MNOŽINY:

1

jednoznačně definovaná kolekce různých prvků

- operace: $\cup, \cap, \setminus, \dots$
- predikáty: $\in, \subseteq$
- zápis: $\{ \dots \}$ NE: $\cancel{(\;)}$ $\cancel{\langle \; \rangle}$

výčet: $\{1, 10, 15, \bullet\} = \{\bullet, 1, 15, 10\}$

$$A = \{ x \in \mathbb{N} \mid x + 10 \geq 100 \}$$

$$B = \{ \underline{x \in \mathbb{N}} \mid \exists a, b \in \mathbb{N} : x = 2a \wedge x = 8 \cdot b \} = \{ x \mid x \in \mathbb{N} \wedge \exists a, b \in \mathbb{N} \dots \}$$

$$C = \{ w\,ahoj\,w' \mid w, w' \in \{a, \dots, z\}^* \}$$

$$D = \{ 3x \mid x \in \mathbb{N} \}$$

obecnější pojem „TŘÍDA“

- neexistuje množina všech množin

KARTÉZKÝ SOUČIN:

- pro $n \geq 1$ a množiny $A_1, \dots, A_n$ definujeme kartézský součin

$$\prod_{i=1}^{n} A_i = A_1 \times \dots \times A_n = \{ (a_1, \dots, a_n) \mid a_1 \in A_1 \land \dots \land a_n \in A_n \}$$

- pro $n = 0$

$$\underline{\prod_0 = \{ () \}}$$

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3$$

$\text{string} \times \mathbb{R} \times \text{string}$ $\qquad$ $\text{string} \equiv \{a, \dots, z\}^*$

Relace na množinách

- n-ární relace ρ na množinách $A_1, \dots, A_n$ je podmnožina $A_1 \times \dots \times A_n$

$$\rho \subseteq A_1 \times \dots \times A_n$$

$$\rho \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{R}$$

$$\rho = \{(a,b,c) \mid a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{Z}, c \in \mathbb{R}, \frac{a}{b} \leq c\}$$

Binární relace na množině $\underline{A}$

$$\rho \subseteq A \times A$$

Příklad: $\leq$ na $\mathbb{R}$

$A = \{a, b, c\}$

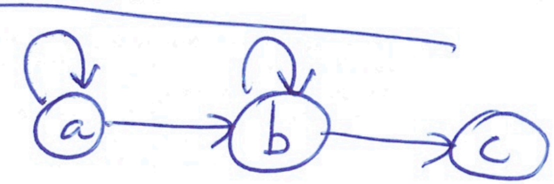
lze reprezentovat MNOŽINOVĚ:

$$\rho = \{(a,a), (a,b), (b,b), (b,c)\}$$

MATICÍ

	a	b	c
a	1	1	0
b	0	1	1
c	0	0	0

GRAFOVĚ



4

a) ρ je souvislá : $\forall x,y \in A: \; x \neq y \Rightarrow x\rho y \vee y\rho x$

b) ρ je reflexivní : $\forall x \in A: \; x\rho x$

c) ρ je ireflexivní : $\forall x \in A: \; \neg(x\rho x)$

d) ρ je symetrická : $\forall x,y \in A: \; x\rho y \Rightarrow y\rho x$

e) ρ je asymetrická : $\forall x,y \in A: \; x\rho y \Rightarrow \neg(y\rho x)$

f) ρ je antisymetrická : $\forall x,y \in A: \; x\rho y \wedge y\rho x \Rightarrow x = y$

g) ρ je transitivní : $\forall x,y,z \in A: \; x\rho y \wedge y\rho z \Rightarrow x\rho z$

a) NE
b) NE
c) NE
d) NE
e) NE
f) ANO
g) NE

TRANZITIVNÍ UZÁVĚR RELACE

$\rho \subseteq A \times A$

$\rho^+ \subseteq A \times A$ je tranzitivní uzávěr ρ

ρ^+: $\quad a \rho^+ b \overset{def}{\iff} \exists n \geq 1 \ \exists c_1, \dots, c_n \in A$:

$a = c_1 \wedge b = c_n$

$\forall 1 \leq i < n : c_i \rho c_{i+1}$

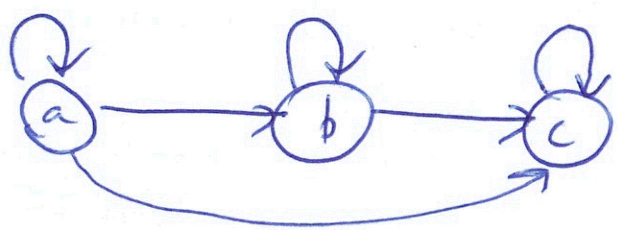
ρ z příkladu: $\quad \rho^+ = \rho \cup \{(a,c)\}$

– Warshallův algoritmus

Reflexivní a tranzitivní uzávěr ρ

$$\rho^* = \rho^+ \cup \{(a,a) \mid a \in A\}$$

ρ z příkladu



Relace ekvivalence $\rho \subseteq A \times A$

ρ je ekvivalence pokud je reflexivní, symetrická a tranzitivní

příklad:

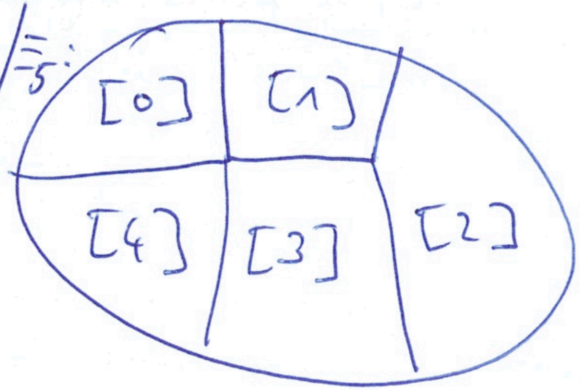
$$\equiv_5 = \{(x,y) \mid x,y \in \mathbb{Z} \wedge x \bmod 5 = y \bmod 5\}$$

Ekvivalence rozdělují množinu A na ekvivalenční třídy:

$$\mathbb{Z}/\equiv_5 = \{[a] \mid a \in \mathbb{Z}\} = \{[0],[1],[2],[3],[4]\}$$

reprezentant

$\mathbb{Z}/\equiv_5$:



Příklad ekvivalence s nekonečným indexem

$\mathbb{Z}$

$$\rho = \{ (a,a), (a+1,a+1), (a,a+1), (a+1,a) \mid a \bmod 2 = 0 \}$$

$$\mathbb{Z}/\rho = \{ [0], [2], [4], [6], [8], \dots \}$$

Rozdělíme $\mathbb{Z}$ na nekonečné množství dvouprvkových tříd:

$[0] = \{0,1\}$

$[2] = \{2,3\}$

$[4] = \{4,5\}$

...

KARDINALITA (VELIKOST) MNOŽINY

- konečné množiny: počet prvků

$$|\{a,b,c\}| = 3$$

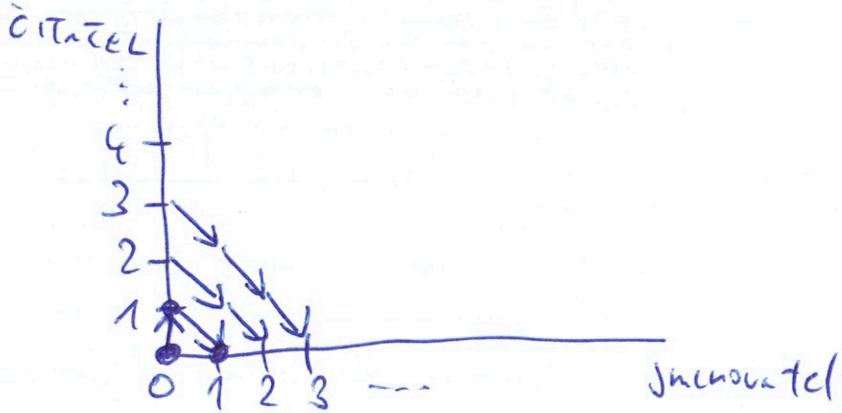
- nekonečné množiny: porovnávání navzájem

$$|A| = |B| \overset{def}{\iff} \text{existuje funkce } f: A \to B \text{, která je bijekce}$$

nekonečné $\boxed{\text{spočetné}}$ množiny:

- existuje bijekce na $\mathbb{N}$

$$|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}| = |\{a,b,c\}^*|$$



nespočetné množiny

$$|\mathbb{R}| > |\mathbb{N}|$$

$$|2^{\{a,b,c\}^*}| > |\mathbb{N}|$$

všechny jazyky nad abecedou $\{a,b,c\}$

Potenční množina množiny A

- značí se 2^A
- $2^A = \{B \mid B \subseteq A\}$

$$2^{\{a,b\}} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$$

Pro konečné množiny platí $|2^A| = 2^{|A|}$

JAZYKY

Σ abeceda ~ <u>konečná</u> množina symbolů

$L \subseteq \Sigma^* = \bigcup_{i \geq 0} \Sigma^i$ $\qquad \Sigma^i = \underbrace{\Sigma \cdot \Sigma \cdot \ldots \cdot \Sigma}_{i}$

$\Sigma^0 = \{\varepsilon\}$

Mějme jazyky $L_1 \subseteq \{a, b\}$ a $L_2 = \{a, \varepsilon\}$

$L_1 \cup L_2 = \{a, b, \varepsilon\}$

$L_1 \cap L_2 = \{a\}$

$L_1 \setminus L_2 = \{b\}$

$L_1^* = \{\varepsilon, \overset{a,\, b,}{aa}, ab, bb, ba, \ldots\}$

$L_1^+ = \{a, b, aa, ab, bb, ba, \ldots\}$

$L_2^+ = \{a, \varepsilon, aa, aaa, \ldots\}$

$L_1 \cdot L_2 = \{aa, a, ba, b\}$

GRAMATIKA

$$G = (N, \Sigma, P, S) \qquad S \in N$$

$$P \subseteq (N \cup \Sigma)^* N (N \cup \Sigma)^* \times (N \cup \Sigma)^*$$

relace přímé derivace:

$$\forall \alpha, \beta \in (N \cup \Sigma)^* : \quad \alpha \Rightarrow_G \beta \overset{def}{\Longleftrightarrow} \exists \gamma, \delta :$$

$$\alpha = \gamma \chi \delta, \quad \beta = \gamma \zeta \delta, \quad (\chi, \zeta) \in P$$

$$L(G) = \{ w \in \Sigma^* \mid S \Rightarrow_G^* w \}$$

Typ 3 (Regulární)

pravidla jsou tvaru:

$$A \rightarrow aB \mid a \mid \varepsilon \quad , \text{ kde } A, B \in N, \ a \in \Sigma$$

UVAŽUJME JAZYK

$$L = \{ b^n a c^m \mid n \geq 2,\ \exists k \geq 0 : m = 3k \}$$

NAPIŠTE GRAMATIKU G : $L(G) = L$

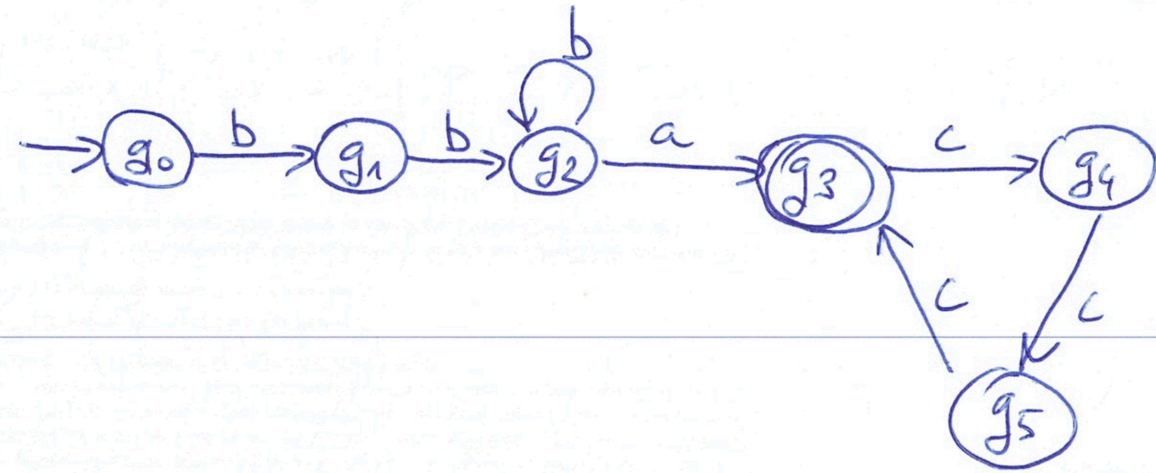
$$G = (\{S, A_1, A_2, A_3 \}, \{a, b, c\}, P, S)$$

P:

$$S \to bA_1$$
$$A_1 \to bA_2$$
$$A_2 \to bA_2 \mid aA_3$$
$$A_3 \to \varepsilon \mid cA_4$$
$$A_4 \to cA_5$$
$$A_5 \to cA_3$$

$$S \to bA_1 \to bbA_2 \to bbaA_3 \to bbacA_4 \to bbaccA_5 \to bbacccA_3 \to bbaccc$$

ZAPIŠTE KONEČNÝ AUTOMAT M t. ž. $L(M) = L$ 13



$M = (\{g_0, g_1, g_2, g_3, g_4, g_5\}, \{a, b, c\}, g_0, \delta, F)$ $F = \{g_3\}$

$\delta : Q \times \Sigma \to Q$ deterministický

$\delta : Q \times \Sigma \to 2^Q$ nedeterministický

UVAŽUJME ABECEDU $\Sigma = \{a, b, c\}$. Rozhodněte, zda následující jazyky jsou/nejsou regulární.

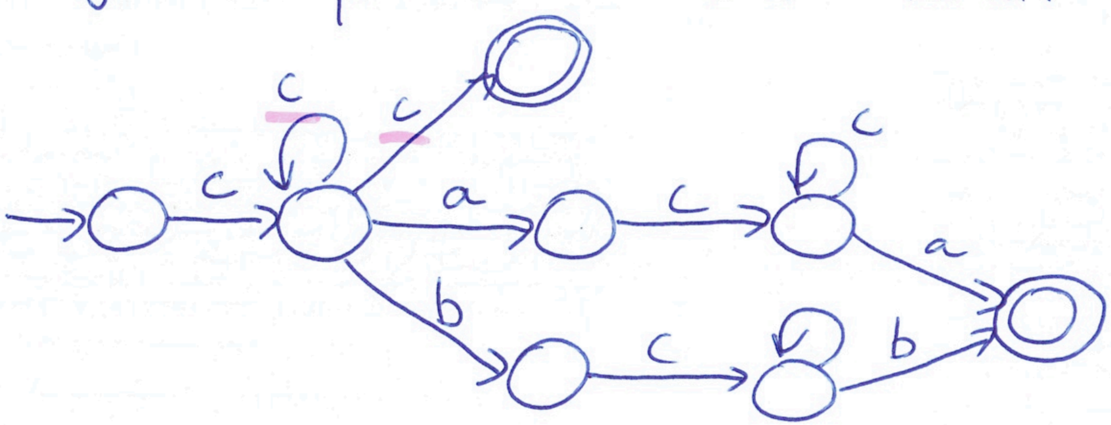
13B

a) $L_1 = \{ c^+ w c^+ w \mid w \in \{a, b\}^* \wedge |w| < 2 \}$

b) $L_2 = \{ c^+ \underline{w} c^+ w \mid w \in \{a, b\}^* \wedge |w| > 2 \}$

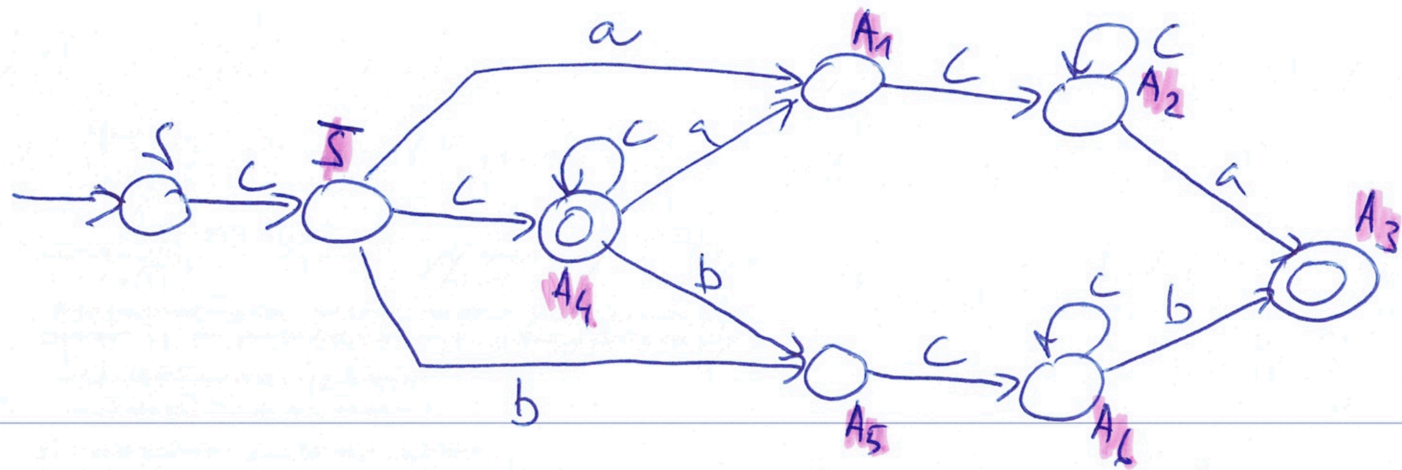
– L_2 není regulární protože potřebuji zapamatovat w neomezené délky pro následnou kontrolu.

– L_1 je regulární protože můžeme sestavit K.A.



NEDETERMINISTICKÝ

(14)



DETERMINISTICKÝ

Sestavte gramatiku pro jazyk L_1

$G = (\{S, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, \bar{S}\}, \{a, b, c\}, P, S)$

P: $\bar{S} \to aA_1 \mid cA_4 \mid bA_5$

$S \to c\bar{S}$

$A_1 \to cA_2$

$A_2 \to cA_2 \mid aA_3$

$A_3 \to \varepsilon$

$A_4 \to \varepsilon \mid cA_4 \mid aA_1 \mid bA_5$

$A_5 \to cA_6$

$A_6 \to cA_6 \mid bA_3$

15

– Rozhodněte, zda platí následující tvrzení

$\forall \Sigma$ konečná abeceda $\forall L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$: $L_1 \subseteq L_1 \cdot L_2$

– najdu protipříklad

$\Sigma = \{a\}$ $L_1 = L_2 = \{a\}$

$L_1 \cdot L_2 = \{aa\}$ a $\{a\} \nsubseteq \{aa\}$

<u>NEPLATÍ</u>

$\forall \Sigma$ konečná abeceda platí $\forall L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$:

$\underline{L_1 = \emptyset \vee \varepsilon \in L_2 \Leftarrow L_1 \subseteq L_1 \cdot L_2}$

„$\Rightarrow$"

- $L_1 = \emptyset \Rightarrow L_1 \cdot L_2 = \emptyset$ tvrzení <u>PLATÍ</u> $\emptyset \subseteq \emptyset$
- $L_2 \ni \varepsilon \Rightarrow \underline{\forall w.}\ \underline{w} \in L_1 : w \cdot \varepsilon \in \underline{L_1 \cdot L_2} \Rightarrow w \in L_1 \cdot L_2$

<u>PLATÍ</u>

„$\Leftarrow$" Důkaz sporem: Předpokládáme, že platí negace 16

$$\neg \left(\forall \Sigma \; \forall L_1, L_2 \subseteq \Sigma^* : L_1 = \emptyset \vee \varepsilon \in L_2 \Leftarrow L_1 \subseteq L_1 \cdot L_2 \right)$$

$$\exists \Sigma \; \exists L_1, L_2 \subseteq \Sigma^* : \neg \left(L_1 = \emptyset \vee \varepsilon \in L_2 \Leftarrow L_1 \subseteq L_1 \cdot L_2 \right)$$

$$\exists \Sigma \; \exists L_1, L_2 \subseteq \Sigma^* : \neg (L_1 = \emptyset \vee \varepsilon \in L_2) \wedge L_1 \subseteq L_1 \cdot L_2$$

$$\exists \Sigma \; \exists L_1, L_2 \subseteq \Sigma^* : L_1 \neq \emptyset \wedge \varepsilon \notin L_2 \wedge L_1 \subseteq L_1 \cdot L_2$$

Víme, že Σ, L_1, L_2 existují. Uvažujme ~~L~~ tj. ty existující L_1, L_2

- nechť w je slovo nejkratší délky z L_1

  To existuje, protože $L_1 \neq \emptyset$

- z $L_1 \subseteq L_1 \cdot L_2$ plyne, že $w = w_1 \cdot w_2$ t. ž. $w_1 \in L_1$ a $w_2 \in L_2$

- protože $\varepsilon \notin L_2$, tak $|w_2| \geq 1 \Rightarrow |w_1| < |w|$

  ALE w je nejkratší slovo z $L_1 \Rightarrow w_1 \notin L_1$ SPOR

Původní tvrzení platí