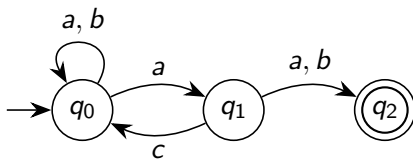


Příklad 1. Determinizujte a následně minimalizujte následující KA.



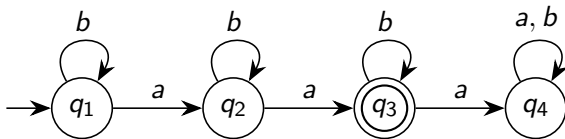
- determinizace: $\text{NKA } (Q, \Sigma, q_0, \delta, F) \longrightarrow \text{DKA } (2^Q, \Sigma, \{q_0\}, \delta', F')$

δ'	a	b	c
$\rightarrow \{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$	$\emptyset$
$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_1, q_2\}$	$\{q_0, q_2\}$	$\{q_0\}$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\llbracket \{q_0, q_1, q_2\} \rrbracket$	$\{q_0, q_1, q_2\}$	$\{q_0, q_2\}$	$\{q_0\}$
$\llbracket \{q_0, q_2\} \rrbracket$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$	$\emptyset$

- minimalizace:
 - DKA neobsahuje nedosažitelné stavy

		a	b	c		a	b	c	
$\rightarrow \{q_0\}$		I	I	I	I	II	I	I	I
$\{q_0, q_1\}$	I	II	II	I	II				II
$\emptyset$		I	I	I	I	I	I	I	III
$\{q_0, q_1, q_2\}$		II	II	I	III				IV
$\{q_0, q_2\}$	II	I	I	I	IV				V

Příklad 2. Uvažme následující KA A .

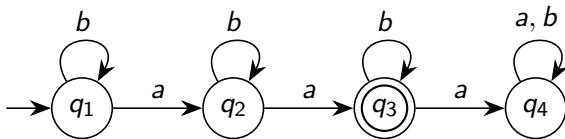


(a) Určete jazyk $L(A)$.

(b) Zapište ekvivalenční třídy $\sim_L$ odpovídající $L(A)$

(c) Sestrojte relaci pravé kongruence $\sim$, pro kterou platí, že L je sjednocením některých tříd rozkladu určeného relací $\sim$ na Σ^* a index $\sim$ je o jedna větší než index $\sim_L$.

Příklad 2. Uvažme následující KA A .



(a) Určete jazyk $L(A)$.

$$L(A) = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) = 2\}$$

(b) Zapište ekvivalenční třídy $\sim_L$ odpovídající $L(A)$

(c) Sestrojte relaci pravé kongruence $\sim$, pro kterou platí, že L je sjednocením některých tříd rozkladu určeného relací $\sim$ na Σ^* a index $\sim$ je o jedna větší než index $\sim_L$.

(b) Zapište ekvivalenční třídy $\sim_L$ odpovídající $L(A)$

$$w_1 \sim_L w_2 \iff \forall z: w_1 z \in L \leftrightarrow w_2 z \in L$$

Pro L dostáváme

$$w_1 \sim_L w_2 \iff (\#_a(w_1) = \#_a(w_2)) \vee (\#_a(w_1) \geq 3 \wedge \#_a(w_2) \geq 3))$$

- $L_{q_1} = \{b^i \mid i \geq 0\}$
- $L_{q_2} = \{b^i a b^j \mid i, j \geq 0\}$
- $L_{q_3} = L(A)$
- $L_{q_4} = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) > 2\}$

$\sim_L$ odpovídá minimálnímu deterministickému automatu pro L

- (c) Sestrojte relaci pravé kongruence $\sim$, pro kterou platí, že L je sjednocením některých tříd rozkladu určeného relací $\sim$ na Σ^* a index $\sim$ je o jedna větší než index $\sim_L$.

$$w_1 \sim w_2 \iff (\#_a(w_1) = \#_a(w_2)) \vee (\#_a(w_1) \geq 4 \wedge \#_a(w_2) \geq 4))$$

Příklad 3. Dokažte pomocí P.L., že $L = \{a^n b a^n \mid n \geq 1\} \notin \mathcal{L}_3$

Příklad 3. Dokažte pomocí P.L., že $L = \{a^n ba^n \mid n \geq 1\} \notin \mathcal{L}_3$

Důkaz. Předpokládejme, že $L \in \mathcal{L}_3$. Potom dle P.L. existuje $k > 0$ takové, že pro každé $w \in L$, $|w| \geq k$, tedy i pro

$$w = a^k ba^k \in L,$$

musí existovat rozdělení $w = xyz$, $|xy| \leq k$, $|y| > 0$ takové, že $xy^i z \in L$ pro libovolné i .

Pro takové rozdělení $w = xyz$ platí:

$$w = \underbrace{\overbrace{a \cdots a}^k}_{x} \underbrace{a \cdots a}_{y} ab \overbrace{a \cdots a}^k$$

neboli

$$x = a^r, \quad y = a^s, \quad 0 < s, \quad r + s \leq k, \quad z = a^{k-r-s} ba^k$$

Pak např. pro $i = 0$: $xz = a^{k-s} ba^k \notin L$, což je spor s P.L., tedy $L \notin \mathcal{L}_3$.

Příklad 4. Dokažte, že $L = L_A \cup L_B \notin \mathcal{L}_3$

$$L_A = \{c^i u \mid i \geq 2, u \in \{a, b\}^*, \#_a(u) = \#_b(u)\}$$

$$L_B = \{c^i u \mid i \geq 2, u \in \{a, b\}^*, \#_a(u) = \#_b(u) + 2\}$$

Příklad 4. Dokažte, že $L = L_A \cup L_B \notin \mathcal{L}_3$

$$L_A = \{c^i u \mid i \geq 2, u \in \{a, b\}^*, \#_a(u) = \#_b(u)\}$$

$$L_B = \{c^i u \mid i \geq 2, u \in \{a, b\}^*, \#_a(u) = \#_b(u) + 2\}$$

Nelze použít: $L_1, L_2 \in \mathcal{L}_3 \implies L_1 \cup L_2 \in \mathcal{L}_3$.

Důkaz. Předpokládejme, že $L \in \mathcal{L}_3$. Potom dle P.L. existuje $k > 0$ takové, že pro každé $w \in L$, $|w| \geq k$, tedy i pro

$$w = c^2 a^k b^k \in L$$

musí existovat rozdělení $w = xyz$, $|xy| \leq k$, $|y| > 0$ takové, že $xy^i z \in L$ pro libovolné i . Pro takové rozdělení $w = xyz$ platí buď:

(1) $\#_c(y) > 0$. Pak pro $i = 0$, $\#_c(xy^i z) < 2 \implies xy^i z \notin L \implies L \notin \mathcal{L}_3$

(2) $x = c^a a^r$, $y = a^s$, kde $0 < s \leq k - 2$. Pak pro $i = 4$ platí
 $\#_a(xy^i z) > \#_b(xy^i z) + 2 \implies xy^i z \notin L \implies L \notin \mathcal{L}_3$.

Příklad 5. Uvažujme jazyk

$$L = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) \neq \#_b(w)\}$$

Ukažte pomocí Myhill-Nerodeho věty, že $L \notin \mathcal{L}_3$.

Příklad 5. Uvažujme jazyk

$$L = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) \neq \#_b(w)\}$$

Ukažte pomocí Myhill-Nerodeho věty, že $L \notin \mathcal{L}_3$.

Řešení. Mějme sekvenci $w_1, w_2, \dots$, kde $w_i = a^i$.

Pro libovolná $i \neq j$ platí $a^i \not\sim_L a^j$ jelikož existuje $z = b^i$, pro které

$$a^i b^i \notin L, \quad \text{zatímco} \quad a^j b^i \in L,$$

Tedy index $\sim_L$ je nekonečný $\implies$ podle M.-N. $L \notin \mathcal{L}_3$.

Příklad 6. Rozhodněte a dokažte zda platí následující tvrzení:

(a) $L_1 \cap L_2 \in \mathcal{L}_3 \implies L_1 \in \mathcal{L}_3 \vee L_2 \in \mathcal{L}_3$

(b) $\exists L \in \mathcal{L}_3$ t.ž. $\Diamond L = \{w \in L \mid \#_a(w) = \#_b(w)\} \in \mathcal{L}_3$

(c) $L \in \mathcal{L}_3 \implies L^R = \{w^R \mid w \in L\} \in \mathcal{L}_3$

$$(a) \ L_1 \cap L_2 \in \mathcal{L}_3 \implies L_1 \in \mathcal{L}_3 \vee L_2 \in \mathcal{L}_3$$

Tvrzení neplatí. Protipříklad:

$$L_1 = \{c^n b^n \mid n \geq 0\} \in \mathcal{L}_2 \setminus \mathcal{L}_3$$

$$L_2 = \{e^n f^n \mid n \geq 0\} \in \mathcal{L}_2 \setminus \mathcal{L}_3$$

$$(b) \exists L \in \mathcal{L}_3 \text{ t.ž. } \Diamond L = \{w \in L \mid \#_a(w) = \#_b(w)\} \in \mathcal{L}_3$$

Tvrzení platí. Příklad:

$$L = \{\varepsilon\} \in \mathcal{L}_3$$

$$\Diamond L = \{\varepsilon\} \in \mathcal{L}_3$$

$$(c) L \in \mathcal{L}_3 \implies L^R = \{w^R \mid w \in L\} \in \mathcal{L}_3$$

Tvrzení platí. Základní myšlenka: otočíme hrany KA

$$r \in \delta^R(q, a) \iff q \in \delta(r, a)$$

