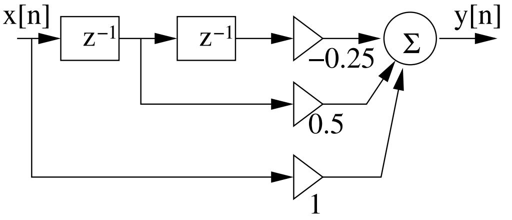
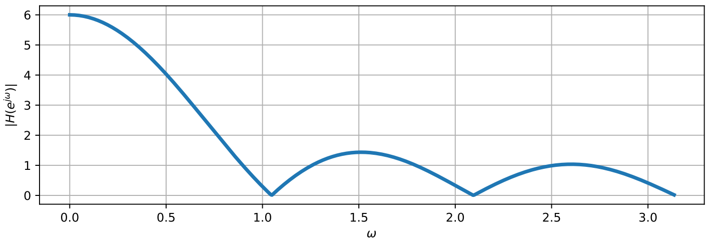
Semestrální zkouška ISS, 2. opravný termín, 4.2.2025, skupina A

Login: .... Příjmení a jméno: .... Podpis: ....
(prosím čitelně!)

Příklad 1 Číslicový filtr je zadán schématem. Napište nebo nakreslete jeho impulsní odezvu $h[n]$.



Příklad 2 Na obrázku je modulová frekvenční charakteristika číslicového filtru $|H(e^{j\omega})|$. Nakreslete rovinu z a do ní všechny nulové body tohoto filtru.



Příklad 3 Číslicový filtr je zadán kódem v jazyce C. Určete a krátce zdůvodněte, zda je tento filtr stabilní

```
float filter(float xn) {
  static float yn1 = 0.0, yn2 = 0.0;
  yn = xn - 0.81 * yn2;
  yn2 = yn1; yn1 = yn;
  return yn;
}
```

Příklad 4 Diferenční rovnice číslicového filtru je:
$y[n] = x[n] + 0.5\,x[n-1] + 0.25\,x[n-2] - 0.16\,y[n-1] + 0.24\,y[n-2]$. Napište jeho přenosovou funkci.

$H(z) =$ ....

Příklad 5 V tabulce jsou dány dva diskrétní signály o délce $N = 3$. Vypočtěte a zapište všechny nenulové vzorky jejich lineární konvoluce $y[n] = x_1[n] \star x_2[n]$. Pozor, tabulku budete možná muset rozšířit.

n	0	1	2
$x_1[n]$	1	2	3
$x_2[n]$	2	0	-1
$y[n]$			

Příklad 6 Funkce hustoty rozdělení pravděpodobnosti (PDF) $p(x)$ stacionárního náhodného signálu $\xi[n]$ je dána
$p(x) = \begin{cases} 0.1 & \text{pro } 0 \leq x < 10 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$. Určete následující pravděpodobnost:

$\mathcal{P}(\xi[n] < -1) =$ ....

Příklad 7 Vektor `x` o `N` vzorcích obsahuje náhodný signál. Vysvětlete (text, rovnice, pseudokód a/nebo schéma), jak ověříte, že se jedná o **stacionární** náhodný signál. Stačí se zaměřit na stacionaritu dvou skalárních nebo funkčních popisů náhodného signálu.

Příklad 8 Tabulka obsahuje hodnoty sdružené funkce hustoty rozdělení pravděpodobnosti $p(x_1, x_2, n_1, n_2)$ náhodného signálu. Spočítejte korelační koeficient $R[n_1, n_2]$. Pomůcka: Jako reprezentativní hodnoty x_1 a x_2 při numerickém výpočtu použijte středy intervalů v tabulce.

intervaly	intervaly x_2 v n_2			
x_1 v n_1	[-20, -10]	[-10, 0]	[0, 10]	[10, 20]
[10, 20]	0	0	0	$\frac{0.5}{100}$
[0, 10]	0	$\frac{0.2}{100}$	0	0
[-10, 0]	0	0	$\frac{0.2}{100}$	0
[-20, -10]	$\frac{0.1}{100}$	0	0	0

Příklad 9 Máte k disposici hodnoty autokorelačních koeficientů $R[k]$ náhodného singálu. Jak dostanete jeho spektrální hustotu výkonu (PSD) ? Můžete vysvětlit textem, rovnicí nebo kódem.

Příklad 10 Vektor `x` o `N` vzorcích obsahuje jednu realizaci ergodického náhodného signálu. Napište kód v C, Python/Numpy nebo pseudokód pro výpočet vychýlených (biased) autokorelačních koeficientů $R[0] \ldots R[10]$.

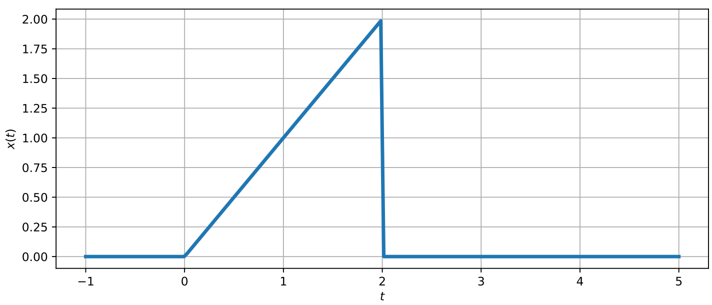
Příklad 11 Napište kód v C pro 2D konvoluci. Předpokládejte, že je obrázek v poli `x` o rozměrech `K` × `L` a konvoluční jádro (maska) v poli `h` o rozměrech `I` × `I`, kde `I` je liché. Výsledek nechť je v poli `y` o rozměrech `K` × `L`, které už je alokováno. Okraje obrázku řešte nejjednodušším možným způsobem nebo je neřešte vůbec.

Příklad 12 Obrázek $x[k,l]$ o rozměrech 100 × 100 má pro $m,n \leq 50$ pouze dva nenulové koeficienty 2D-DFT $|X[m,n]|$: $X[0,0]$ a $X[0,3]$.
Nakreslete, jak bude takový obrázek přibližně vypadat. Argumenty (fáze) neřešte.

Příklad 13 Napište konvoluční jádro (masku) o rozměrech 5 × 5 pro vyhlazení obrázku.

Příklad 14 Popište (schéma, rovnice a/nebo text), jak lze realizovat 2D filtraci ve spektrální oblasti, tedy bez konvoluce. Vstupní obrázek nechť je $x[k,l]$, koeficienty filtru $h[k,l]$ a výstupní obrázek $y[k,l]$.

Příklad 15 Na obrázku je signál se spojitým časem $x(t)$. Nakreslete do téhož obrázku signál $y(t) = x(2t)$.



Příklad 16 Je dána komplexní exponenciála se spojitým časem $x_1(t) = e^{j1000\pi t}$ a posunutý Diracův impuls $x_2(t) = \delta(t - 0.001)$. Napište vztah pro signál vzniklý jejich konvolucí $y(t) = x_1(t) \star x_2(t)$ a maximálně jej zjednodušte.

Příklad 17 Periodický sled obdélníkových impulsů: $x(t) = \begin{cases} 5 & \text{pro} \quad -0.5\ \mu\text{s} \leq t \leq +0.5\ \mu\text{s} \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$
se základní periodou $T_1 = 2\ \mu$s má následující koeficienty Fourierovy řady:
$c_0 = 2.5, \quad c_1 = 1.6, \quad c_2 = 0, \quad c_3 = -0.53.$
Určete hodnoty koeficientů signálu zpožděného o $\frac{1}{4}$ periody: $y = x(t - 0.5\ \mu\text{s})$.

$c_{y0} =$ ...., $c_{y1} =$ ...., $c_{y2} =$ ...., $c_{y3} =$ ....

Příklad 18 Signály se spojitým časem $x_1(t)$, $x_2(t)$ mají spektrální funkce $X_1(j\omega)$, $X_2(j\omega)$. Napište, co bude platit pro spektrální funkci jejich konvoluce $y(t) = x_1(t) \star x_2(t)$.

$Y(j\omega) =$ ....

Příklad 19 Napište a nakreslete spektrální funkci $X(j\omega)$ stejnosměrného signálu $x(t) = 6$. Doporučuji provést kontrolu pomocí inverzní Fourierovy transformace.

Příklad 20 Diskrétní signál má vzorkovací frekvenci $F_{s1} = 10$ kHz. Napište a/nebo nakreslete frekvenční charakteristiku ideálního rekonstrukčního filtru $H_r(j\omega)$ pro jeho převod na signál se spojitým časem.