.

viz A

Příklad 14 Na prvním obrázku je modul spektrální funkce $X(j\omega)$ signálu na vstupu systému se spojitým časem. Na druhém obrázku je modul frekvenční charakteristiky systému $H(j\omega)$. Nakreslete modul spektrální funkce $Y(j\omega)$ na výstupu systému. Můžete kreslit do kteréhokoliv z obrázků.



viz A



horní propust!

Příklad 15 Dokažte, že jednocestný usměrňovač $y(t) = \begin{cases} x(t) & \text{pro } x(t) \geq 0 \\ 0 & \text{pro } x(t) < 0 \end{cases}$ není lineární tak, že na příkladu ukážete porušení podmínky linearity: $x_1(t) \to y_1(t)$, $x_2(t) \to y_2(t) \Rightarrow ax_1(t) + bx_2(t) \to ay_1(t) + by_2(t)$.

viz A

1

Příklad 16 Napište impulsní odezvu $h[n]$ diskrétního systému (číslicového filtru), který převrací hodnotu a zpožďuje vstup: $y[n] = -x[n-4]$.

viz C

Příklad 17 Odvoďte vztah pro numerický výpočet Fourierovy řady spojitého periodického signálu $x(t)$ s periodou T_1. Pomůcka: počítejte s tím, že máte navzorkovanou přesně jednu periodu signálu a že počet získaných vzorků je N. Pokud ve výsledku vyjde diskrétní Fourierova transformace (DFT), jasně ji vyznačte.

viz A

Příklad 18 Napište kód v C, Python/Numpy nebo pseudokód pro vygenerování signálu s diskrétním časem, který při přehrání na vzorkovací frekvenci $F_s = 8000$ Hz bude cosinusovka na frekvenci $f_1 = 250$ Hz s trváním 2 sekundy. Výsledek nechť je v poli x. Určení počtu vzorků je součástí řešení.

$F_s = 8000$
dále viz A

Příklad 19 Napište matematicky navzorkovaný signál $x_s(t)$, který vznikne násobením vzorkovaného signálu $x(t)$ se vzorkovacím signálem $s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_s)$, kde T_s je vzorkovací perioda. Napsat $x_s(t) = x(t)s(t)$ nestačí, výsledek chci jako jednu sumu.

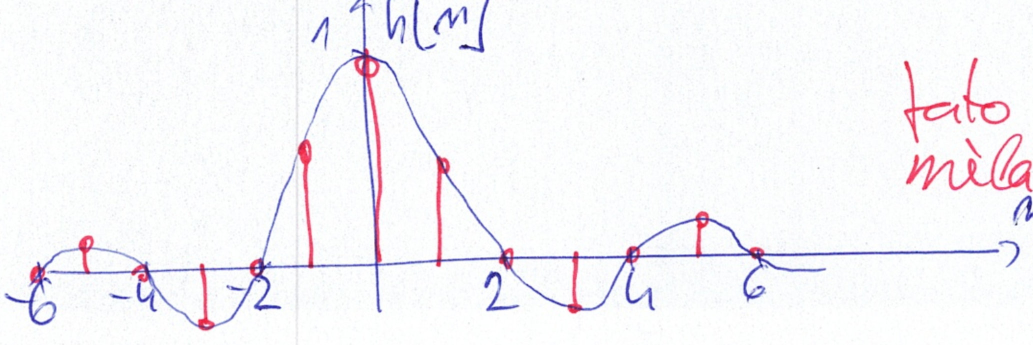
$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

viz A

Příklad 20 Nakreslete impulsní odezvu $h_{aa}[n]$ anti-aliasingového filtru pro podvzorkování (downsampling) diskrétního signálu vzorkovaného na $F_{s1} = 48$ kHz na nižší vzorkovací frekvenci $F_{s2} = 24$ kHz. Přesně napište, na které vzorkovací frekvenci bude anti-aliasingový filtr pracovat, přesně popište osy v obrázku.

$48/24 = 2$

viz A



tato už by se měla kreslit po vzorcích :)