Teoretická informatika

TIN 2024/2025

doc. RNDr. Milan Češka, Ph.D.

ceskam@fit.vutbr.cz

Upravené přednášky prof. Češky a prof. Vojnara

Organizace kurzu

- garant a organizační záležitosti (doc. Češka)
- přednášky (primárně doc. Češka)
- demo/numerická cvičení (doc. Češka, doc. Rogalewicz, dr. Lengál, Ing. Kocourek)
- demo cvičení (čtvrtek) se nepravidelně střídají s numerickými cvičeními
- přednášky a dema se zaznamenávají a budou průběžně zveřejňovány
- hvězdičkové notace pro doplňující témata/důkazy, které se nebudou zkoušet
- 2 vnitrosemestrální testy: **pátek 11.10.** (10 bodů) a **pátek 8.11.** (15 bodů)
- **2 domácí úkoly** (7+5 bodů, organizuje doc. Rogalewicz a dr. Lengál)
- **zápočet min 18 bodů** z písemek a **všech** úkolů
- sbírka příkladů s ukázkou řešení + neoficiální řešení od Ing. Kocourka
- větší důraz na praktickou složitost (amortizovaná složitost + analýza složitosti vybraných algoritmů) + přesun do dřívější části semestru
- závěrečná zkouška vyžaduje minimální počty bodů z jednotlivých oblastí

❖ Asimilace SDL (v příštím očekáváme změny v důsledku bakalářského kurzu IZLO)

- opakování klíčových pojmů z diskrétní matematiky (úvodní demo)
- vetší důraz na logiku: axiomatizace + vztah mezi nerozhodnutelností a neúplností

Kde hledat informace o kurzu?

- HLAVNÍ INFORMAČNÍ KANÁL: stránky předmětu

  `https://www.fit.vutbr.cz/study/courses/TIN/public/.en`

- Domácí úlohy a diskuzní fóra jsou organizována na e-learningu VUT (moodle TIN)

- Registrace a hodnocení v předmětu ve STUDIS VUT

Referenční literatura

- Opora – dostupná na stránkách předmětu.

- Předmět vychází zejména z následujících zdrojů:
  - Češka, M.: Teoretická informatika, učební text FIT VUT v Brně, 2002. `http://www.fit.vutbr.cz/study/courses/TIN/public/Texty/ti.pdf`
  - Kozen, D.C.: Automata and Computability, Springer-Verlag, New York, Inc, 1997. ISBN 0-387-94907-0
  - Černá, I., Křetínský, M., Kučera, A.: Automaty a formální jazyky I, učební text FI MU, Brno, 1999.
  - Hopcroft, J.E., Motwani, R., Ullman, J.D.: Introduction to Automata Theory, Languages, and Computation, Addison Wesley, 2. vydání, 2000. ISBN 0-201-44124-1
  - Gruska, J.: Foundations of Computing, International Thomson Computer Press, 1997. ISBN 1-85032-243-0
  - Bovet, D.P., Crescenzi, P.: Introduction to the Theory of Complexity, Prentice Hall Europe, Pearson Education Limited, 1994. ISBN 0-13-915380-2

Motivace: Proč se učíme TIN?

- prohloubit znalosti základních informatických konceptů (automaty, gramatiky, regulární výrazy) včetně algoritmů pro práci s nimi, které se přímo používají v mnohých reálných aplikacích (překladače, bezpečnost, analýza systémů atd.)

- získat základní orientaci v oblasti *vyčíslitelnosti a složitosti* (tj. jaké problémy umíme algoritmicky řešit a jaké výpočetní prostředky jsou nutné k jejich řešení)

- osvojit si schopnost *abstraktního* a *systematického* myšlení

- osvojit si schopnost *formálního* (tj. přesného) vyjadřovaní

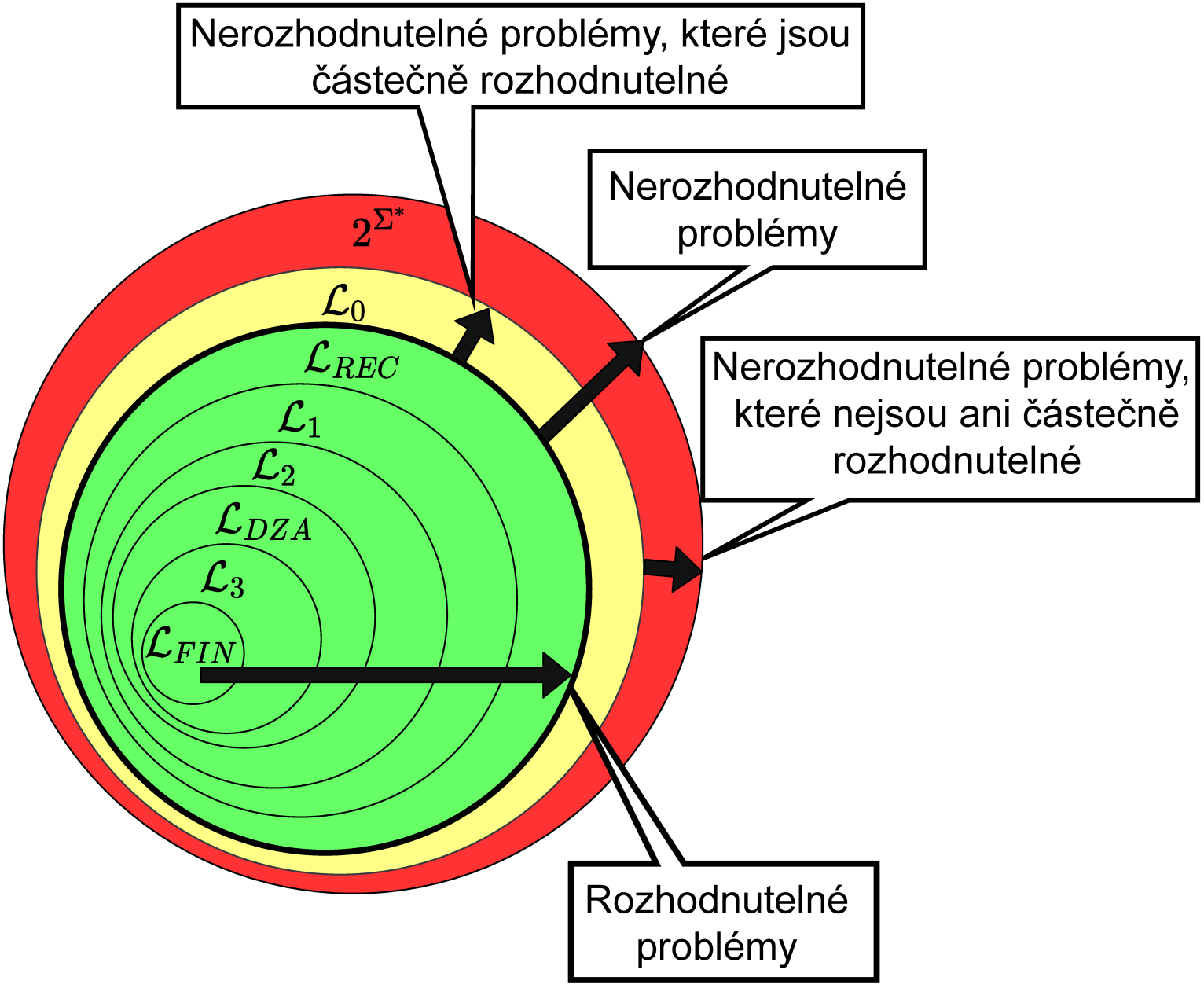
Formální jazyky – motivace

❖ Formální jazyky dovolují formalizovat výpočetní problémy a charakterizovat jejich "složitost".

Tuto "složitost" budeme nejdříve zkoumat z pohledu reprezentace jazyka: Budeme si klást otázku: Jak můžeme v počítači efektivně reprezentovat daný jazyk (tj. do jaké třídy jazyků daný jazyk patří)? Jaký je nejjednodušší způsob reprezentace daného jazyka?

Rovněž budeme zkoumat jaké operace můžeme s danou reprezentací efektivně provádět (tj. jak můžeme s daným jazykem v počítači manipulovat). Umožňuje nám daná reprezentace jazyka efektivně řešit příslušný výpočetní problém?

Chomského hierarchie jazyků/problémů



Formální jazyky – motivace

❖ Formální jazyky dovolují formalizovat výpočetní problémy a charakterizovat jejich "složitost".

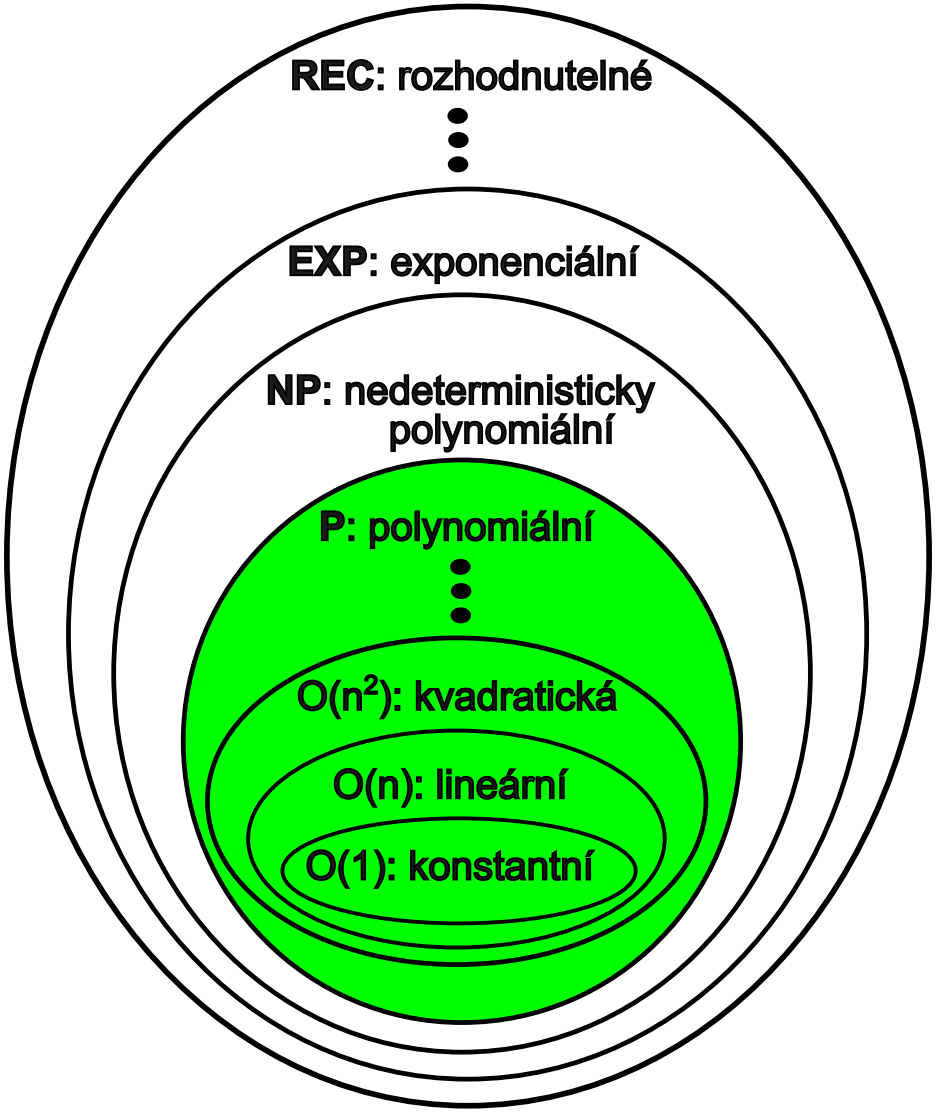
Tuto "složitost" budeme nejdříve zkoumat z pohledu reprezentace jazyka: Budeme si klást otázku: Jak můžeme v počítači efektivně reprezentovat daný jazyk (tj. do jaké třídy jazyků daný jazyk patří)? Jaký je nejjednodušší způsob reprezentace daného jazyka?

Rovněž budeme zkoumat jaké operace můžeme s danou reprezentací efektivně provádět (tj. jak můžeme s daným jazykem v počítači manipulovat). Umožňuje nám daná reprezentace jazyka efektivně řešit příslušný výpočetní problém?

Dále se se zaměříme na výpočetní složitost daného jazyku/problému tj. jaká je časová a paměťová složitost daného problému. Naučíme se analyzovat složitost algoritmů a zkoumat jejich efektivitu z pohledu daného problému. Naučíme se pracovat s asymptotickou a amortizovanou složitostí.

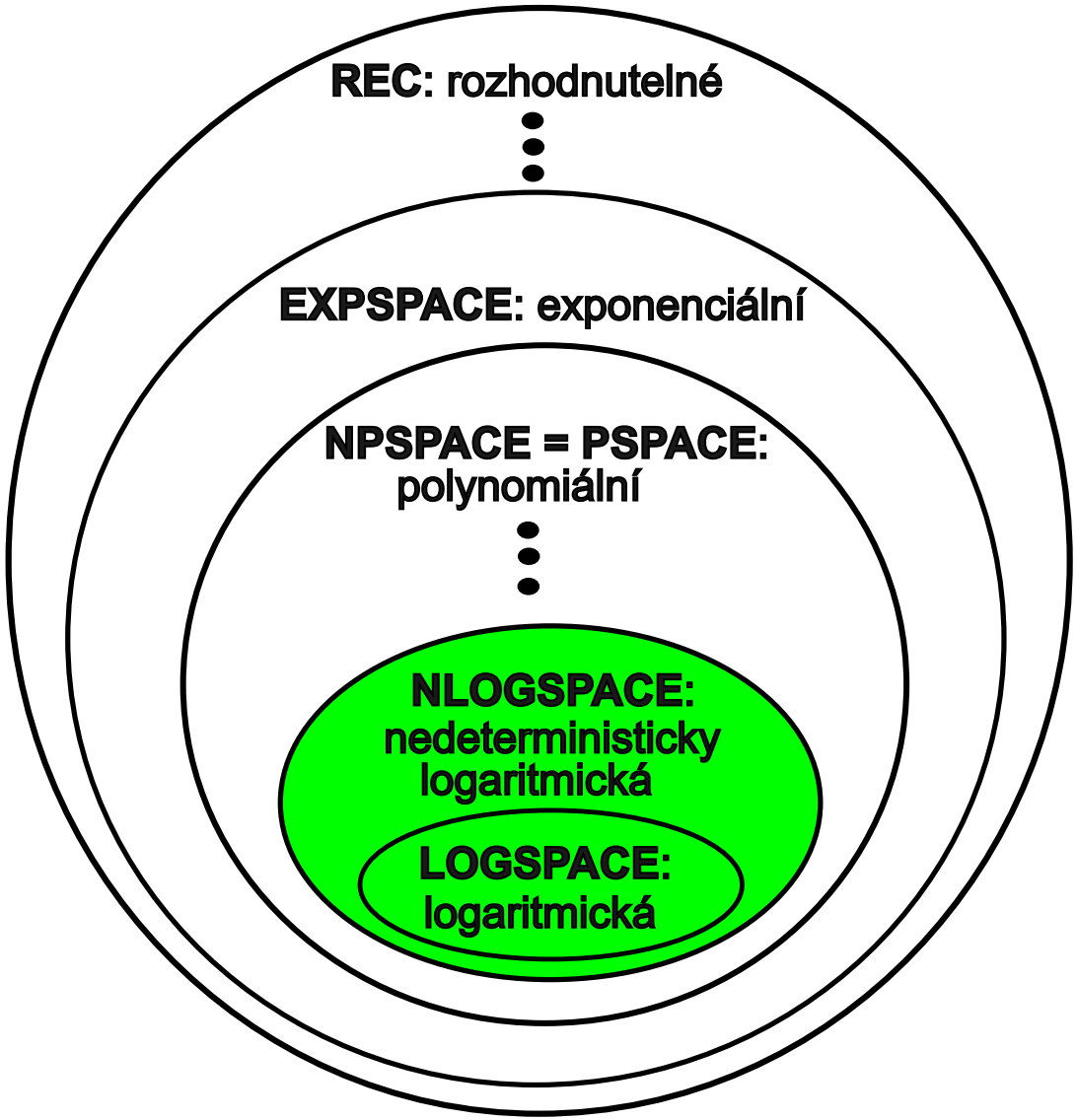
Základní hierarchie časové složitosti

- Časová složitost: funkce vracející maximální počet kroků nutných pro vstupy délky n.

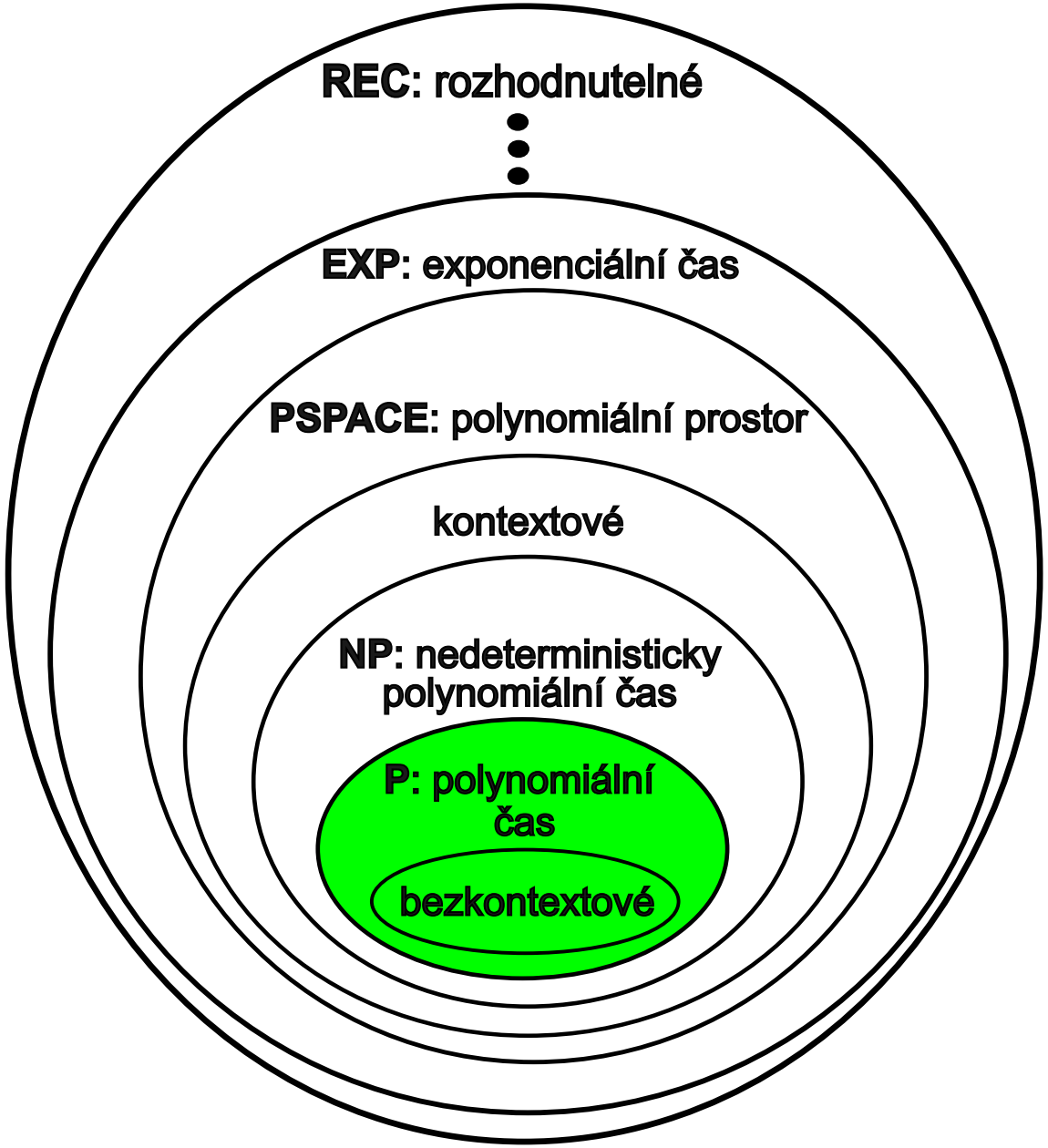


Základní hierarchie prostorové složitosti

- Prostorová složitost: funkce vracející maximální prostor nutný pro vstupy délky n.



Jak tyto hierarchie spolu souvisejí?



Formální jazyky – motivace

❖ Formální jazyky dovolují formalizovat výpočetní problémy a charakterizovat jejich "složitost".

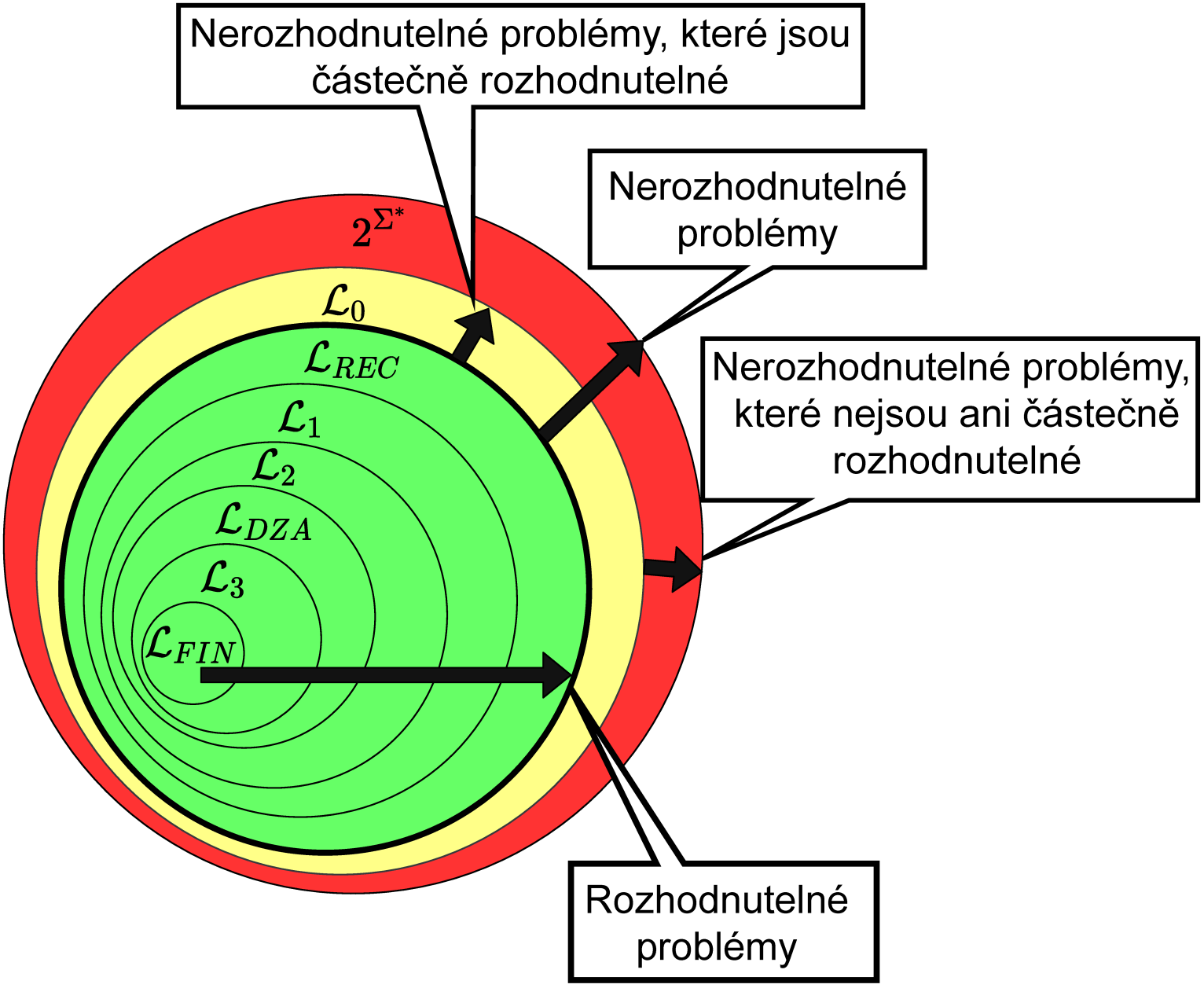
Tuto "složitost" budeme nejdříve zkoumat z pohledu reprezentace jazyka: Budeme si klást otázku: Jak můžeme v počítači efektivně reprezentovat daný jazyk (tj. do jaké třídy jazyků daný jazyk patří)? Jaký je nejjednodušší způsob reprezentace daného jazyka?

Rovněž budeme zkoumat jaké operace můžeme s danou reprezentací efektivně provádět (tj. jak můžeme s daným jazykem v počítači manipulovat). Umožňuje nám daná reprezentace jazyka efektivně řešit příslušný výpočetní problém?

Dále se se zaměříme na výpočetní složitost daného jazyku/problému tj. jaká je časová a paměťová složitost daného problému. Naučíme se analyzovat složitost algoritmů a zkoumat jejich efektivitu z pohledu daného problému. Naučíme se pracovat s asymptotickou a amortizovanou složitostí.

Na závěr si ukážeme, že některé jazyky neumíme v počítači efektivně reprezentovat (tj. jsou výpočetní problémy, které neumíme řešit). Budeme tedy řešit rozhodnutelnost daného problému. Rovněž si naznačíme vztah mezi nerozhodnutelností problémů (výsledky A. Turinga) a neúplností logických systémů (výsledky K. Gödela).

Chomského hierarchie jazyků/problémů



Reálný problém řešený v rámci jedné BP

❖ Vytvořte mobilní aplikaci pro následující problém plánování aktivit na dětském táboře. Je dáno m disciplín a n dětí – každé dítě má vybrané dvě oblíbené disciplíny. Vaším úkolem je najít (pokud existuje) bezkonfliktní rozdělení disciplín do 3 skupin (rund). Konflikt nastává pokud obě disciplíny vybrané jedním účastníkem přísluší stejné skupině.

❖ Je tento problém algoritmicky řešitelný?

❖ Je tento problém efektivně řešitelný?

❖ Jaká je časová složitost tohoto problému? Pro jak velké hodnoty m a n můžeme očekávat existenci algoritmu, který tento problém vyřeší v řádech sekund/minut.

❖ Dovednosti získané v TINu nám pomohou takové otázky zodpovědět a tudíž lépe pochopit daný problém

Formulace problému

❖ Vytvořte mobilní aplikaci pro následující problém plánování aktivit na dětském táboře. Je dáno m disciplín a n dětí – každé dítě má vybrané dvě oblíbené disciplíny. Vaším úkolem je najít (pokud existuje) bezkonfliktní rozdělení disciplín do 3 skupin (rund). Konflikt nastává pokud obě disciplíny vybrané jedním účastníkem přísluší stejné skupině.

1. množina disciplín $D = \{d_1, d_2, \ldots d_m\}$
2. výběry dětí: $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, kde $v_i = \{d_{i1}, d_{i2}\}$ pro $d_{i1}, d_{i2} \in D$.
3. rozdělení do skupin: funkce $p : D \to \{1, 2, 3\}$, kde $\forall v_i \in V : p(d_{i1}) \neq p(d_{i2})$

❖ Je tento problém algoritmicky řešitelný? Ano, existuje pouze konečný počet funkcí p mezi dvěma konečnými množinami

❖ Je tento problém efektivně řešitelný? Naivní řešení musí vyzkoušet až 3^m možných funkcí p a pro každou ověřit existenci konfliktu – exponenciální složitost.

❖ Umím to dělat lépe? Určitě ano, ale jak moc?

Redukce na známý problém

1. množina disciplín $D = \{d_1, d_2, \ldots d_m\}$
2. výběry dětí: $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, kde $v_i = \{d_{i1}, d_{i2}\}$ pro $d_{i1}, d_{i2} \in D$.
3. rozdělení do skupin: funkce $p : D \to \{1, 2, 3\}$, kde $\forall v_i \in V : p(d_{i1}) \neq p(d_{i2})$

❖ Barvení grafů – 3 obarvitelnost

1. D je množina vrcholů
2. $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ je množina hran, kde $v_i = \{d_{i1}, d_{i2}\}$ je hrana mezi vrcholy d_{i1} a d_{i2}.
3. $p : D \to \{1, 2, 3\}$ je barvení grafu pomocí 3 barev.
4. existuje obarvení p, kde $\forall v_i \in V : p(d_{i1}) \neq p(d_{i2})$

Redukce na známý problém

❖ 3 obarvitelnost je **NP**-úplný problém: a) není znám žádný efektivní (tj. polynomiální algoritmus), b) existence takového algoritmu by znamenala zásadní průlom v computer science.

❖ Nemá (asi) cenu hledat obecné efektivní řešení našeho problému, ale spíše se soustředit na heuristiky, které mohou fungovat v prakticky zajímavých instancích: inspirace z řešení problému 3 obarvitelnost – branch-bound algoritmy

❖ Netriviální instance 3 obarvitelnosti pro $m > 32$ už nejsou řešitelné v rozumném čase.

Formální jazyky a jejich reprezentace

Formální jazyky

❖ Prvotní pojmy: symbol, abeceda (neprázdná konečná množina symbolů).

Definice 1.1 Nechť Σ je abeceda. Označme Σ^* množinu všech konečných posloupností w tvaru:

$$w = a_1 a_2 \dots a_n, a_i \in \Sigma \text{ pro } i = 1, \dots, n.$$

Posloupnosti w nazýváme řetězce nad abecedou Σ. Dále definujeme délku $|w|$ řetězce w jako $|w| = n$. Množina Σ^* obsahuje také speciální řetězec ε, pro který platí $|\varepsilon| = 0$. ε se nazývá prázdný řetězec.

Definice 1.2 Množinu L, pro kterou platí $L \subseteq \Sigma^*$ nazýváme formálním jazykem nad abecedou Σ.

❖ Příklady jazyků nad abecedou $\Sigma = \{0, 1\}$:

- $L_1 = \{01, 0011\}$
- $L_2 = \{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$
- $L_3 = \{ww^R \mid w \in \{0, 1\}^+\}$

❖ Na množině Σ^* zavedeme operaci $\cdot$ takto:
Jsou-li dány dva řetězce $w, w' \in \Sigma^*$:

$$w = a_1 a_2 \ldots a_n,$$
$$w' = a'_1 a'_2 \ldots a'_m \; n, m \geq 0,$$

pak $w \cdot w' = a_1 a_2 \ldots a_n a'_1 a'_2 \ldots a'_m \; (= ww')$.

Operace $\cdot$ se nazývá zřetězení nebo konkatenace.
Pro w, w', w'' platí:

1. $|ww'| = |w| + |w'|$,
2. $w(w'w'') = (ww')w''$ tj. asociativnost konkatenace,
3. $w\varepsilon = \varepsilon w = w$ tj. ε je jednotkový prvek vzhledem k operaci $\cdot$.

❖ Dále zavádíme pojmy:

- prefix, sufix, podřetězec,
- $a^i = a_1 a_2 \ \ldots a_i$ kde $\forall 1 \leq j \leq i : a_j = a$
- $\#_a(w)$ je počet znaků $a \in \Sigma$ v řetězci $w \in \Sigma^*$
- w^R (tj. revers řetězce): pro $w = a_1 a_2 \ldots a_n$ je $w^R = a_n a_{n-1} \ldots a_1$

Operace nad jazyky

Jazyk je množina $\rightarrow$ jsou definovány všechny množinové operace nad jazyky.
Připomeňme operaci komplement jazyka L nad abecedou Σ (často značený jako $co-L$), který je definován jako $co-L = \Sigma^* \setminus L$.

Definice 1.3 Nechť L_1 je jazyk nad abecedou Σ_1, L_2 je jazyk nad abecedou Σ_2.
Součinem (konkatenací) jazyků L_1 a L_2 nad abecedou $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$ rozumíme jazyk

$$L_1 \cdot L_2 = \{xy \mid x \in L_1 \wedge y \in L_2\}$$

Příklad 1.1 Nechť $P = \{A, B, \ldots, Z, a, b, \ldots, z\}$, $C = \{0, 1, \ldots, 9\}$ jsou abecedy, $L_1 = P$ a $L_2 = (P \cup C)^*$ jazyky nad P resp. $P \cup C$.
Jaký jazyk určuje součin $L_1 L_2$?

Iterace a pozitivní iterace

Definice 1.4 Nechť L je jazyk. Iterací L^* jazyka L a pozitivní iterací L^+ jazyka L definujeme takto:

1. $L^0 = \{\varepsilon\}$
2. $L^n = L \cdot L^{n-1}$ pro $n \geq 1$
3. $L^* = \bigcup_{n \geq 0} L^n$
4. $L^+ = \bigcup_{n \geq 1} L^n$

Je-li L jazyk, pak platí:

1. $L^* = L^+ \cup \{\varepsilon\}$
2. $L^+ = L \cdot L^* = L^* \cdot L$

Příklad 1.2 $L_1 = \{(p\}, L_2 = \{, p\}, L_3 = \{)\}$

$$L_1 L_2^* L_3 = \{(p),\ (p,p),\ (p,p,p),\ \ldots\}$$

Algebra jazyků

Definice 1.5 Algebraická struktura $< A, +, \cdot, 0, 1 >$ se nazývá polookruh, jestliže:

1. $< A, +, 0 >$ je komutativní monoid (tj. $+$ je asociativní a 0 je neutrální prvek) ,
2. $< A, \cdot, 1 >$ je monoid,
3. pro operaci $\cdot$ platí distributivní zákon vzhledem k $+$:
   $\forall a, b, c \in A : a(b + c) = ab + ac, (a + b)c = ac + bc.$

Věta 1.1 Algebra jazyků $< 2^{\Sigma^*}, \cup, \cdot, \emptyset, \{\varepsilon\} >$, kde $\cup$ je sjednocení a $\cdot$ konkatenace jazyků tvoří polookruh.

Důkaz.

1. $< 2^{\Sigma^*}, \cup, \emptyset >$ je komutativní monoid ($\cup$ je komutativní a asociativní operace a $L \cup \emptyset = \emptyset \cup L = L$ pro všechna $L \in 2^{\Sigma^*}$).
2. $< 2^{\Sigma^*}, \cdot, \{\varepsilon\} >$ je monoid:
   $L \cdot \{\varepsilon\} = \{\varepsilon\} \cdot L = L$ pro všechna $L \in 2^{\Sigma^*}$.
3. Pro všechny $L_1, L_2, L_3 \in 2^{\Sigma^*}$:
   $L_1(L_2 \cup L_3) = \{xy \mid (x \in L_1) \wedge (y \in L_2 \vee y \in L_3)\} = \ldots = L_1L_2 \cup L_1L_3$

Důkazy identity jazyků

Příklad:

Rozhodněte a dokažte, zda platí následující tvrzení:

1. $\forall L_1, L_2 \subseteq \Sigma^* : L_1^* \cup L_2^* = (L_1 \cup L_2)^*$
2. $\exists L_1, L_2 \subseteq \Sigma^* : L_1^* \cup L_2^* = (L_1 \cup L_2)^*$
3. $\forall L \subseteq \Sigma^* : L^* = (L^*)^*$

Důkazy identity jazyků

Příklad:

Rozhodněte a dokažte, zda platí následující tvrzení:

1. $\forall L_1, L_2 \subseteq \Sigma^* : L_1^* \cup L_2^* = (L_1 \cup L_2)^*$
2. $\exists L_1, L_2 \subseteq \Sigma^* : L_1^* \cup L_2^* = (L_1 \cup L_2)^*$
3. $\forall L \subseteq \Sigma^* : L^* = (L^*)^*$

Řešení 1: Tvrzení neplatí to jest platí jeho negace $\exists L_1, L_2 \subseteq \Sigma^* : L_1^* \cup L_2^* \neq (L_1 \cup L_2)^*$
Zvolme například $L_1 = \{a\}$ a $L_2 = \{b\}$. Pak $L_1^* \cup L_2^* = \{a\}^* \cup \{b\}^*$ ale
$(L_1 \cup L_2)^* = \{a, b\}^*$. Zřejmě $\{a\}^* \cup \{b\}^* \neq \{a, b\}^*$.

Důkazy identity jazyků

Příklad:

Rozhodněte a dokažte, zda platí následující tvrzení:

1. $\forall L_1, L_2 \subseteq \Sigma^* : L_1^* \cup L_2^* = (L_1 \cup L_2)^*$
2. $\exists L_1, L_2 \subseteq \Sigma^* : L_1^* \cup L_2^* = (L_1 \cup L_2)^*$
3. $\forall L \subseteq \Sigma^* : L^* = (L^*)^*$

Řešení 1: Tvrzení neplatí to jest platí jeho negace $\exists L_1, L_2 \subseteq \Sigma^* : L_1^* \cup L_2^* \neq (L_1 \cup L_2)^*$
Zvolme například $L_1 = \{a\}$ a $L_2 = \{b\}$. Pak $L_1^* \cup L_2^* = \{a\}^* \cup \{b\}^*$ ale
$(L_1 \cup L_2)^* = \{a, b\}^*$. Zřejmě $\{a\}^* \cup \{b\}^* \neq \{a, b\}^*$.

Řešení 2: Tvrzení platí. Zvolme například $L_1 = L_2 = \{a\}$. Pak
$L_1^* \cup L_2^* = \{a\}^* = (L_1 \cup L_2)^*$.

Důkazy identity jazyků

Příklad:

Rozhodněte a dokažte, zda platí následující tvrzení:

1. $\forall L_1, L_2 \subseteq \Sigma^* : L_1^* \cup L_2^* = (L_1 \cup L_2)^*$
2. $\exists L_1, L_2 \subseteq \Sigma^* : L_1^* \cup L_2^* = (L_1 \cup L_2)^*$
3. $\forall L \subseteq \Sigma^* : L^* = (L^*)^*$

Řešení 3: Tvrzení platí. Notace: w_0 i w_i^0 (pro $i \geq 1$) označuje ϵ

$$L^* = \bigcup_{n \geq 0} L^n = \{w \mid w \in L^i \wedge i \geq 0\} = \{w_1 w_2 \ldots w_n \mid n \geq 0 \wedge \forall 1 \leq i \leq n : w_i \in L\}$$

$$(L^*)^* = \{w_1 w_2 \ldots w_n \mid n \geq 0 \wedge \forall 1 \leq i \leq n : w_i \in L^{m_i} \wedge m_i \geq 0\} =$$
$$\{w_1^1 w_1^2 \ldots w_1^{m_1} w_2^1 w_2^2 \ldots w_2^{m_2} \ldots w_n^1 w_n^2 \ldots w_n^{m_n} \mid n \geq 0 \wedge$$
$$\forall 1 \leq i \leq n : m_i \geq 0 \wedge \forall 1 \leq j \leq \max\{m_i \mid 1 \leq i \leq n\} : w_i^j \in L\} =$$
$$\{w_1 w_2 \ldots w_k \mid k = m_1 + m_2 + \ldots m_n \wedge \forall 1 \leq i \leq k : w_k \in L\} =$$
$$\{w_1 w_2 \ldots w_k \mid k \geq 0 \wedge \forall 1 \leq i \leq k : w_i \in L\} = L^*$$

Gramatiky

❖ Představují základní nástroj pro reprezentaci jazyků.

Definice 1.6 Gramatika G je čtveřice $G = (N,\ \Sigma,\ P,\ S)$, kde

1. N je konečná množina nonterminálních symbolů.
2. Σ je abeceda (tj. konečná množina terminálních symbolů), kde $N \cap \Sigma = \emptyset$.
3. P je konečná podmnožina kartézského součinu

$$(N \cup \Sigma)^* N (N \cup \Sigma)^* \times (N \cup \Sigma)^*$$

   nazývaná množina přepisovacích pravidel
4. $S \in N$ je výchozí (startovací) symbol gramatiky G.

❖ Prvek $(\alpha, \beta) \in P$ je přepisovací pravidlo a zapisuje se ve tvaru

$$\alpha \to \beta,$$

kde α je levá strana, β je pravá strana pravidla $\alpha \to \beta$.

Příklad 1.3 Příklady gramatik

- $G_1 = (\{A, S\}, \{0, 1\}, P_1, S)$

$$P_1: \quad \begin{array}{lcl} S & \to & 0A1 \\ 0A & \to & 00A1 \\ A & \to & \varepsilon \end{array}$$

- $G_2 = (N_2, \Sigma_2, P_2, I)$

$N_2 = \{I, P, C\}$

$\Sigma_2 = \{a, b, \ldots, z, 0, 1, \ldots, 9\}$

$$P_2: \quad \begin{array}{lcllcl} I & \to & P & & & \\ I & \to & IP & & & \\ I & \to & IC & & & \\ P & \to & a & C & \to & 0 \\ P & \to & b & C & \to & 1 \\ & \vdots & & & \vdots & \\ P & \to & z & C & \to & 9 \end{array}$$

❖ Konvence 1: Obsahuje-li množina P přepisovací pravidla tvaru

$$\alpha \to \beta_1, \alpha \to \beta_2, \ldots, \alpha \to \beta_n$$

pak pro zkrácení budeme používat zápisu

$$\alpha \to \beta_1 \mid \beta_2 \mid \cdots \mid \beta_n$$

❖ Konvence 2: Pro zápis symbolů a řetězců budeme užívat této úmluvy:

1. a, b, c, d reprezentují terminální symboly.
2. A, B, C, D, S reprezentují nonterminální symboly, S výchozí symbol.
3. $U, V, \ldots, Z$ reprezentují terminální nebo nonterminální symboly.
4. $\alpha, \beta, \ldots, \omega$ reprezentují řetězce z množiny $(N \cup \Sigma)^*$.
5. $u, v, w, \ldots, z$ reprezentují řetězce z Σ^*.

Definice 1.7 Nechť $G = (N, \Sigma, P, S)$ je gramatika a nechť λ, μ jsou řetězce z $(N \cup \Sigma)^*$. Mezi λ a μ platí binární relace $\underset{G}{\Rightarrow}$, zvaná přímá derivace, můžeme-li řetězce λ a μ vyjádřit ve tvaru

$$\lambda = \gamma\alpha\delta$$
$$\mu = \gamma\beta\delta$$

$\gamma, \delta \in (N \cup \Sigma)^*$ a $\alpha \to \beta$ je nějaké přepisovací pravidlo z P. Pak píšeme

$$\lambda \underset{G}{\Rightarrow} \mu \text{ nebo}$$
$$\lambda \Rightarrow \mu.$$

Definice 1.8 Nechť $G = (N, \Sigma, P, S)$ je gramatika a $\Rightarrow$ relace přímé derivace na $(N \cup \Sigma)^*$. Relace $\overset{+}{\Rightarrow}$ označuje tranzitivní uzávěr relace $\Rightarrow$ a nazývá se relací derivace. Platí-li $\lambda \overset{+}{\Rightarrow} \mu$, pak existuje posloupnost

$$\lambda = \nu_0 \Rightarrow \nu_1 \Rightarrow \ldots \Rightarrow \nu_n = \mu, \; n \geq 1,$$

která se nazývá derivací délky n.

❖ Relace $\overset{*}{\Rightarrow}$ označuje reflexivní a tranzitivní uzávěr relace $\Rightarrow$:

$$\lambda \overset{*}{\Rightarrow} \mu \quad \Rightarrow \quad \lambda \overset{+}{\Rightarrow} \mu \text{ nebo } \lambda = \mu$$

Příklad 1.4 Derivace v gramatice G_1, resp. G_2, z příkladu 1.3:

❖ V gramatice G_1:

- Pravidlo $0A \to 00A1$ implikuje $0^n A 1^n \Rightarrow 0^{n+1} A 1^{n+1}$,
- tedy $0A1 \overset{*}{\Rightarrow} 0^n A 1^n$ pro libovolné $n > 0$.

❖ V gramatice G_2:

- $I \Rightarrow IP \Rightarrow IPP \Rightarrow ICPP \Rightarrow PCPP \Rightarrow aCPP \Rightarrow a1PP \Rightarrow a1xP \Rightarrow a1xy$,
- tj. $I \overset{+}{\Rightarrow} a1xy$.

Definice 1.9 Nechť $G = (N, \Sigma, P, S)$ je gramatika. Řetězec $\alpha \in (N \cup \Sigma)^*$ nazýváme větnou formou, platí-li $S \stackrel{*}{\Rightarrow} \alpha$. Větná forma, která obsahuje pouze terminální symboly se nazývá věta.

Jazyk $L(G)$ generovaný gramatikou G je množina:

$$L(G) = \{w \in \Sigma^* \mid S \stackrel{*}{\Rightarrow} w\}$$

Příklad 1.5

$$L(G_1) = \{0^n 1^n \mid n > 0\}$$

protože

$$\begin{aligned} S &\Rightarrow 0A1 \\ S &\stackrel{*}{\Rightarrow} 0^n A 1^n \quad \text{(viz předchozí příklad)} \\ S &\stackrel{*}{\Rightarrow} 0^n 1^n \quad \text{(pravidlo } A \to \varepsilon\text{)} \end{aligned}$$

Chomského hierarchie

Je definována na základě tvaru přepisovacích pravidel:

- Typ 0 – obecné (neomezené) gramatiky:

$$\alpha \to \beta \qquad \alpha \in (N \cup \Sigma)^* N (N \cup \Sigma)^*, \beta \in (N \cup \Sigma)^*$$

- Typ 1 – kontextové gramatiky:

$$\alpha A \beta \to \alpha \gamma \beta \qquad A \in N,\ \alpha, \beta \in (N \cup \Sigma)^*, \gamma \in (N \cup \Sigma)^+$$

nebo $S \to \varepsilon$, pakliže se S neobjevuje na pravé straně žádného pravidla

(Alternativní definice definující stejnou třídu jazyků: $\alpha \to \beta,\ |\alpha| \leq |\beta|$ nebo $S \to \varepsilon$ omezené jako výše.)

- Typ 2 – bezkontextové gramatiky:

$$A \to \alpha \qquad A \in N,\ \alpha \in (N \cup \Sigma)^*$$

- Typ 3 – regulární gramatiky:

$$A \to xB \qquad \text{nebo}$$
$$A \to x \mid \varepsilon \qquad A, B \in N,\ x \in \Sigma$$

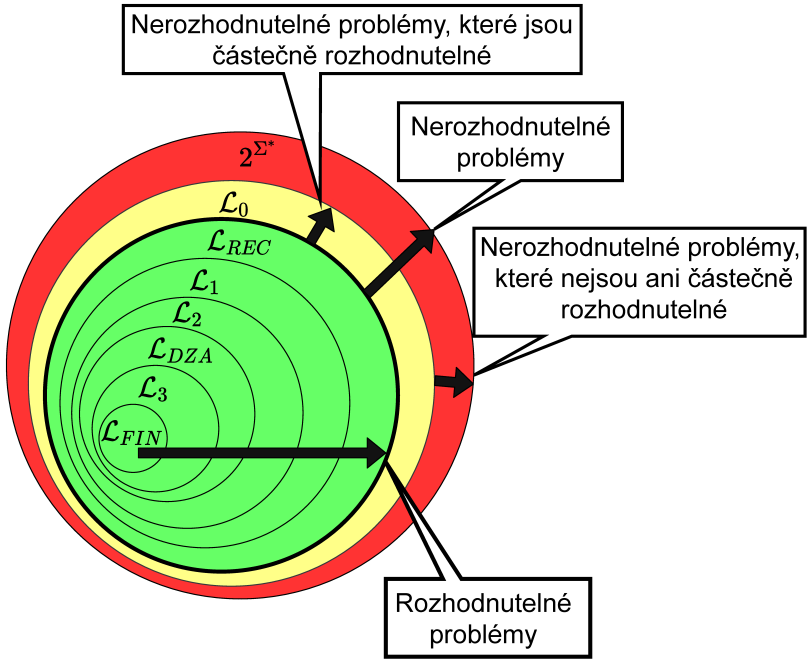
(Alternativní tvary gramatik, které mají stejnou vyjadřovací sílu, jsou uvedeny v opoře.)

Definice 1.10 Jazyk generovaný gram. typu $i \in \{0, 1, 2, 3\}$, se nazývá jazykem typu i.

Existuje synonymní označení jazyků:

- Jazyk typu 0 ($\mathcal{L}_0$) — rekurzivně vyčíslitelný jazyk.
- Jazyk typu 1($\mathcal{L}_1$) — kontextový jazyk.
- Jazyk typu 2 ($\mathcal{L}_2$) — bezkontextový jazyk.
- Jazyk typu 3 ($\mathcal{L}_3$) — regulární jazyk.

❖ Součást hierarchie z úvodu



Věta 1.2 Nechť $\mathcal{L}_i$ značí třídu všech jazyků typu i nad abecedou Σ.
Pak platí:

$$\mathcal{L}_3 \subseteq \mathcal{L}_2 \subseteq \mathcal{L}_1 \subseteq \mathcal{L}_0$$

Důkaz.
Důkaz plyne z definice tříd Chomského hierarchie jazyků.

□

Věta 1.3 Platí:

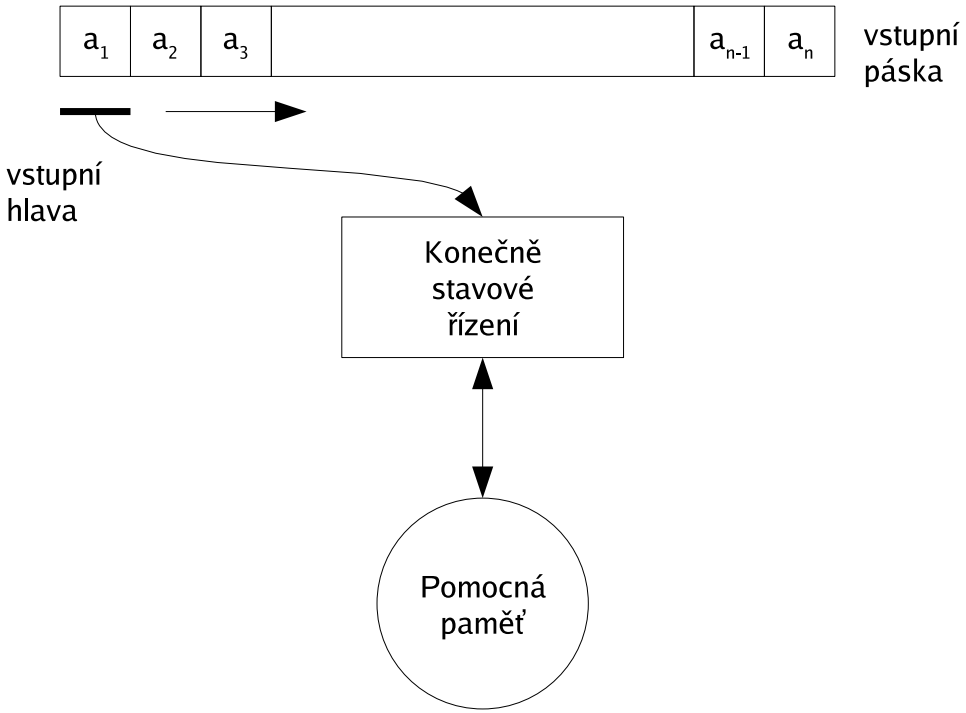
$$\mathcal{L}_3 \subset \mathcal{L}_2 \subset \mathcal{L}_1 \subset \mathcal{L}_0$$

Důkaz jednotlivých inkluzí v průběhu semestru.

Regulární jazyky a Konečné automaty

Automaty

- Představují alternativní (mnohdy přirozenější) nástroj pro reprezentaci jazyků.



- Klasifikace:
  - podle mechanismu a funkce čtecí hlavy,
  - pomocné paměti,

Konečný automat

Definice 1.11 Konečným nedeterministický automatem (NKA) rozumíme automat M specifikovaný 5-ticí

$$M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F), \qquad \text{kde:}$$

1. Q je konečná množina stavů,
2. Σ je konečná vstupní abeceda,
3. δ je funkce přechodů (přechodová funkce) tvaru $\delta : Q \times \Sigma \to 2^Q$,
4. $q_0 \in Q$ je počáteční stav,
5. $F \subseteq Q$ je množina koncových stavů.

Je-li $\forall q \in Q \; \forall a \in \Sigma : |\delta(q, a)| \leq 1$, pak M nazýváme deterministickým konečným automatem (zkráceně DKA).

Deterministický konečným automat je také často specifikován 5-ticí

$$M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F), \qquad \text{kde:}$$

- δ je parciální funkce tvaru $\delta : Q \times \Sigma \to Q$,
- a význam ostatních složek zůstává zachován.

Je-li přechodová funkce δ totální, pak M nazýváme úplně definovaným deterministickým konečným automatem.

Dále budeme obvykle pracovat s touto specifikací DKA.

Lemma 1.1 Ke každému DKA M existuje „ekvivalentní“ úplně definovaný DKA M'.

Důkaz. (idea) Množinu stavů automatu M' rozšíříme o nový, nekoncový stav (anglicky označovaný jako *SINK* stav) a s využitím tohoto stavu doplníme prvky přechodové funkce δ' automatu M' tak, aby byla totální. □

Příklad 1.6 Zápis NKA.

$$\text{NKA } M_1 = (\{q_0, q_1, q_2, q_F\},\ \{0,1\},\ \delta,\ q_0,\ \{q_F\})$$

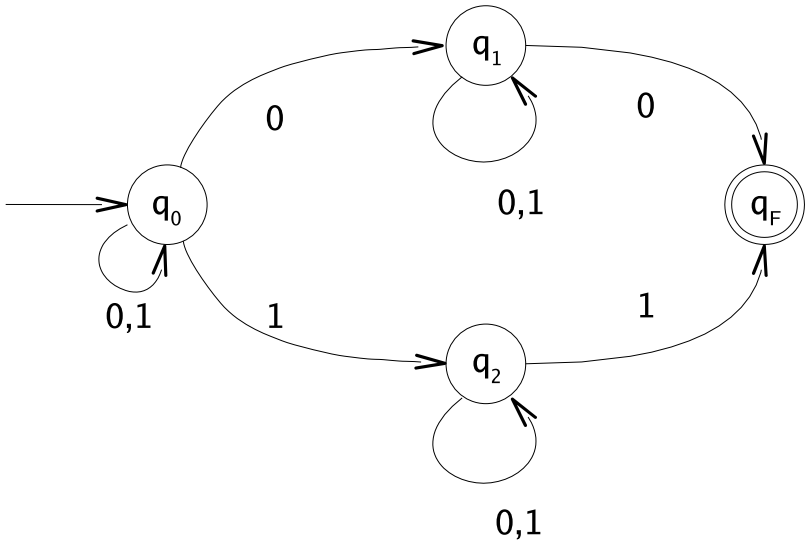
$$\begin{array}{lll} \delta: & \delta(q_0,0) = \{q_0, q_1\} & \delta(q_0,1) = \{q_0, q_2\} \\ & \delta(q_1,0) = \{q_1, q_F\} & \delta(q_1,1) = \{q_1\} \\ & \delta(q_2,0) = \{q_2\} & \delta(q_2,1) = \{q_2, q_F\} \\ & \delta(q_F,0) = \emptyset & \delta(q_F,1) = \emptyset \end{array}$$

❖ Alternativní způsoby reprezentace funkce δ:

1. maticí (přechodů)

	0	1
q_0	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_2\}$
q_1	$\{q_1, q_F\}$	$\{q_1\}$
q_2	$\{q_2\}$	$\{q_2, q_F\}$
q_F	$\emptyset$	$\emptyset$

2. diagramem přechodů



Definice 1.12 Nechť $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ je konečný automat (tj. NKA).

❖ Konfigurace C konečného automatu M je uspořádaná dvojice

$$C = (q, w), \quad (q, w) \in Q \times \Sigma^*$$

kde q je aktuální stav, w je dosud nezpracovaná část vstupního řetězce.

❖ Počáteční konfigurace je konfigurace $(q_0, a_1 a_2 \ldots a_n)$.

❖ Koncová konfigurace je konfigurace $(q_F, \varepsilon), \quad q_F \in F$.

❖ Přechodem automatu M rozumíme binární relaci $\underset{M}{\vdash}$ v množině konfigurací C

$$\underset{M}{\vdash} \subseteq (Q \times \Sigma^*) \times (Q \times \Sigma^*)$$

která je definována takto:

$$(q, w) \underset{M}{\vdash} (q', w') \overset{def.}{\iff} w = aw' \ \wedge \ q' \in \delta(q, a) \ \ pro\ q, q' \in Q, a \in \Sigma, w, w' \in \Sigma^*$$

Relace $\overset{k}{\underset{M}{\vdash}}$, $\overset{+}{\underset{M}{\vdash}}$, $\overset{*}{\underset{M}{\vdash}}$ mají obvyklý význam, tj. $k-$tá mocnina relace $\vdash$, tranzitivní a tranzitivní a reflexivní uzávěr relace $\vdash$.

❖ Řetězec w přijímaný NKA M je definován takto: $(q_0, w) \overset{*}{\underset{M}{\vdash}} (q, \varepsilon), \quad q \in F$.

❖ Jazyk $L(M)$ přijímaný NKA M je definován takto:

$$L(M) = \{w \mid (q_0, w) \overset{*}{\underset{M}{\vdash}} (q, \varepsilon) \wedge q \in F\}.$$

Příklad 1.7 Uvažujme NKA M_1 z příkladu 1.5. Platí:

$$(q_0, 1010) \vdash (q_0, 010) \vdash (q_1, 10) \vdash (q_1, 0) \vdash (q_f, \varepsilon)$$

a tedy: $(q_0, 1010) \overset{*}{\vdash} (q_f, \varepsilon)$

Neplatí například $(q_0, \varepsilon) \overset{*}{\vdash} (q_f, \varepsilon)$

Vyjádření jazyka $L(M_1)$:

$L(M_1) = \{w \mid w \in \{0,1\}^* \wedge w$ končí symbolem, který je již v řetězci w obsažen$\}$

□

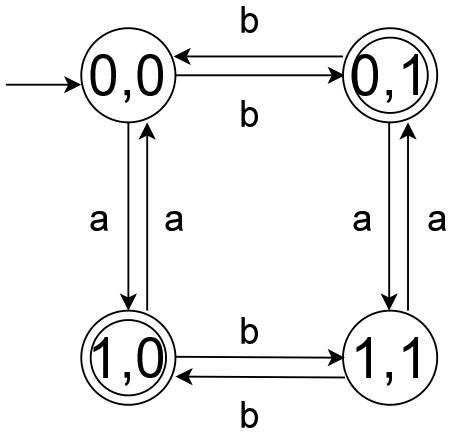
Konstrukce konečných automatů

❖ Interpretace stavů: Stav reprezentuje informaci o průběhu výpočtu

Příklad 1.8 Uvažme jazyk

$$L = \{w \in \{a,b\}^* \mid \#_a(w) \bmod 2 \neq \#_b(w) \bmod 2\}$$

Stav kóduje dvoji (p,q) kde $p = \#_a(u) \bmod 2$ a $q = \#_b(u) \bmod 2$ a u je zatím přečtený vstup.



Konstrukce konečných automatů

- Interpretace stavů: Stav reprezentuje informaci o průběhu výpočtu

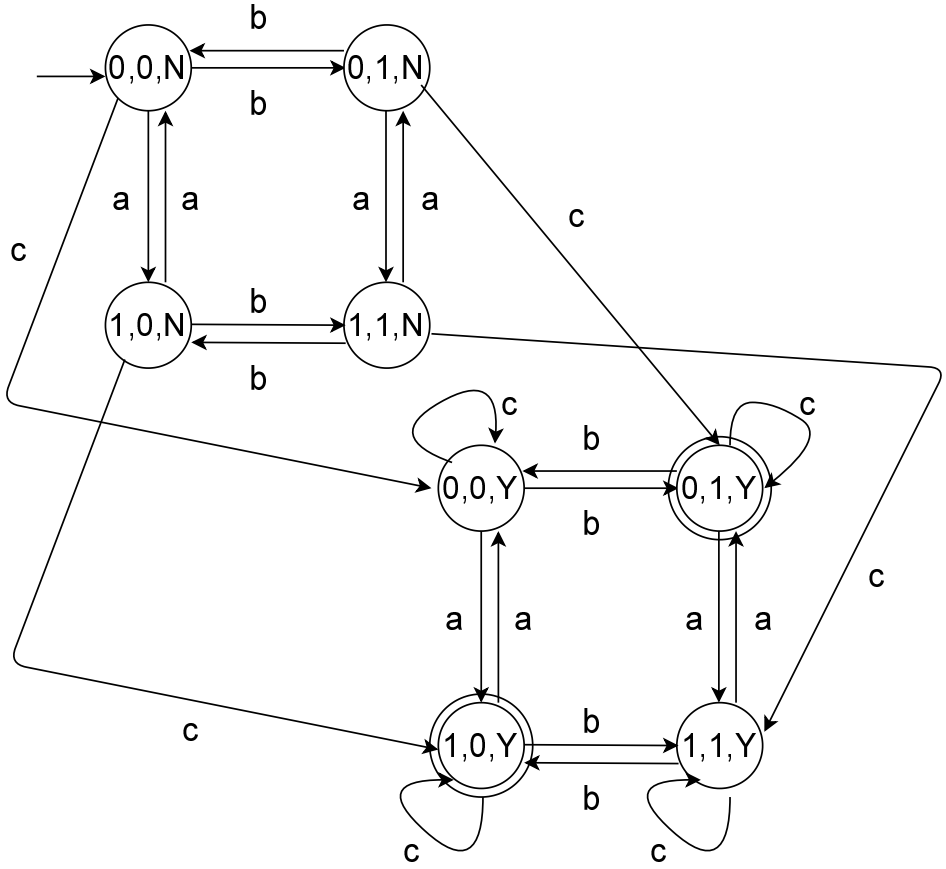
Příklad 1.9 Uvažme jazyk

$$L = \{w \in \{a, b, c\}^* \mid \#_a(w) \bmod 2 \neq \#_b(w) \bmod 2 \wedge \#_c(w) > 0\}$$

❖ Interpretace stavů: Stav reprezentuje informaci o průběhu výpočtu

$L = \{w \in \{a,b,c\}^* \mid \#_a(w) \bmod 2 \neq \#_b(w) \bmod 2 \wedge \#_c(w) > 0\}$

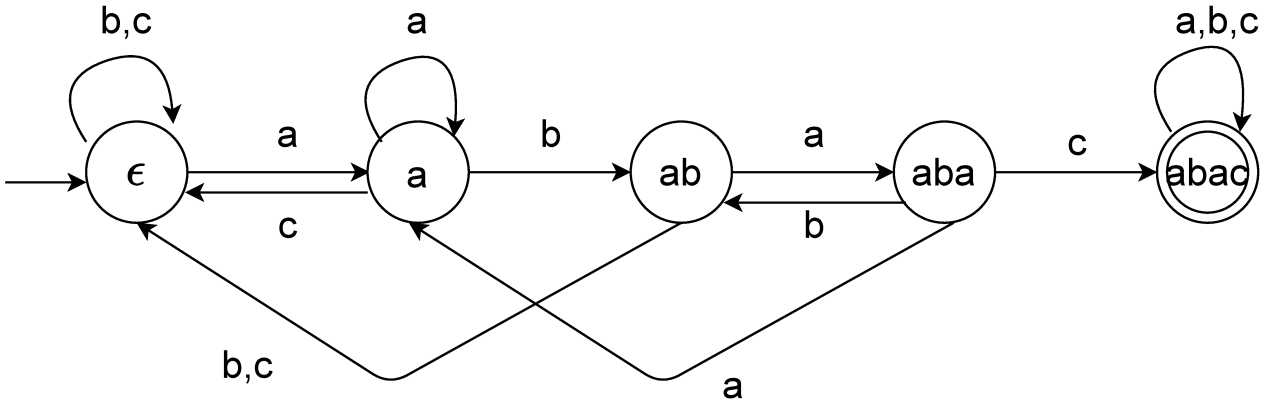
Stav kóduje trojici (p,q,r) kde $p = \#_a(u) \bmod 2$ a $q = \#_b(u) \bmod 2$ a $r = N$ pokud $\#_c(u) = 0$ a $r = Y$ pokud $\#_c(u) > 0$



Konstrukce konečných automatů

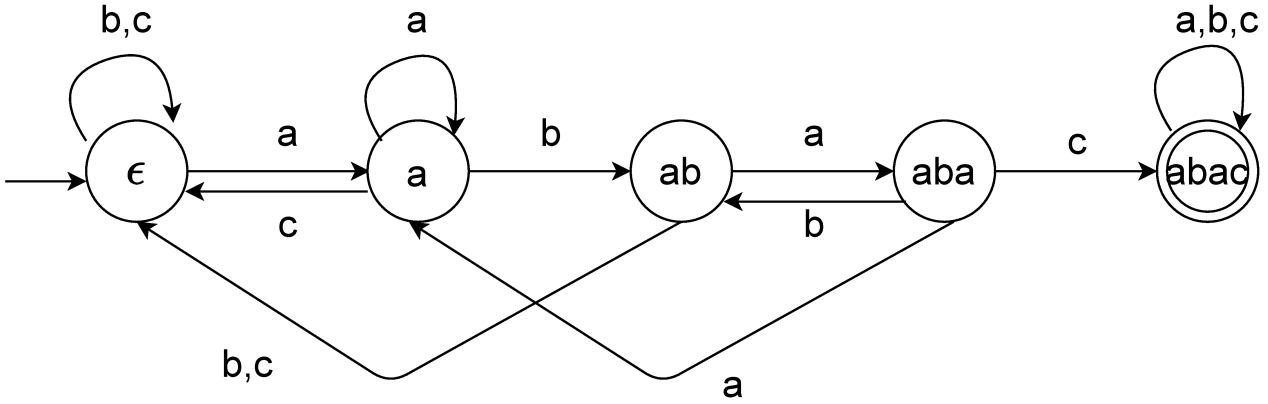
❖ Využití nedeterminismu: Stroj "uhádne" jistý aspekt výpočtu vedoucí k přijetí slova z jazyka.

Příklad 1.10 Uvažme jazyk
$L = \{w \in \{a, b, c\}^* \mid w$ obsahuje podslovo $abac\}$

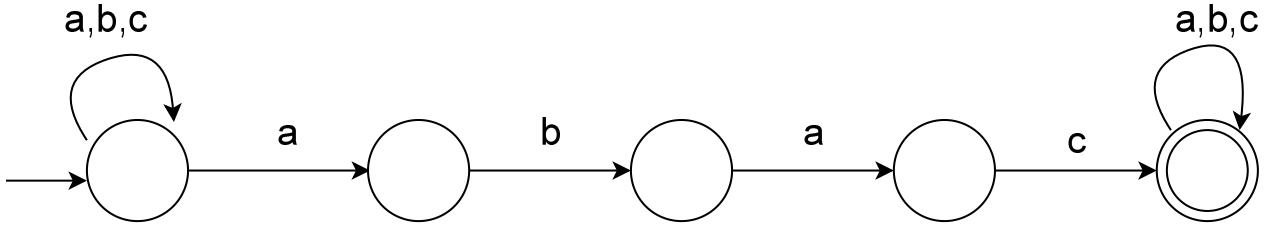


❖ Využití nedeterminismu: Stroj "uhádne" jistý aspekt výpočtu vedoucí k přijetí slova z jazyka.

$L = \{w \in \{a, b, c\}^* \mid w$ obsahuje podslovo $abac\}$



❖ NKA "uhádne" kde začíná hledané podslovo a pouze ověří jeho tvar.



Ekvivalence NKA a DKA

Věta 1.4 Každý NKA M lze převést na DKA M' tak, že

$$L(M) = L(M').$$

Důkaz.

1. Nalezneme algoritmus převodu $M \to M'$ (níže).
2. Ukážeme, že $L(M) = L(M')$ tj. ukážeme, že platí:
   (a) $L(M) \subseteq L(M')$ a současně,
   (b) $L(M') \subseteq L(M)$.

□

Převod NKA na ekvivalentní DKA

Algoritmus 1.1

- Vstup: NKA $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$
- Výstup: DKA $M' = (Q', \Sigma, \delta', q_0', F')$, $L(M) = L(M')$
- Metoda:
  1. Polož $Q' = 2^Q$.
  2. Polož $q_0' = \{q_0\}$.
  3. Polož $F' = \{S \mid S \in 2^Q \wedge S \cap F \neq \emptyset\}$.
  4. Pro všechna $S \in 2^Q$ a pro všechna $a \in \Sigma$ polož:
     - $\delta'(S, a) = \bigcup_{q \in S} \delta(q, a)$.

Důkaz. $L(M) = L(M')$

Na deterministické automaty lze pohlížet jako na speciální případ nedeterministických automatů (tj. $\delta : Q \times \Sigma \to 2^Q$), kdy pro každý $q \in Q$ a $a \in \Sigma$ je množina $\delta(q, a)$ nanejvýš jednoprvková.

Zaveďme tedy rozšířenou přechodovou funkci $\hat{\delta} : Q \times \Sigma^* \to 2^Q$, kde

- $\hat{\delta}(q, \varepsilon) = \{q\}$
- $\hat{\delta}(q, wa) = \bigcup_{p \in \hat{\delta}(q,w)} \delta(p, a)$

Nyní ukážeme, že pro každé $w \in \Sigma^*$ platí $\hat{\delta}(q_0, w) = \hat{\delta'}(\{q_0\}, w)$. Indukcí k délce w dostáváme.

- Pro $|w| = 0$ platí $\hat{\delta}(q_0, \varepsilon) = \{q_0\} = \hat{\delta'}(\{q_0\}, \varepsilon)$.
- Indukční krok: Nechť $w = va$, kde $v \in \Sigma^*$ a $a \in \Sigma$. Pak platí $\hat{\delta}(q_0, va) = \bigcup_{p \in \hat{\delta}(q_0,v)} \delta(p, a) = \delta'(\hat{\delta}(q_0, v), a)$ (dle definice δ') $=$ $\delta'(\hat{\delta'}(\{q_0\}, v), a)$ (dle indukčního předpokladu) $= \hat{\delta'}(\{q_0\}, va)$.

Pak platí: $w \in L(M) \Leftrightarrow \hat{\delta}(q_0, w) \cap F \neq \emptyset \Leftrightarrow \hat{\delta'}(\{q_0\}, w) \cap F \neq \emptyset \Leftrightarrow w \in L(M')$.

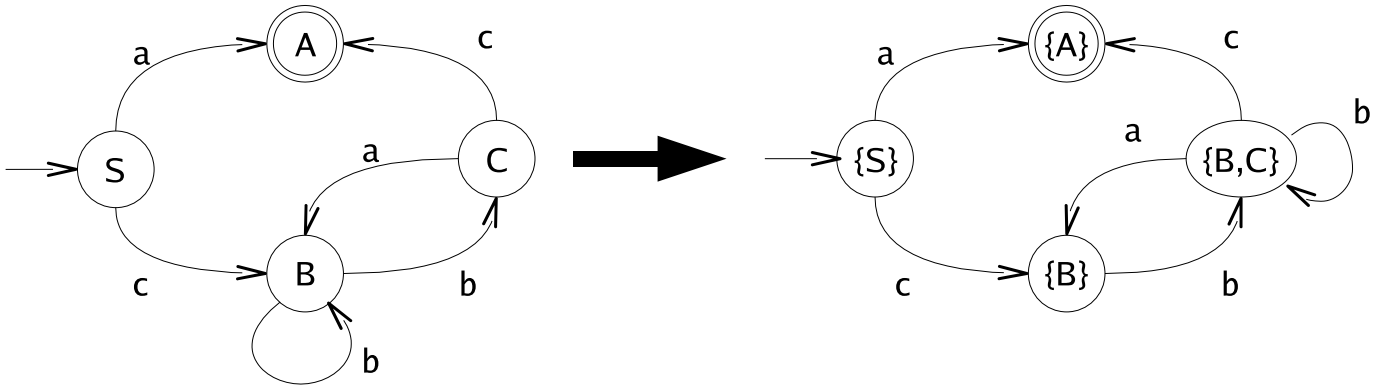
□

Příklad 1.11 Uvažujme NKA $M_2 = (\{S, A, B, C\},\ \{a, b, c\},\ \delta,\ S,\ \{A\})$

$\delta:\quad \delta(S,a) = \{A\}\quad \delta(S,c) = \{B\}\quad \delta(B,b) = \{B,C\}\quad \delta(C,a) = \{B\}\quad \delta(C,c) = \{A\}$

K nalezení funkce δ' příslušného DKA aplikujeme zkrácený postup, využívající skutečnosti, že řada stavů z 2^Q může být nedostupných:

1. Počáteční stav: $\{S\}$
2. $\delta'(\{S\}, a) = \{A\}$ — koncový stav
   $\delta'(\{S\}, c) = \{B\}$
3. $\delta'(\{B\}, b) = \{B, C\}$
4. $\delta'(\{B,C\}, a) = \delta(B,a) \cup \delta(C,a) = \{B\}$
   $\delta'(\{B,C\}, b) = \{B,C\}$ $\delta'(\{B,C\}, c) = \{A\}$



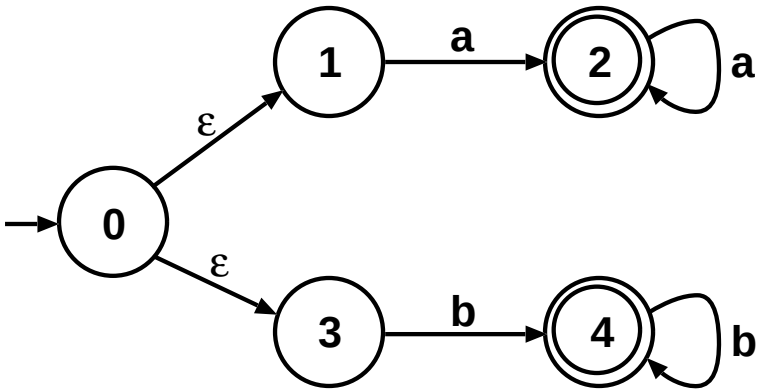
Rozšířené konečné automaty

❖ Dovolují jednodušší návrh a konstrukci automatů.

Definice 1.13 Rozšířený konečný automat (RKA) je pětice $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, kde

- Q je konečná množina stavů,
- Σ je konečná vstupní abeceda,
- δ je zobrazení $Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \to 2^Q$,
- $q_0 \in Q$ je počáteční stav,
- $F \subseteq Q$ je množina koncových stavů.

Příklad 1.12 $M = (\{0, 1, 2, 3, 4\}, \{a, b\}, \delta, 0, \{2, 4\})$



$$L(M) = aa^* + bb^* = a^+ + b^+$$

ε-uzávěr

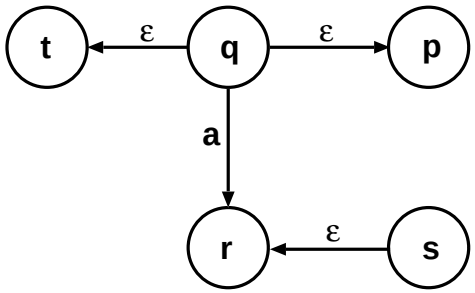
❖ Klíčovou funkci v algoritmu převodu RKA na DKA má výpočet funkce, která k danému stavu určí množinu všech stavů, jež jsou dostupné po ε hranách diagramu přechodů funkce δ. Označme tuto funkci jako ε-uzávěr:

$$\varepsilon\text{-uzávěr}(q) = \{p \mid \exists w \in \Sigma^* : (q, w) \overset{*}{\vdash} (p, w)\}$$

❖ Funkci ε-uzávěr zobecníme tak, aby argumentem mohla být množina $T \subseteq Q$:

$$\varepsilon\text{-uzávěr}(T) = \bigcup_{s \in T} \varepsilon\text{-uzávěr}(s)$$

Příklad 1.13



$$\varepsilon\text{-uzávěr}(\{q, r, s\}) = \{p, q, r, s, t\}$$

Výpočet ε-uzávěru

❖ Zavedeme relaci $\xrightarrow{\varepsilon}$ na množině Q takto:

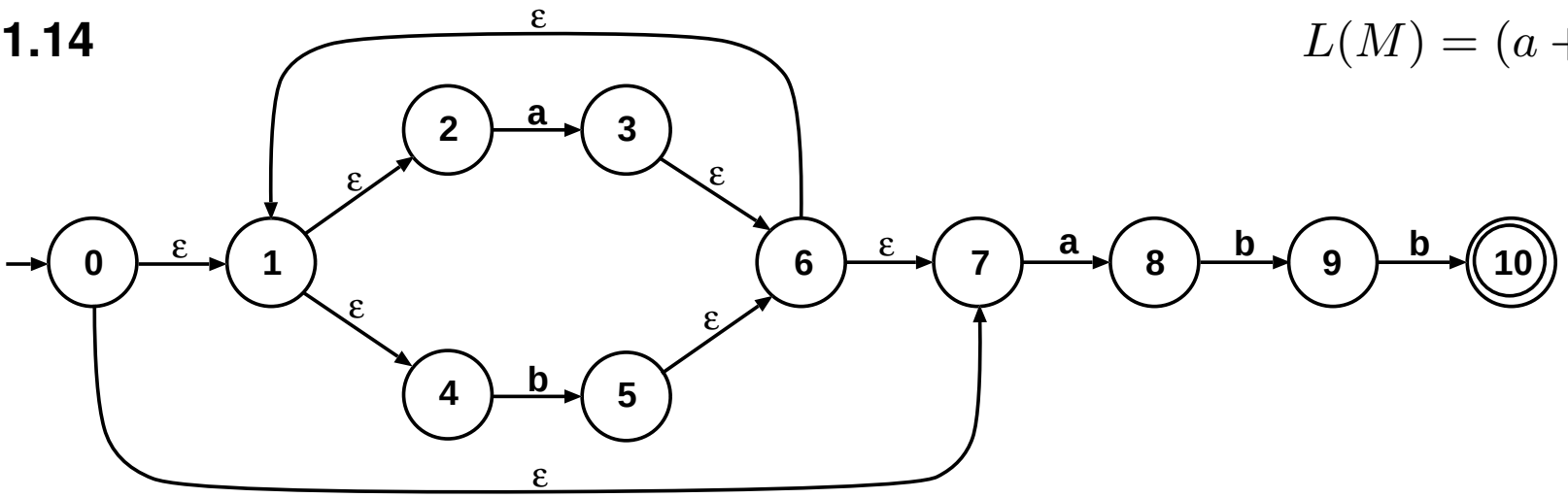
$$\forall q_1, q_2 \in Q : q_1 \xrightarrow{\varepsilon} q_2 \overset{def}{\iff} q_2 \in \delta(q_1, \varepsilon)$$

Pak ε-uzávěr$(p) = \{q \in Q \mid p \xrightarrow{\varepsilon}{}^{*} q\}$ je reflexivní a tranzitivní uzávěr relace $\xrightarrow{\varepsilon}{}^{*}$.

❖ K výpočtu tranzitivního uzávěr použijeme Warshallův algoritmus.

Příklad 1.14

$$L(M) = (a+b)^*abb$$



ε-uzávěr$(3) = \{3, 6, 7, 1, 2, 4\}$

ε-uzávěr$(\{1, 0\}) = \{0, 1, 2, 4, 7\}$

Převod RKA na ekvivalentní DKA

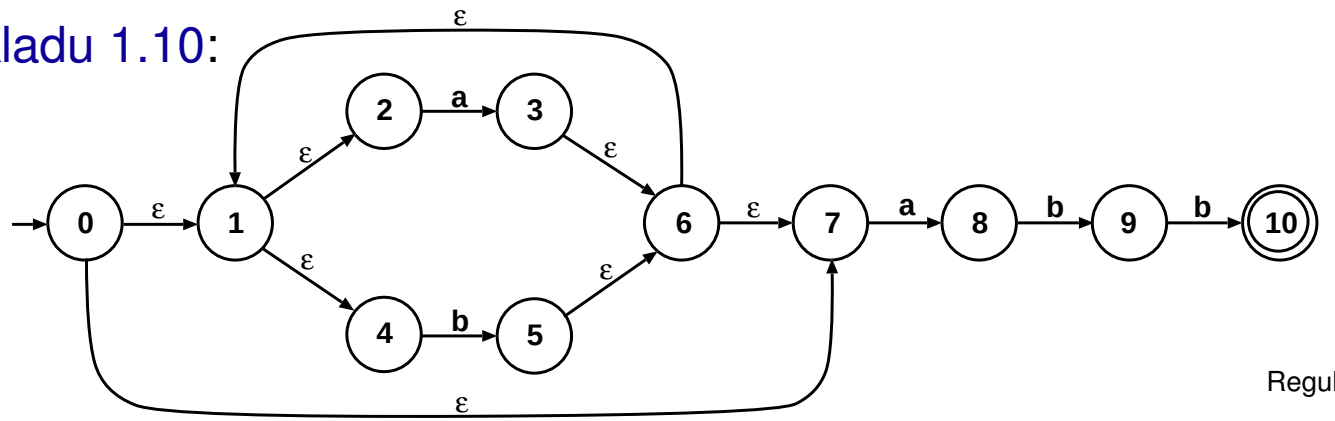
Algoritmus 1.2 Převod RKA na DKA
Vstup: RKA $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$.
Výstup: DKA $M' = (Q', \Sigma, \delta', q_0', F')$, $L(M) = L(M')$.
Metoda:

1. $Q' := 2^Q$.
2. $q_0' :=$ ε-uzávěr(q_0).
3. $\delta' : Q' \times \Sigma \to Q'$ je vypočtena takto:
   - Nechť $\forall T \in Q', a \in \Sigma : \overline{\delta}(T, a) = \bigcup_{q \in T} \delta(q, a)$.
   - Pak pro každé $T \in Q'$, $a \in \Sigma$: $\delta'(T, a) =$ ε-uzávěr$(\overline{\delta}(T, a))$,
4. $F' := \{S \mid S \in Q' \wedge S \cap F \neq \emptyset\}$.

Příklad 1.15 Aplikujeme algoritmus na automat z příkladu 1.10:

1. Počáteční stav, označíme ho A, je $A = \varepsilon$-uzávěr$(0) = \{0, 1, 2, 4, 7\}$.
2. $\delta'(A, a) = \varepsilon$-uzávěr$(\{3, 8\}) = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8\} = B$.
3. $\delta'(A, b) = \varepsilon$-uzávěr$(\{5\}) = \{1, 2, 4, 5, 6, 7\} = C$.
4. $\delta'(B, a) = \varepsilon$-uzávěr$(\{3, 8\}) = B$.
5. $\delta'(B, b) = \varepsilon$-uzávěr$(\{5, 9\}) = \{1, 2, 4, 5, 6, 7, 9\} = D$.
6. $\delta'(C, a) = \varepsilon$-uzávěr$(\{3, 8\}) = B$.
7. $\delta'(C, b) = \varepsilon$-uzávěr$(\{5\}) = C$.
8. $\delta'(D, a) = \varepsilon$-uzávěr$(\{3, 8\}) = B$.
9. $\delta'(D, b) = \varepsilon$-uzávěr$(\{5, 10\}) = \{1, 2, 4, 5, 6, 7, 10\} = E$.
10. $\delta'(E, a) = \varepsilon$-uzávěr$(\{3, 8\}) = B$.
11. $\delta'(E, b) = \varepsilon$-uzávěr$(\{5\}) = C$.
12. Množina koncových stavů $F = \{E\}$.

Automat z příkladu 1.10:



Převod gramatiky typu 3 na NKA

Věta 1.5 Nechť $\mathcal{L}_M$ je množina (třída) všech jazyků přijímaných konečnými automaty a nechť L je libovolný jazyk typu 3 ($L \in \mathcal{L}_3$). Pak existuje konečný automat M takový, že:

$$L = L(M), \text{ tj. } \mathcal{L}_3 \subseteq \mathcal{L}_M.$$

Důkaz.

1. Ke gramatice $G = (N, \Sigma, P, S)$ sestrojíme NKA $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ takto:
   (a) $Q = N \cup \{q_F\}$
   (b) $\Sigma = \Sigma$
   (c) $\delta : \delta(A, a)$ obsahuje B, právě když $A \to aB$ je v P
   (d) $\delta : \delta(A, a)$ obsahuje q_F, právě když $A \to a$ je v P
   (e) $q_0 = S$
   (f) $F = \{A \mid A \to \varepsilon \text{ je v } P\} \cup \{q_F\}$

Důkaz pokračuje dále.

Pokračování důkazu.

2. Matematickou indukcí ukážeme, že $L(G) = L(M)$. Indukční hypotézu formulujeme obecněji ve tvaru:

$$\forall A \in N : A \overset{i+1}{\underset{G}{\Rightarrow}} w \quad \Longleftrightarrow \quad (A, w) \overset{i}{\underset{M}{\vdash}} (C, \varepsilon) \text{ pro } C \in F, w \in \Sigma^*$$

Pro $i = 0$ dostáváme

$$A \Rightarrow \varepsilon \quad \Longleftrightarrow \quad (A, \varepsilon) \overset{0}{\vdash} (A, \varepsilon) \text{ pro } A \in F$$

a tvrzení tedy platí.
Pro $i = 1$ dostáváme

$$A \Rightarrow a \quad \Longleftrightarrow \quad (A, a) \overset{1}{\vdash} (q_F, \varepsilon) \text{ a } q_F \in F$$

a tvrzení tedy platí.

Nyní předpokládejme, že dokazovaná hypotéza platí pro $i > 0$ a položme $w = ax$, kde $a \in \Sigma$ a $|x| = i - 1$.

Důkaz pokračuje dále.

Pokračování důkazu.

3. pokračování.

   Dále předpokládejme $A \Rightarrow aB \overset{i}{\Rightarrow} ax$,

   z indukční hypotézy plyne $B \overset{i}{\Rightarrow} x \iff (B,x) \overset{i-1}{\vdash} (C,\varepsilon), C \in F$

   a z definice funkce δ: $A \Rightarrow aB \iff B \in \delta(A,a)$

   Dohromady tedy

$$A \Rightarrow aB \overset{i}{\Rightarrow} ax = w' \iff (A,ax) \vdash (B,x) \overset{i-1}{\vdash} (C,\varepsilon), C \in F$$

   tedy $A \overset{i+1}{\Rightarrow} w' \iff (A,w') \overset{i}{\vdash} (C,\varepsilon), C \in F$

   tj. tvrzení platí i pro $i+1$.

   Pro případ $A = S$ je dokázaná hypotéza tvrzením věty, tj.

$$\forall w' \in \Sigma^* : S \overset{*}{\Rightarrow} w' \iff (S,w') \overset{*}{\vdash} (C,\varepsilon), C \in F, \text{ tj. } L(G) = L(M)$$

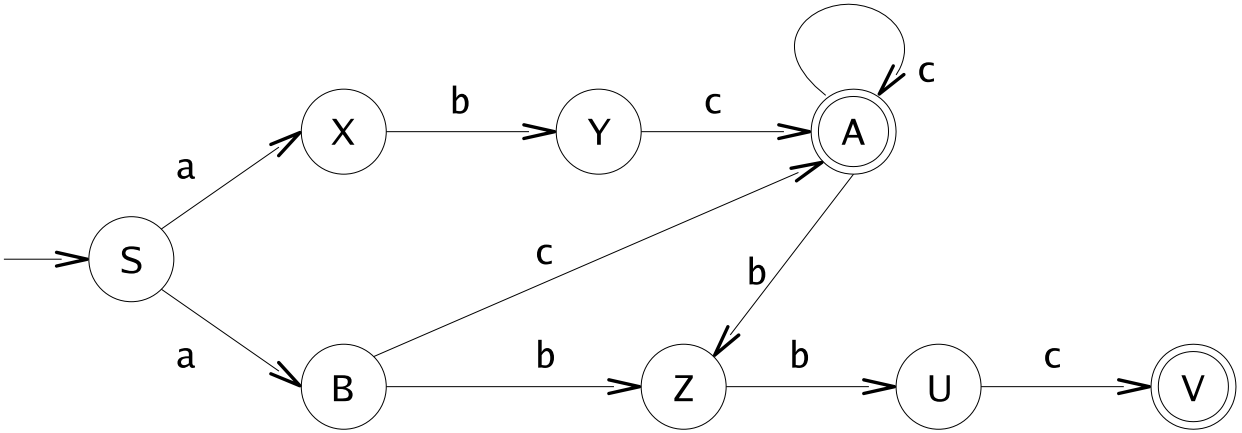
□

Příklad 1.16

Uvažme gramatiku $G = (\{S, A, B, U, V, X, Y, Z\},\ \{a, b, c\},\ P,\ S)$ s pravidly P:

$$S \to aX \mid aB \qquad A \to cA \mid bZ \mid \varepsilon$$
$$X \to bY \qquad B \to cA \mid bZ$$
$$Y \to cA \qquad U \to cV$$
$$Z \to bU \qquad V \to \varepsilon$$

Takové gramatice odpovídá konečný automat:



Převod NKA na gramatiku typu 3

Věta 1.6 Nechť M je NKA. Pak existuje gramatika G typu 3 taková, že:

$$L(M) = L(G), \text{ tj. } \mathcal{L}_M \subseteq \mathcal{L}_3.$$

Důkaz. Nechť $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$. Předpokládejme, že M je NKA. Nechť $G = (Q, \Sigma, P, q_0)$ je gramatika, jejíž pravidla jsou definována takto:

1. pokud $\delta(q, a)$ obsahuje r, pak P obsahuje pravidlo $q \to ar$
2. je-li $p \in F$, pak P obsahuje pravidlo $p \to \varepsilon$
3. jiná pravidla množina P neobsahuje.

G je zřejmě typu 3 a indukcí lze dokázat, že platí $L(G) = L(M)$.

□

Příklad 1.17 Uvažujme KA $M_3 = (\{A, B, C, D\},\ \{a, b, c\},\ \delta,\ A,\ \{C, D\})$, kde

$$\begin{aligned} \delta: \quad & \delta(A, a) = B \quad && \delta(C, c) = D \\ & \delta(B, b) = A \quad && \delta(D, a) = A \\ & \delta(B, c) = B \quad && \delta(D, b) = D \\ & \delta(B, a) = C \end{aligned}$$

Gramatika G typu 3, která generuje jazyk $L(M_3)$, má tvar:

$$G = (\{A, B, C, D\},\ \{a, b, c\},\ P,\ A)$$

$$\begin{aligned} P: \quad & A \to aB && C \to cD \mid \varepsilon \\ & B \to bA \mid cB \mid aC && D \to aA \mid bD \mid \varepsilon \end{aligned}$$

Regulární množiny a výrazy

Regulární množiny

Definice 1.14 Nechť Σ je konečná abeceda. Regulární množinu nad Σ definujeme rekurzívně takto:

1. $\emptyset$ (tj. prázdná množina) je regulární množina nad Σ,
2. $\{\varepsilon\}$ je regulární množina nad Σ,
3. $\{a\}$ je regulární množina nad Σ pro všechny $a \in \Sigma$,
4. jsou-li P a Q regulární množiny nad Σ, pak také
   (a) $P \cup Q$,
   (b) $P.Q$,
   (c) P^*

   jsou regulární množiny nad Σ.
5. Žádné jiné množiny, než ty, které lze získat pomocí výše uvedených pravidel, nejsou regulárními množinami.

Příklad 1.18 $L = (\{a\} \cup \{d\}).(\{b\}^*).\{c\}$ je regulární množina nad $\Sigma = \{a, b, c, d\}$.

Regulární výrazy

Definice 1.15 Regulární výrazy nad Σ a regulární množiny, které označují, jsou rekurzívně definovány takto:

1. $\emptyset$ je regulární výraz označující regulární množinu $\emptyset$,
2. ε je regulární výraz označující regulární množinu $\{\varepsilon\}$,
3. a je regulární výraz označující regulární množinu $\{a\}$ pro všechny $a \in \Sigma$,
4. jsou-li p, q regulární výrazy označující regulární množiny P a Q, pak
   (a) $(p + q)$ je regulární výraz označující regulární množinu $P \cup Q$,
   (b) (pq) je regulární výraz označující regulární množinu $P.Q$,
   (c) (p^*) je regulární výraz označující regulární množinu P^*.
5. Žádné jiné regulární výrazy nad Σ neexistují.

❖ Konvence:

1. Regulární výraz p^+ značí regulární výraz pp^*.
2. Abychom minimalizovali počet používaných závorek, stanovujeme priority operátorů:
   1. $*$, $+$ (iterace – nejvyšší priorita),
   2. . (konkatenace),
   3. $+$ (alternativa).

Příklad 1.19

1. 01 odpovídá $\{01\}$.
2. 0^* odpovídá $\{0\}^*$.
3. $(0+1)^*$ odpovídá $\{0,1\}^*$.
4. $(0+1)^*011$ značí množinu řetězců nad $\{0,1\}$ končících 011.
5. $(a+b)(a+b+0+1)^*(0+1)$ značí množinu řetězců nad $\{a,b,0,1\}$, které začínají symbolem a nebo b a končí symbolem 0 nebo 1.

Kleeneho algebra

Definice 1.16 Kleeneho algebra sestává z neprázdné množiny se dvěma význačnými konstantami 0 a 1, dvěma binárními operacemi $+$ a . a unární operací $*$, které splňují následující axiomy:

$a + (b + c) = (a + b) + c$	asociativita $+$	[A.1]
$a + b = b + a$	komutativita $+$	[A.2]
$a + a = a$	idempotence $+$	[A.3]
$a + 0 = a$	0 je identitou pro $+$	[A.4]
$a(bc) = (ab)c$	asociativita .	[A.5]
$a1 = 1a = a$	1 je identitou pro .	[A.6]
$a0 = 0a = 0$	0 je anihilátorem pro .	[A.7]
$a(b + c) = ab + ac$	distributivita zleva	[A.8]
$(a + b)c = ac + bc$	distributivita zprava	[A.9]
$1 + aa^* = a^*$		[A.10]
$1 + a^*a = a^*$		[A.11]
$b + ac \leq c \Rightarrow a^*b \leq c$		[A.12]
$b + ca \leq c \Rightarrow ba^* \leq c$		[A.13]

V A.12 a A13 reprezentuje $\leq$ uspořádání definované takto: $a \leq b \overset{def}{\Longleftrightarrow} a + b = b$.

❖ Příklady Kleeneho algeber:

- Třída 2^{Σ^*} všech podmnožin Σ^* s konstantami $\emptyset$ a $\{\varepsilon\}$ a operacemi $\cup$, . a $*$.
- Třída všech regulárních podmnožin Σ^* s konstantami $\emptyset$ a $\{\varepsilon\}$ a operacemi $\cup$, . a $*$.
- Třída všech binárních relací nad množinou X s konstantami v podobě prázdné relace a identity a $\cup$, kompozicí (součinem) binárních relací a reflexivním tranzitivním uzávěrem binární relace jako operacemi.
- Matice nad Kleeneho algebrami.

❖ Vlastnosti Kleeneho algeber umožňují snadno řešit systémy lineárních rovnic nad těmito algebrami.

❖ Kleeneho algebra nad regulárními výrazy je klíčová pro úpravy a zjednodušování RV.

Rovnice nad regulárními výrazy

Definice 1.17 Rovnice, jejímiž složkami jsou koeficienty a neznámé, které reprezentují (dané a hledané) regulární výrazy, nazýváme rovnicemi nad regulárními výrazy.

Příklad 1.20 Uvažujme rovnici nad regulárními výrazy nad abecedou $\{a, b\}$

$$X = aX + b$$

Jejím řešením je regulární výraz $X = a^*b$.

Důkaz.

- $LS = a^*b$
- $PS = a(a^*b) + b = a^+b + b = (a^+ + \varepsilon)b = a^*b$.

□

❖ Ne vždy existuje jediné řešení rovnice nad reg. výrazy.

Věta 1.7 Nejmenším pevným bodem („nejmenším řešením“) rovnice $X = pX + q$ je:

$$X = p^* q$$

Důkaz.

- $PS = p^* q$
- $LS = pp^* q + q = (pp^* + \varepsilon)q = p^* q$
- Minimalita plyne přímo z A.12.

□

Soustavy rovnic nad regulárními výrazy

Definice 1.18 Soustava rovnic nad reg. výrazy je ve standardním tvaru vzhledem k neznámým $\Delta = \{X_1, X_2, ..., X_n\}$, má-li soustava tvar

$$\bigwedge_{i \in \{1,\ldots,n\}} X_i = \alpha_{i0} + \alpha_{i1}X_1 + \alpha_{i2}X_2 + ... + \alpha_{in}X_n$$

kde α_{ij} jsou reg. výrazy nad nějakou abecedou Σ, $\Sigma \cap \Delta = \emptyset$.

Věta 1.8 Je-li soustava rovnic nad reg. výrazy ve std. tvaru, pak existuje její minimální pevný bod a algoritmus jeho nalezení.

Důkaz. Vyjadřujeme hodnotu jednotlivých proměnných pomocí řešení rovnice $X = pX + q$ jako regulární výraz s proměnnými, jejichž počet se postupně snižuje: Z rovnice pro X_n vyjádříme např. X_n jako regulární výraz nad Σ a $X_1, ..., X_{n-1}$. Dosadíme za X_n do rovnice pro X_{n-1} a postup opakujeme. Jsou přitom možné (ale ne nutné) různé optimalizace tohoto pořadí. □

Příklad 1.21 Řešme soustavu rovnic nad reg. výrazy:

$$\begin{aligned}
&(1)\ X_1 &&= (01^* + 1)X_1 + X_2\\
&(2)\ X_2 &&= 11 + 1X_1 + 00X_3\\
&(3)\ X_3 &&= \varepsilon + X_1 + X_2
\end{aligned}$$

- Výraz pro X_3 dosadíme z (3) do (2). Dostaneme soustavu:

$$\begin{aligned}
&(4)\ X_1 &&= (01^* + 1)X_1 + X_2\\
&(5)\ X_2 &&= 11 + 1X_1 + 00(\varepsilon + X_1 + X_2) = 00 + 11 + (1 + 00)X_1 + 00X_2
\end{aligned}$$

- Ze (4) vyjádříme X_1 s využitím řešení rovnice $X = pX + q$:

$$(6)\ X_1 = (01^* + 1)^*X_2 = (0 + 1)^*X_2$$

- Dosazením do (5):

$$(7)\ X_2 = 00 + 11 + (1 + 00)(0 + 1)^*X_2 + 00X_2 = 00 + 11 + (1 + 00)(0 + 1)^*X_2$$

- Vypočtením X_2 jako řešení rovnice $X = pX + q$ dostaneme:

$$(8)\ X_2 = ((1 + 00)(0 + 1)^*)^*(00 + 11)$$

- Dosazením do (6) dostaneme:

$$(9)\ X_1 = (0 + 1)^*((1 + 00)(0 + 1)^*)^*(00 + 11) = (0 + 1)^*(00 + 11)$$

- Dosazením do (3) dostaneme:

$$\begin{aligned}
(10)\ X_3 &= \varepsilon + (0 + 1)^*(00 + 11) + ((1 + 00)(0 + 1)^*)^*(00 + 11) =\\
&= \varepsilon + ((0 + 1)^* + ((1 + 00)(0 + 1)^*)^*)(00 + 11) =\\
&= \varepsilon + (0 + 1)^*(00 + 11)
\end{aligned}$$

Regulární množiny a jazyky typu 3

Věta 1.9 Jazyk L je regulární množinou právě tehdy, je-li L jazykem typu 3. Označíme-li $\mathcal{L}_R$ třídu všech regulárních množin, pak:

$$\mathcal{L}_R = \mathcal{L}_3$$

Důkaz. I. $\mathcal{L}_R \subseteq \mathcal{L}_3$, tj. každou regulární množinu lze generovat gramatikou typu 3.

	regulární množina	*gramatika typu 3*
(1)	$\emptyset$	$G_\emptyset = (\{S\}, \Sigma, \emptyset, S)$
(2)	$\{\varepsilon\}$	$G_\varepsilon = (\{S\}, \Sigma, \{S \to \varepsilon\}, S)$
(3)	$\{a\}$ pro každé $a \in \Sigma$	$G_a = (\{S\}, \Sigma, \{S \to a\}, S)$

Nyní ukážeme, že sjednocení, konkatenaci a iteraci reg. množin lze generovat rovněž gramatikou typu 3. Nechť tedy

- $L_1 = L(G_1)$, kde $G_1 = (N_1, \Sigma_1, P_1, S_1)$,
- $L_2 = L(G_2)$, kde $G_2 = (N_2, \Sigma_2, P_2, S_2)$

a G_1, G_2 jsou gramatiky typu 3, $N_1 \cap N_2 = \emptyset$ (nonterminály je vždy možno takto odlišit).

Důkaz pokračuje dále.

Pokračování důkazu.

(4) $L_1 \cup L_2$

$G_4 = (N_4, \Sigma_1 \cup \Sigma_2, P_4, S_4)$, kde

- $N_4 = N_1 \cup N_2 \cup \{S_4\}$, $S_4 \notin N_1 \cup N_2$,
- $P_4 = \{S_4 \to \alpha \mid S_1 \to \alpha \in P_1 \vee S_2 \to \alpha \in P_2\} \cup P_1 \cup P_2$

(5) $L_1.L_2$

$G_5 = (N_1 \cup N_2, \Sigma_1 \cup \Sigma_2, P_5, S_1)$ a P_5 je nejmenší množina splňující:

- je-li $(A \to xB) \in P_1$, pak $(A \to xB) \in P_5$,
- je-li $(A \to x) \in P_1$, pak $(A \to xS_2) \in P_5$,
- je-li $(A \to \varepsilon) \in P_1$, pak $(A \to \alpha) \in P_5$ pro všechna pravidla $(S_2 \to \alpha) \in P_2$,
- $\forall (A \to \alpha) \in P_2 : (A \to \alpha) \in P_5$.

(6) L_1^*

$G_6 = (N_1 \cup \{S_6\}, \Sigma_1, P_6, S_6)$, $S_6 \notin N_1$ a P_6 je nejmenší množina splňující:

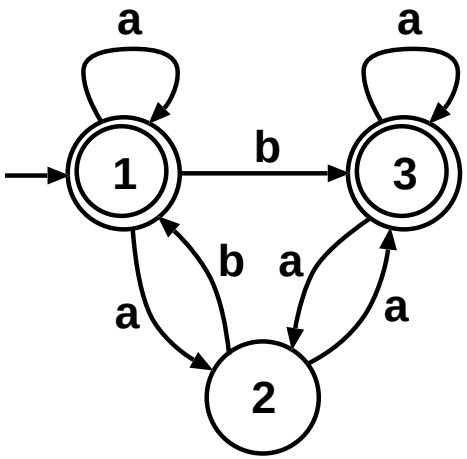
- je-li $(A \to xB) \in P_1$, pak $(A \to xB) \in P_6$,
- je-li $(A \to x) \in P_1$, pak $(A \to xS_6) \in P_6$,
- je-li $(A \to \varepsilon) \in P_1$, pak $(A \to \alpha) \in P_6$ pro všechna pravidla $(S_1 \to \alpha) \in P_1$,
- je-li $(S_1 \to xB) \in P_1$, pak $(S_6 \to xB) \in P_6$
- je-li $(S_1 \to x) \in P_1$, pak $(S_6 \to xS_6) \in P_6$
- $(S_6 \to \varepsilon) \in P_6$.

Pokračování důkazu. II. $\mathcal{L}_3 \subseteq \mathcal{L}_R$, tj. každý jazyk generovaný gramatikou typu 3 je regulární množinou.

- Nechť $L \in \mathcal{L}_3$ je libovolný jazyk typu 3. Již víme, že ho můžeme popsat KA $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$. Nechť $Q = \{q_0, q_1, ..., q_n\}$.
- Vytvoříme soustavu rovnic na reg. výrazy s proměnnými $X_0, X_1, ..., X_n$ ve standardním tvaru. Rovnice pro X_i popisuje množinu řetězců přijímaných ze stavu Q_i.
- Řešením této soustavy získáme reg. výraz pro proměnnou X_0, který reprezentuje jazyk L.

□

Příklad 1.22



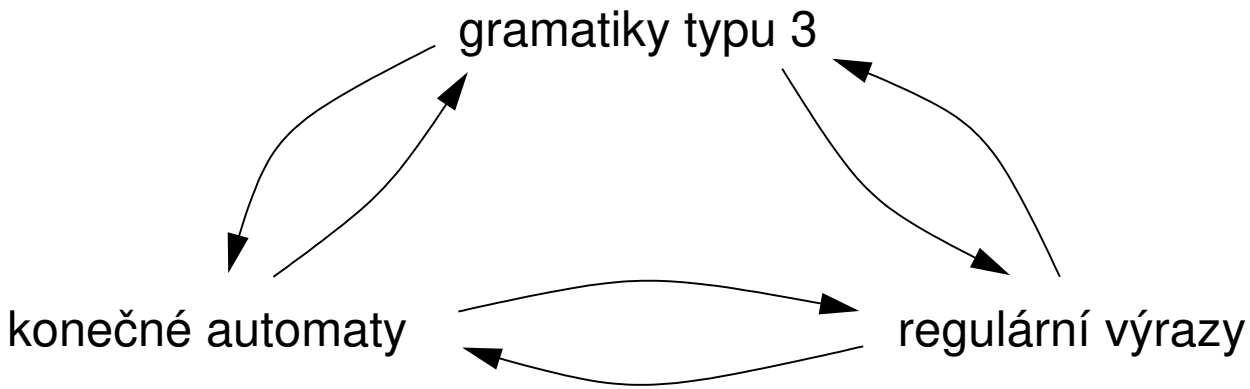
$$\begin{aligned} X_1 &= \varepsilon + aX_1 + aX_2 + bX_3 \\ X_2 &= bX_1 + aX_3 \\ X_3 &= \varepsilon + aX_2 + aX_3 \end{aligned}$$

Jazyk L popisuje reg. výraz, který je řešením této soustavy pro proměnnou X_1.

Vztahy regulárních gramatik, KA a RV

- Můžeme tedy shrnout, že
  - gramatiky typu 3
  - (rozšířené/nedeterministické/deterministické) konečné automaty a
  - regulární výrazy

mají ekvivalentní vyjadřovací sílu.



- *Alternativní algoritmy pro převod viz opora*