

① Dokažte, že $100n^3 + 42n^2 - 8 \notin O(n^2)$

TIN více složitost

Důkaz sporem:

- předpokládáme, že $100n^3 + 42n^2 - 8 \in O(n^2)$

- z def. O notace plyne, že $\exists c(n)$

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \exists c \in \mathbb{R}^+ : \forall n \geq n_0 : 100n^3 + 42n^2 - 8 \leq c \cdot n^2$$

- uvažme libovolnou dostatečně velkou n_0 a c takové, že

$$\forall n \geq n_0 : 100n^3 + 42n^2 - 8 \leq c \cdot n^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall n \geq n_0 : 1 \leq \frac{c \cdot n^2}{100n^3 + 42n^2 - 8}$$

(pro dostatečně velkou hodnotu n jmenovatele zjistíme není 0)

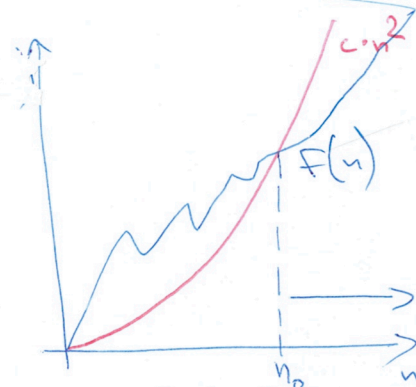
- zkoumejme $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c \cdot n^2}{100n^3 + 42n^2 - 8} =$

[použijeme L'Hospitalovu pravidlo, protože číslatel i jmenovatel jdou $\geq \infty$ pro $n \rightarrow \infty$]

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot c \cdot n}{300n^2 + 84n} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2c}{600n + 84} = 0$$

- spor, protože nemůže současně platit, že $\lim_{n \rightarrow \infty}$ jeho hodnota blíží 0 a pro $n \geq 1$ a pro $n \rightarrow \infty$ se jeho hodnota blíží 0. $\square$



- ② Dokažte, že $O(n^2) \subset O(2^n)$: a) $O(n^2) \subset O(2^n)$
 - uvažme libovolné $f(n) \in O(n^2)$. Ukažme, že $f(n) \in O(2^n)$
 - z toho, že $f(n) \in O(n^2)$, plyne:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \exists c \in \mathbb{R}^+ \forall n \geq n_0: f(n) \leq c \cdot n^2$$

- intuitivně: $c \cdot n^2$ roste od určitého okamžiku stejně nebo rychleji jako $f(n)$ a drží se nad $f(n)$.

- ukažme, že 2^n roste ještě rychleji

- studujeme limitu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{c \cdot n^2} \stackrel{(L'Hospital)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{d 2^n}{d n}}{\frac{d c \cdot n^2}{d n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\ln 2) \cdot 2^n}{2 \cdot c \cdot n} \stackrel{(L'Hospital)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\ln 2)^2 \cdot 2^n}{2 \cdot c} = \infty$$

- tedy 2^n roste rychleji, než $c \cdot n^2$ a tedy máme $\exists c' \in \mathbb{R}^+ \exists n_0' \in \mathbb{N}$ tak, že

$$\forall n \geq n_0': c \cdot n^2 \leq c' \cdot 2^n \text{ a tudíž také } f(n) \leq c' \cdot 2^n$$

- tedy $f(n) \in O(2^n)$

b) $2^n \notin O(n^2)$: sporem, podobně jako při ①, za DÚ

ze zivotu: dokažte, že $O(n^2(0,76n)^{n^2}) \subset O(2 \cdot 3^n \cdot (2n+1)^{n^2})$

pro všechna $n \in \mathbb{N}$

(pro zájeme)

□

3) Sestrojte TS přijímač jazyk $L_3 = \{w \in \Sigma^* \mid w = w^R\}$ a analyzujte jeho časovou a prostorovou složitost.

počet ne- Δ pářic

Idea řešení: zkonstruujeme TS přijímač L_3 takto:

- 1^{op}[1] Γ udělá z počátečního Δ na pářce kóž doprava, pokud tam je Δ , přijme
- 2^{op}[2] M si zpanatuje symbol pod hlavou ve stavu n řízení a přeprve
jej za Δ , udělá kóž doprava, pokud tam je Δ , přijme.
- (k+1)^{op}[3] M posouvá hlavu na pářce doprava, dokud nenarazí na Δ , paž se posune
doleva.
- 1^{op}[4] Γ zkontroluje, ze na pod hlavou zpanatovaný symbol (pokud ne, odhite
vstup) a přeprve jej na Δ .
- (k+2)^{op}[5] Γ udělá kóž vlevo, pokud je tam Δ , přijme, jinak se posune doleva
než narazí na Δ a udělá kóž vpravo; paž pokračuje 2).

časová složitost: $1 + \underbrace{2 + n + 1 + n}_{n/2 \text{ krát}} + \underbrace{2 + (n-2) + 1 + (n-2) + \dots}_{n/2 \text{ krát}} =$

$$= 1 + (3 + 2n) + (3 + 2(n-2)) + (3 + 2(n-4)) + \dots =$$

$$= 1 + 3 \cdot \frac{n}{2} + 2(n + (n-2) + (n-4) + \dots) =$$

$$= 1 + 3 \cdot \frac{n}{2} + 2(2 + 4 + \dots + n) = 1 + 3 \cdot \frac{n}{2} + 2 \cdot \frac{n}{2} \cdot \frac{n+2}{2} =$$

$$= 1 + \frac{3}{2}n + \frac{n^2 + 2n}{2} = 1 + \frac{3}{2}n + n + \frac{n^2}{2} = 1 + 2\frac{1}{2}n + \frac{1}{2}n^2 \in O(n^2)$$

prostorová složitost: $n \in O(n)$ - celý vstup přeprve

3) [Dokážte, že $L_3 \in DTime(Ln)$]

- zkonstruujeme 2-pásmový TS N , který přijímá jazyk L_3 takto:

- $n+1$ [1) N přešne hlavu na 1. páse za konec vstupní
- $O(n)$ [2) N přešouká hlavu na 1. páse zpět dolů a současně čte mezi
přepíše zleva doprava na 2. páse (po dokončení bude na 1. páse
w a na 2. páse w^R)
- $n+1$ [3) N přešne hlavu na 2. páse zpět na začátek.
- $O(n)$ [4) N prochází současně obě pásy a kontroluje jejich shodu. Najde-li rozdíl
symbolů na stejné pozici, odmítne jazyk po přijetí obou pásech přijme

časová složitost: $n+1 + O(n) + n+1 + O(n) = O(n)$

prostorová složitost: $n \in O(n)$

↑
zapišuje se n buněk 2. pásu

□

$$L = \{a, bb, c\}$$

① Uvažte unární operaci p na jazycích takovou, že

$$p(L) = \{w \in \Sigma^* \mid \exists w_p \in L : w_p \text{ je prefix } w\}$$

$$p(L) = \{a, \dots, \\ bb, \dots, \\ c, \dots\}$$

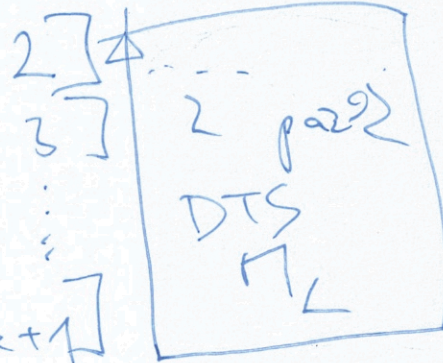
Dokažte, že pro každý jazyk $L \in \Sigma^*$ platí:

$$L \in DTime[F(n)] \Rightarrow \begin{aligned} &a) p(L) \in DTime[n \cdot F(n)] \\ &b) p(L) \in DSpace[F(n)] \\ &c) p(L) \in NTime[F(n)] \end{aligned}$$

pro $F(n) \geq n$

Nechť Π_L je 2-pásový-DTS rozhodující jazyk L v case $\Delta a b c d a b c \Delta \dots$
 $O(F(n))$.

1] $\Delta a b c d a b c \Delta \dots$



a) Konstrukce DTS $\Pi_{p(L)}$ - bude mít 2+1 pásové,
 1. páska je vstupní.

2) $\Pi_{p(L)}$ bude postupně na 1. páse z konce vzít
 symboly a testovat, jestli zbytný podřetězec
 $w_p \in L(\Pi_L)$

3) vidy zložitý obrah 1. pádu na druhou a spřít simulaci Π_L na pádech $2 - (2+1)$ (Π_L je obrah ve starém řádu $\Pi_{p(L)}$).

- pořadí Π_L přijde, $\Pi_{p(L)}$ také přijde
- pořadí Π_L odhite a na 1. páde jsou ještě nějaké symboly $\Pi_{p(L)}$ sice poslední symbol na 1. páde, sice obrah páde $2 - (2+1)$ a zložitý obrah 1. pádu na druhou a zrom spřít simulaci Π_L
- jinak $\Pi_{p(L)}$ odhite

$$\text{časová složitost } \Pi_{p(L)} = (n+1) \cdot \underbrace{(\underbrace{O(1)}_{\text{nový symbol}} + \underbrace{O(n)}_{\text{kopírování + reset}}) + \underbrace{F(n)}_{\text{běh } \Pi_L} + \underbrace{O(F(n))}_{\text{nový páde po } \Pi_L}}_{\text{běh } \Pi_L} = (n+1) \cdot O(F(n)) = O(n \cdot F(n))$$

b) Π_L volí v case $O(F(n))$ povíat max. $O(F(n))$ bunel, velikost vřeu je n . Výsledná postarost složitost $\Pi_{p(L)}$ je tedy $O(F(n)) + n = O(F(n))$

c) NTS $\Pi'_{p(L)}$ sestane zřavan $\Pi_{p(L)}$ také v 2. páde "ukládání" spřít prefix. Potom v analýze čas. složitosti zmrít člen $(n+1)$ a zřít $O(F(n))$.

□