① Cena v nejhorším případě

my-enqueue : $O(k)$ ~> pokud size()=k

my-dequeue : $O(k)$ ~> pokud size()=0

cena $\underline{n}$ operací v nejhorším případě: $O(n \cdot k)$

- velice hrubá nad aproximace

Jaké jsou možnosti

$O(n)$, $O(n \cdot \cancel{\log}(k))$, $O(\cancel{n \cdot} k)$

↓

amortizovaná cena libovolné operace je $O(1)$

Dokážeme metodou účtů

		cena	kredity
enqueue	size() < k	2	2+2
	size = k	$3+2(\frac{k}{2})+1$	3+2
dequeue	size() ≠ 0	2	2+2
	size = 0	$2+2\frac{k}{2}$	2

každým vložením si předplácím jednu iteraci while

opět si předplácím

Korektnost: Počet kreditů na účtě neklesne pod 0

Invariant: Počet kreditů $\geq 2 \cdot |\text{size}() - k/2|$

Dává nám korektnost

Cena libovolné posloupnosti n operací $\leq n \cdot \max\{5,4,2\} = 5n \in O(n)$

2

Cena operace inc() v nejhorším případe

$O(size)$ ~> inc([9,9,9])

cena n operací ~> $O(n \cdot size)$ ~> opět hrubá nadaproximace

$O(n)$, $\cancel{O(n \cdot \log(size))}$

~> amortizovaná složitost každé operace je $O(1)$ – dokážeme metodou účtů

Uvažíme všechny varianty inc() dle počtu iterací

		cena	kredity
inc	iter=1	$1+3$	$4 + 3/10 + 3/100 + 3/1000$
	iter=2	$1+2\cdot3$	$4 + 3/10 + 3/100 + 3/1000$
	iter=3	$1+3\cdot3$	$4 + 3/10 + 3/100 + 3/100$
	⋮	⋮	
	iter=size()	$1\ size\cdot3$	4+ . . . .

9+1 předplacení

90+9+1 předplacení

cena každé operace je $4.\overline{3}$

n operací $\leq 4.4n \in O(n)$

Zkoumame cenu posloupnosti operací

vstup:	0	1	. . . . .	9	01	. . . . .	99
cena:	4	4		7	4		10
potřebujeme předplatit:				3			6

10-krát si potřebujeme předplatit $3/10$

100-krát —||— $3/100$

korektnost ⇝ invariant $x_i \in \{0, 9\}$

pro vstup $[x_1, x_2, \dots x_n]$ máme na účtě

$x_n \cdot 0.\overline{3} + 10 \cdot x_{n-1} \cdot 0.0\overline{3} + 100 \cdot x_{n-2} \cdot 0.0\overline{3} + \dots$

Uvažme např. inc(99)

- máme na účtě $9 \cdot 0.33\overline{3} + 90 \cdot 0.03\overline{3} = 18 \cdot 0.\overline{3} \simeq 6$
- to jest dostatek kreditů na zaplacení operace inc(99)

Výstupem je vektor 100 a na účtě mám:

$4.33\overline{3} + 6 - 10 = 0.333$ což odpovídá invariantu

Dá se zobecnit na libovolný vstup

---

(3) složitost v nejlepším případě

- najdu validní obarvení po konstatním počtu while-iterací: $O(1)$

↳ nutné ověřit, že jde o validní obarvení $O(|E|)$

Celkově $\underline{O(|E|)}$

složitost v nejhorším případě

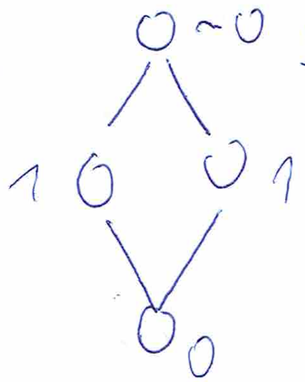
- validní obarvení neexistuje tudíž musím projít všechny možné obarvení

počet barev ↖ $C^{|V|}$ while iterací každá stojí $O(|E|)$

Celkově $\underline{O(C^{|V|} \cdot |E|)}$ Dá se zdola ohraničit $\Omega(2^{|V|})$ ⇝ exponenciální k $|V|$

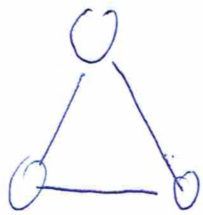
(4) Pozorování:

Graf



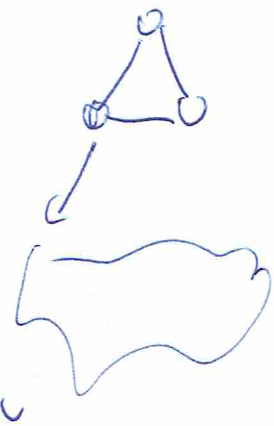
se dá obarvit 2 barvami;

ale např graf



se nedá obarvit

- Existuje "hladové" kritérium pro obarvování a detekci, že G obarvit nejde viz alg. is_2colorable() níže.



- nejlepší případ: $O(1)$

  stačí ~~nemusí~~ projít konstantní část grafu

- nejhorší případ $O(|V|+|E|)$ (pro souvislé G jen $O(|E|)$)
  - musíme jednou projít celý graf

(5)

oKlikA ⇝ obarvená klika

graf (V,E)

- oKlikA ∈ NP

  - NTS pro (G, k, B, c) "uhodne" k vrcholů z V a ověří zda tvoří úplný podgraf a mají stejnou barvu

    (počet vrcholů; barvy; obarvení)

    triviální v P pro lib reprezentaci grafu $O(|V|+|E|)$ pro rozumnou reprezentaci

- oKlikA je NP těžká

  tj. $\forall L \in NP: L \leq_p$ oKlikA ⇝ polynomiální redukcí

Víme že $\forall L \in NP$:

$$L \leq_p SAT \leq_p 3SAT \leq_p \text{klikA} \leq_p \text{oklikA}$$

Cookův teorém   viz přednášky

Důkaz: Zkonstruujeme polynom. redukci f t. ž.

$f(\langle G,k \rangle) = \langle G, k, \{1\}, c \rangle$ kde $\forall v \in V$ $c(v) = 1$

Zřejmě $\langle G,k \rangle \in$ klikA $\Leftrightarrow f(\langle G,k \rangle) \in$ oklikA

6.

NM = Nezávislá množina

- $NM \in NP$ Opět triviální.

  NTS pro $\langle G, k\rangle$ ohodní k vrcholů „ověří", že mezi žádnými dvěma není hrana

  opět v P

- NM je NP-těžká

Ukážeme, že $KLIKA \leq_p NM$.

$f(G,k) = \cancel{f}\ \langle G', k\rangle$ kde

$G' = (V, E')$ a

$E' = \{ \{u,v\} \in V \times V \mid \{u,v\} \notin E \}$

Zřejmě $\langle G, k\rangle \in KLIKA \iff \langle G', k\rangle \in NM$