Semestrální zkouška ISS/ISSk, řádný termín, 15.1.2024, skupina D

Login: .... Příjmení a jméno: .... Podpis: ....
(prosím čitelně!)

Příklad 1 V tabulce jsou dány dva diskrétní signály o délce $N = 3$. Vypočtěte a zapište všechny nenulové vzorky jejich lineární konvoluce $y[n] = x_1[n] \star x_2[n]$. Pozor, tabulku budete možná muset rozšířit.

n	0	1	2
$x_1[n]$	1	2	3
$x_2[n]$	1	-1	2
$y[n]$			

Příklad 2 Napište podmínku, kterou musí splňovat impulsní odezva $h[n]$ nekauzálního číslicového filtru.

Příklad 3 Je dán číslicový filtr 4. řádu s přenosovou funkcí $H(z) = \frac{1+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}+b_3z^{-3}+b_4z^{-4}}{1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}+a_3z^{-3}+a_4z^{-4}}$. Pro jeho implementaci máte k disposici jen bloky 2. řádu, které můžete řetězit za sebou. Jeden blok 2. řádu má přenosovou funkci $H_k(z) = \frac{1+b_{k1}z^{-1}+b_{k2}z^{-2}}{1+a_{k1}z^{-1}+a_{k2}z^{-2}}$. Kolik takových bloků budete potřebovat a jak určíte jejich koeficienty $a_{ki},\ b_{ki}$? Není potřeba psát veškerou matematiku, stačí popsat základní myšlenku.

Příklad 4 Číslicový filtr má dva nulové body: $n_1 = 0$ a $n_2 = 0$ a dva póly: $p_1 = 0.5{+}0.5j$ a $p_2 = 0.5{-}0.5j$. Určete modul jeho frekvenční charakteristiky na normované kruhové frekvenci $\omega_1 = \pi$ rad.
Pomůcka: $\frac{1}{\sqrt{0.5^2+0.5^2}} = 1.41, \qquad \frac{1}{\sqrt{0.5^2+1.5^2}} = 0.63.$

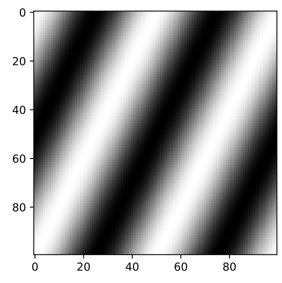
$|H(e^{j\omega_1})| =$ ....

Příklad 5 V programu byla odhadnuta funkce hustoty rozdělení pravděpodobnosti $p(x)$. Její hodnoty jsou uloženy v poli `px`, které má `N` prvků. Hodnoty parametru x jsou uloženy v poli `x`, které má také `N` prvků. Hodnoty v `x` stoupají rovnoměrně, vzdálenost mezi nimi je v proměnné `Delta`. Napište kód v C, Python/Numpy nebo pseudokód pro určení střední hodnoty.

Příklad 6 Ve vektoru `x` o délce `N = 200` jsou vzorky ergodického náhodného signálu (pozor, v minulém cvičení byl x parametr funkce hustoty, teď je to signál). Máte k disposici funkce pro výpočet FFT a autokorelace. Napište kód v C, Python/Numpy nebo pseudokód pro odhad a zobrazení spektrální hustoty výkonu $G_x(e^{j\omega})$ pro normované kruhové frekvence ω od 0 rad do π rad.

Příklad 7 Popište, jak se liší 2D-DFT $X[m,n] = \sum_{k=0}^{K-1} \sum_{l=0}^{L-1} x[k,l] e^{-j2\pi\left(\frac{mk}{K}+\frac{nl}{L}\right)}$ od 2D-DCT $X[m,n] = \sum_{k=0}^{K-1} \sum_{l=0}^{L-1} x[k,l] \cos\left[\frac{\pi}{K}(k+\frac{1}{2})m\right] \cos\left[\frac{\pi}{L}(l+\frac{1}{2})n\right]$. Zaměřte se na charakter a frekvence bází a na charakter a případné symetrie ve výstupu $X[m,n]$.

Příklad 8 Obrázek $x[k,l]$ o rozměrech $K = 100$ krát $L = 100$ pixelů obsahuje dva bílé pixely: $x[50,50] = 1$, $x[50,53] = 1$, ostatní jsou nulové. Obrázek je filtrován 2D-filtrem (maskou, konvolučním jádrem) o rozměrech 3×3, jehož všechny prvky mají hodnotu $\frac{1}{9}$. Určete počet nenulových pixelů ve výsledném obrázku.



Příklad 9 Na obrázku je zobrazena reálná složka báze 2D-DFT $X[m,n] = \sum_{k=0}^{K-1} \sum_{l=0}^{L-1} x[k,l] e^{-j2\pi\left(\frac{mk}{K}+\frac{nl}{L}\right)}$. Černá odpovídá hodnotě -1, bílá +1. Určete, který koeficient 2D-DFT $X[m,n]$ bude tato báze počítat.

$m =$ ...., $n =$ ....

Příklad 10 Nakreslete do obrázků pod sebe modulovou i argumentovou část spektrální funkce $X(j\omega)$ signálu se spojitým časem – posunutého obdélníkového impulsu: $x(t) = \begin{cases} 1 & \text{pro} \quad -1 \le t \le 0 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$.
Všechny časy jsou v sekundách. Doporučuji kreslit pro kruhovou frekvenci ω od -6π rad/s do $+6\pi$ rad/s. Osy řádně označte a uveďte přesně hodnoty na nich.

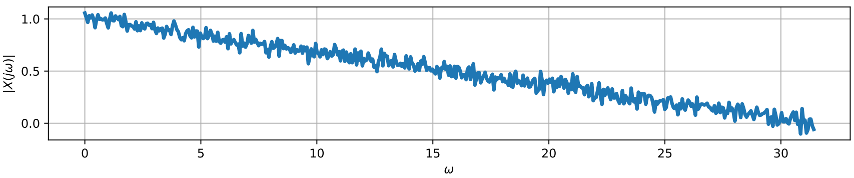
Příklad 11 V programu je pole `X` o rozměrech 512×512 naplněné hodnotami Laplaceovy transformace $X(s)$ signálu se spojitým časem $x(t)$ (signál nemáte k disposici). Reálná složka proměnné s byla vygerována jako 512 hodnot od -5 do +5 a určuje hlavní (řádkový) index pole `X`, imaginární složka proměnné s byla vygerována také jako 512 hodnot od -5 do +5 a určuje vedlejší (sloupcový) index pole `X`. Napište (kód nebo vysvětlení), jak naplníte vektor `Xjom`, kde bude spektrální funkce $X(j\omega)$ signálu $x(t)$.

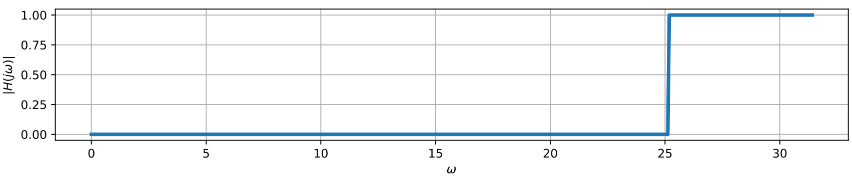
Příklad 12 Přenosová funkce systému se spojitým časem je $H(s) = \frac{0.3s-1}{0.5s+1}$.
Napište výraz pro frekvenční charakteristiku takového systému.

$H(j\omega) =$ ....

Příklad 13 Krátce vysvětlete, jak se v diferenciální rovnici popisující chování systému se spojitým časem mohou objevit derivace. Opsání diferenciální rovnice ze seznamu rovnic nebo pouhé uvedení příkladu diferenciální rovnice nepovažuji za vysvětlení.

Příklad 14 Na prvním obrázku je modul spektrální funkce $X(j\omega)$ signálu na vstupu systému se spojitým časem. Na druhém obrázku je modul frekvenční charakteristiky systému $H(j\omega)$. Nakreslete modul spektrální funkce $Y(j\omega)$ na výstupu systému. Můžete kreslit do kteréhokoliv z obrázků.





Příklad 15 Dokažte, že jednocestný usměrňovač $y(t) = \begin{cases} x(t) & \text{pro} \quad x(t) \geq 0 \\ 0 & \text{pro} \quad x(t) < 0 \end{cases}$ není lineární tak, že na příkladu ukážete porušení podmínky linearity: $x_1(t) \rightarrow y_1(t)$, $x_2(t) \rightarrow y_2(t) \quad \Rightarrow$ $ax_1(t) + bx_2(t) \rightarrow ay_1(t) + by_2(t)$.

Příklad 16 Napište impulsní odezvu $h[n]$ diskrétního systému (číslicového filtru), který převrací hodnotu a zpožďuje vstup: $y[n] = -x[n-4]$.

Příklad 17 Odvoďte vztah pro numerický výpočet Fourierovy řady spojitého periodického signálu $x(t)$ s periodou T_1. Pomůcka: počítejte s tím, že máte navzorkovanou přesně jednu periodu signálu a že počet získaných vzorků je N. Pokud ve výsledku vyjde diskrétní Fourierova transformace (DFT), jasně ji vyznačte.

Příklad 18 Napište kód v C, Python/Numpy nebo pseudokód pro vygenerování signálu s diskrétním časem, který při přehrání na vzorkovací frekvenci $F_s = 8000$ Hz bude cosinusovka na frekvenci $f_1 = 250$ Hz s trváním 2 sekundy. Výsledek nechť je v poli `x`. Určení počtu vzorků je součástí řešení.

Příklad 19 Napište matematicky navzorkovaný signál $x_s(t)$, který vznikne násobením vzorkovaného signálu $x(t)$ se vzorkovacím signálem $s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_s)$, kde T_s je vzorkovací perioda. Napsat $x_s(t) = x(t)s(t)$ nestačí, výsledek chci jako jednu sumu.

$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Příklad 20 Nakreslete impulsní odezvu $h_{aa}[n]$ anti-aliasingového filtru pro podvzorkování (downsampling) diskrétního signálu vzorkovaného na $F_{s1} = 48$ kHz na nižší vzorkovací frekvenci $F_{s2} = 24$ kHz. Přesně napište, na které vzorkovací frekvenci bude anti-aliasingový filtr pracovat, přesně popište osy v obrázku.