VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA INFORMAČNÍCH TECHNOLOGIÍ
ÚSTAV INFORMAČNÍCH SYSTÉMŮ

FACULTY OF INFORMATION TECHNOLOGY
DEPARTMENT OF INFORMATION SYSTEMS

FORMÁLNÍ MODELY NAD VOLNÝMI GRUPAMI

DISERTAČNÍ PRÁCE
PHD THESES

AUTOR PRÁCE Ing. PETR BLATNÝ
AUTHOR

BRNO 2007

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA INFORMAČNÍCH TECHNOLOGIÍ
ÚSTAV INFORMAČNÍCH SYSTÉMŮ

FACULTY OF INFORMATION TECHNOLOGY
DEPARTMENT OF INFORMATION SYSTEMS

FORMÁLNÍ MODELY NAD VOLNÝMI GRUPAMI

FORMAL MODELS OVER FREE GROUPS

DISERTAČNÍ PRÁCE
PHD THESES

AUTOR PRÁCE — Ing. PETR BLATNÝ
AUTHOR

VEDOUCÍ PRÁCE — prof. RNDr. ALEXANDER MEDUNA, CSc.
SUPERVISOR

BRNO 2007

Abstrakt

Práce pojednává o nových formálních modelech popisující rekurzivně vyčíslitelné jazyky. Jsou představeny konstrukce bezkontextových a E0L gramatik nad volnou grupou a oboustranný zásobníkový automat nad volnou grupou. Dále bude následovat také pojednání o jejich redukovaných verzích. V případě bezkontextových gramatik nad volnou grupou jsme schopni redukovat počet nonterminálních symbolů na osm, aniž bychom snížili sílu těchto gramatik. Lepšího výsledku dosáhneme v případě E0L gramatik nad volnou grupou, kdy nám stačí k popisu rekurzivně vyčíslitelného jazyka E0L gramatika nad volnou grupou s šesti nonterminálními symboly. V oblasti automatů se podařilo redukovat zásobníkovou abecedu na pouhé čtyři nonterminální symboly.

Klíčová slova

bezkontextová gramatika, E0L gramatika, derivace, volná grupa, oboustranný zásobníkový automat, bezkontextová gramatika nad volnou grupou, E0L gramatika nad volnou grupou, oboustranný zásobníkový automat nad volnou grupou, Kurodova normální forma, frontová gramatika, zleva rozšířená frontová gramatika

Abstract

In the context-free and E0L grammars discussed in this paper, the derivations are introduced over free groups rather than free monoids. It is proved that both grammars with derivations introduced in this way characterize the family of recursively enumerable languages in a very succinct way. Specifically, this characterization is based on the eight-nonterminal context-free grammars and six-nonterminal E0L grammars over free groups. The next part of the paper establishes the two-sided pushdown automata over free groups. Their construction is based on queue grammars. A version with the reduced number of four symbols in the pushdown alphabet is also studied.

Keywords

context-free grammar, E0L grammar, derivation, free group, two-sided pushdown automata, context-free grammar over free group, E0L grammar over free group, two-sided pushdown automata over free group, Kuroda normal form, queue grammar, left-extended queue grammar

Citace

Petr Blatný: Formální modely nad volnými grupami, disertační práce, Brno, FIT VUT v Brně, 2007

Formální modely nad volnými grupami

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem disertační práci vypracoval samostatně pod vedením školitele, prof. RNDr. Alexandera Meduny, CSc. Většina uvedených výsledků byla dosažena společně s kolegou Ing. Radkem Bidlem a s mým školitelem. Dále jsou zde obsaženy i některé výsledky od jiných autorů. Vždy jsem však uvedl všechny literární prameny a publikace, ze kterých jsem čerpal.

....
Petr Blatný
28. května 2007

Poděkování

Na tomto místě bych rád poděkoval svému školiteli prof. RNDr. Alexandru Medunovi, CSc za odborné vedení, inspiraci a ochotu vždy dobře poradit. Poděkování také patří Ing. Radku Bidlovi, který se podílel na většině článků týkajících se formálních modelů nad volnými grupami a stal se tak neocenitelným kolegou v tomto výzkumu.

Obsah

Kapitola 1

Úvod

V teorii formálních jazyků se představuje velké množství modifikací základních formálních modelů. Tyto modifikace mají za cíl zvýšit vyjadřovací schopnosti daného modelu a stejně tak je to i v této práci. Zde představené modifikace zasahují do definice derivace, derivace je definována nad volnou grupou místo nad volným monoidem a žádná jiná režie nebo řízení generování vět jazyka není nutná. Využívá se tedy především vlastností volných grup, konkrétně se jedná o využití konkatenace vzájemně inverzních prvků. Algebraické základy a podrobnější popis volných grup je možné najít v kapitolách čtyři a pět této práce.

1.1 Klasifikace gramatik a jazyků

V současné době je známo velké množství různých struktur pro popis formálních jazyků. Nejčastěji se jedná o popis pomocí gramatiky. Na základě tvaru přepisovacích pravidel těchto gramatik, lze jazyky generované gramatikou rozdělit do čtyř tříd definované Chomského hierarchií jazyků. Existují ovšem různé modifikace gramatik, které nelze zařadit přímo do jedné z definovaných tříd. Takovéto gramatiky mohou zasahovat do několika tříd současně a přitom žádnou z nich nepokrývají. Přesto je Chomského hierarchie nejpoužívanějším měřítkem generativní síly gramatik a jejich jazyků. Podrobněji o Chomského klasifikaci gramatik a jazyků pojednává druhá kapitola.

Na samém vrcholu Chomského hierarchie jsou tzv. jazyky typu 0. V některé literatuře se můžeme též setkat s označením rekurzivně vyčíslitelné jazyky, frázově strukturované jazyky nebo též jazyky přijímané Turingovými stroji. Všechny výše uvedená označení jsou si ekvivalentní. Tato množina jazyků je v této práci označována zkratkou **RE**. Rekurzivně vyčíslitelné jazyky jsou nejčastěji popisovány Turingovými stroji nebo gramatikami typu 0, které se někdy označují také jako obecné nebo neomezené gramatiky. Tyto gramatiky povolují přepisovací pravidla, která mají na své levé straně více než jeden symbol, o takovýchto pravidlech se v této práci zmiňujeme, že jsou *kontextová.* Například přepisovací pravidlo $AB \rightarrow CD$ je pravidlo kontextového tvaru.

Nejznámější třídou jazyků v praktické oblasti jsou jazyky bezkontextové, označované také jako typ 2. Tato třída jazyků je v této práci označována zkratkou **CF**. Nejčastější formální modely pro popis bezkontextových jazyků jsou bezkontextové gramatiky nebo zásobníkové automaty. Jak už jejich název napovídá, nedovolují tyto gramatiky přepisovací pravidla v kontextovém tvaru. Dostáváme se tedy k dalšímu pojmu a to jsou bezkontextová pravidla. Každé pravidlo, které má na své levé straně pouze jediný symbol, nazýváme v této práci jako *bezkontextové.* Například přepisovací pravidlo $A \rightarrow x$ je bezkontextového tvaru.

Bezkontextové jazyky jsou základem pro většinu programovacích jazyků a jsou podle nich navrženy syntaktické analyzátory pro překladače k daným jazykům.

1.2 Předmět výzkumu disertační práce

Standardně jsou derivace v gramatikách definovány nad volným monoidem generovaným množinami terminálních a nonterminálnich symbolů (totální abecedou) operací konkatenace. Avšak v současné době jsou v některých studií tyto derivace definovány nad jinými algebraickými strukturami (viz. [24], [22], [20]). V této práci provedeme modifikaci derivace a to tak, že ji budeme definovat nad volnou grupou. Dále se budeme zabývat generativní silou takto modifikovaných formálních modelů a možné redukce počtu nonterminálních symbolů a zásobníkové abecedy v případě automatů.

Současný stav poznání v této oblasti, rozumí se formální modely pouze nad volnými grupami, nepřináší kromě této práce zásadní výsledky spadající do teoretické informatiky. Výjimkou jsou práce zabývající se konečnými automaty nad volnou grupou, které jsou schopny charakterizovat třídu bezkontextových jazyků. Definice těchto konečných automatů nad volnou grupou a jejich generativní schopnosti lze nalézt v [26] a [11]. Z oblasti automatů je také diplomová práce Michala Berky [1], ve které jsem byl školitelem. Tato práce byla zaměřena na návrh a implementaci syntaktického analyzátoru založeného na formálním modelu nad volnou grupou.

Tento dokument pojednává o návrhu struktur, které jsou schopny generovat celou třídu rekurzivně vyčíslitelných jazyků. Jako základ použijeme bezkontextovou gramatiku, E0L gramatiku a v posledním případě rozšířený oboustranný zásobníkový automat. Společně definujeme volnou grupu nad totální abecedou těchto gramatik a nad zásobníkovou abecedou oboustranného zásobníkového automatu. Využitím schopností uvedených prostředků lze dokázat, že bezkontextové gramatiky nad volnými grupami, E0L gramatiky nad volnými grupami a rozšířené oboustranné zásobníkové automaty nad volnými grupami definují třídu rekurzivně vyčíslitelných jazyků a zachovávají si tvar přepisovacích pravidel z původních modelů. Popis a vlastnosti těchto modelů byl prezentován v [7].

Protože zde představené základní modifikace zvyšují počet nonterminálních symbolů, týká se další výzkum redukce počtu nonterminálních symbolů, to v případě bezkontextových a E0L gramatik nad volnou grupou. V případě rozšířených oboustranných zásobníkových automatů redukujeme počet symbolů zásobníkové abecedy. Je dokázáno, že všechny modifikace založené na redukci počtu nonterminálních symbolů zachovávají svoji vyjadřovací sílu, tedy že stále popisují rekurzivně vyčíslitelnou třídu jazyků. Následuje přehled dosažených výsledků v případě redukce počtu nonterminálních symbolů:

- Počet nonterminálních symbolů bezkotextové gramatiky nad volnou grupou byl redukován na osm symbolů.
- Počet nonterminálních symbolů E0L gramatiky nad volnou grupou byl redukován na šest symbolů.
- Počet nonterminálních symbolů zásobníkové abecedy rozšířeného oboustranného zásobníkového automatu byl redukován na čtyři symboly.

Hlavní konstrukce a méně známe pojmy jsou provázeny pro jejich lepší pochopení podrobnými příklady.

1.3 Struktura disertační práce

Tato práce je rozdělena do následujících logických celků:

- První kapitola obsahuje samotný úvod. Tato část čtenáře neformálně uvede do problematiky formálních modelů nad volnými grupami.
- Ve druhé kapitole je čtenář seznámen se základními pojmy a definicemi z teorie formálních jazyků, které jsou dále používány v ostatních kapitolách.
- Třetí kapitola čtenáře seznámí s vybranými formálními modely. Na základě těchto modelů budou definovány modely nové.
- Ve čtvrté kapitole je čtenář seznámen se základními pojmy a definicemi z oblasti základních algebraických struktur, které jsou dále používány v kapitolách o formálních modelech nad volnou grupou.
- V páté kapitole je čtenář seznámen s definicí volného monoidu a volné grupy. Volná grupa je hlavním prvkem používaným v následujících kapitolách. Tato kapitola je poslední, která rekapituluje zavedené pojmy. Následující kapitoly obsahují samotný výzkum autora.
- Šestá kapitola zavádí nové formální modely nad volnou grupou, jedná se konkrétně o *bezkontextové gramatiky nad volnou grupou* a *E0L gramatiky nad volnou grupou*. Je zde dokázáno, že obě tyto gramatiky dosahují síly Turingových strojů (popisují gramatiky typu 0) a to pouze za použití bezkontextových pravidel a s využitím vlastností volné grupy.
- Sedmá kapitola se dále zabývá možnostmi redukce počtu nonterminálních symbolů gramatik zavedenými v předchozí kapitole. Jsou představeny odlišné konstrukce gramatik nad volnými grupami zaměřené na redukci počtu nonterminálů. Výsledky získané v této kapitole byly prezentovány v časopisecké publikaci [6]. Jsou opět zkoumány následující gramatiky
  - *Bezkontextové gramatiky nad volnými grupami s redukovaným počtem nonterminálů* - v této podkapitole je představena pouze konstrukce, samotný důkaz lze najít v [2]. Dosaženým výsledkem je redukce počtu nonterminálů na osm symbolů.
  - *E0L gramatiky nad volnými grupami s redukovaným počtem nonterminálních symbolů* - tato podkapitola zavádí novou definici E0L gramatik zaměřenou na redukci počtu nonterminálů. Je zde dokázáno, že tato modifikace disponuje opět silou Turingových strojů a dále bylo dosaženo redukce počtu nonterminálů na šest symbolů.
- Osmá kapitola je zaměřena na automaty, konkrétně se jedná o *rozšířené oboustranné zásobníkové automaty nad volnými grupami*. Rozšíření spočívá ve schopnosti zásobníkového automatu číst ze vstupní pásky nejen symboly, ale i řetězce. Definice oboustranného zásobníku nad volným monoidem je popsána v [2] a je zde také dokázáno, že tyto automaty mají sílu Turingových strojů. Modifikací přidáním volné grupy tedy sílu již zvýšit nelze, ale dosáhneme redukce počtu pravidel a menších paměťových nároků.

- V deváté kapitole je představena definice *rozšířených oboustranných zásobníkových automatů s redukovanou zásobníkovou abecedou*. Je dokázáno, že k popisu jazyka typu 0 stačí takovýto zásobníkový automat s pouze čtyřmi symboly zásobníkové abecedy. Výsledky získané v této kapitole byly prezentovány v časopisecké publikaci [5].

- V desáté kapitole jsou uvedena možná praktická využití zde navržených formálních modelů.

- Závěrečná kapitola shrnuje dosažené výsledky, publikace pojednávající o formálních modelech nad volnými grupami a uvádí možné pokračování této práce.

Kapitola 2

Základy teorie formálních jazyků

Základní pojmy pro vymezení jazyka jsou *abeceda* a *řetězec*.

2.1 Abeceda

Definice 2.1.1 Abecedou rozumíme neprázdnou množinu prvků. Tyto prvky nazýváme *symboly abecedy*.

2.2 Řetězec nad abecedou

Definice 2.2.2 *Řetězcem* (nebo také *větou* či *slovem*) nad danou abecedou rozumíme každou konečnou posloupnost symbolů abecedy. Prázdnou posloupnost symbolů, tj. posloupnost, která neobsahuje žádný symbol, nazýváme *prázdný řetězec*. Prázdný řetězec budeme zapisovat symbolem ε.

Definice 2.2.3 Nechť x, y jsou řetězce nad abecedou Σ. *Konkatenací* (*zřetězením*) řetězce x s řetězcem y vznikne řetězec xy. Operace konkatenace je asociativní, tj. $x(yz) = (xy)z$, není však komutativní, $xy \neq yx$ pro $x \neq y$.

Definice 2.2.4 Nechť w je řetězec nad abecedou Σ. Řetězec z se nazývá *podřetězcem* řetězce w, jestliže existují řetězce x a y takové, že $w = xzy$. Řetězec x_1 se nazývá *prefixem* (*předponou*) řetězce w, jestliže existuje řetězec y_1 takový, že $w = x_1y_1$. Analogicky, řetězec y_2 se nazývá *sufixem* (*příponou*) řetězce w, jestliže existuje řetězec x_2 takový, že $w = x_2y_2$. Je-li $y_1 \neq \varepsilon$, resp. $x_2 \neq \varepsilon$, pak x_1 je *vlastní prefix*, resp. x_2 je *vlastní sufix* řetězce w.

Definice 2.2.5 *Délka řetězce* je nezáporné celé číslo, které udává počet symbolů řetězce. Délku řetězce x značíme $|x|$. Je-li $x = a_1a_2 \dots a_n, a_i \in \Sigma, 1 \leq i \leq n$, pak $|x| = n$. Délka prázdného řetězce je nulová, tj. $|\varepsilon| = 0$.

Konvence 2.2.1 Řetězec nebo podřetězec, stávající se právě z k výskytů symbolu a, budeme symbolicky značit a^k. Například:

$$a^3 = aaa, \quad b^1 = b, \quad c^0 = \varepsilon$$

Definice 2.2.6 Nechť Σ je abeceda. Označme symbolem Σ^* množinu všech řetězců nad abecedou Σ včetně řetězce prázdného, symbolem Σ^+ všechny řetězce vyjma řetězce prázdného, tj. $\Sigma^* = \Sigma^+ \cup \{\varepsilon\}$. Množinu L, pro níž platí $L \subseteq \Sigma^*$ (případně $L \subseteq \Sigma^+$ pokud $\varepsilon \notin L$), nazýváme *jazykem* L nad abecedou Σ. jazykem tedy může být libovolná podmnožina řetězců nad danou abecedou.

Označme symbolem $|\Sigma|$ *kardinalitu* (počet prvků) množiny Σ, platí že $|\emptyset| = 0$, $|\{a\}| = 1$, $|\{a, b\}| = 2$ a podobně.

Konvence 2.2.2 Pro zápis terminálních a nonterminálních symbolů a řetězců tvořených těmito symboly budeme používat této konvence:

(1) a, b, c, d, e reprezentují terminální symboly

(2) A, B, C, D, S, X, Y reprezentují nonterminální symboly, X a Y budou představovat pomocné nonterminály

(3) U, V, Z reprezentují terminální nebo nonterminální symboly

(4) $\alpha, \beta, \ldots, \omega, x, y, z$ reprezentují řetězce terminálních a nonterminálních symbolů

(5) u, v reprezentují řetězce pouze terminálních symbolů

2.3 Gramatika

Nejznámějším prostředkem pro popis jazyků je *gramatika*. Gramatika splňuje základní požadavek na reprezentaci konečných i nekonečných jazyků a požadavek konečnosti reprezentace.

Gramatika používá dvou disjunktních abeced:

(1) množiny N *nonterminálních symbolů*

(2) množiny Σ *terminálních symbolů*

Nonterminální symboly, krátce *nonterminály*, mají roli pomocných proměnných, které označují určité syntaktické celky (kategorie).

Množina *terminálních symbolů*, krátce *terminálů*, je identická s abecedou, nad níž je definován jazyk. Sjednocení obou množin, tj. $N \cup \Sigma$, nazýváme *slovníkem gramatiky* nebo také *totální abecedou gramatiky.*

Gramatika představuje generativní systém, ve kterém lze z jistého vyznačeného nonterminálu generovat, aplikací tzv. přepisovacích pravidel, řetězce tvořené pouze terminálními symboly. Takové řetězce reprezentují právě věty gramatikou definovaného jazyka.

Jádrem gramatiky je tak konečná množina *přepisovacích pravidel.* Každé přepisovací pravidlo má tvar uspořádané dvojice řetězců (α, β), stanovuje možnou substituci řetězce β namísto řetězce α, který se vyskytuje jako podřetězec generovaného řetězce. Řetězec α obsahuje alespoň jeden nonterminální symbol, řetězec β je prvkem množiny $(N \cup \Sigma)^*$. Formálně vyjádřeno, množina přepisovacích pravidel je podmnožinou kartézského součinu:

$$(N \cup \Sigma)^* N (N \cup \Sigma)^* \times (N \cup \Sigma)^*.$$

Definice 2.3.7 Gramatika G je čtveřice $G = (N, \Sigma, P, S)$, kde

- N je konečná množina nonterminálních symbolů
- Σ je konečná množina terminálních symbolů, $N \cap \Sigma = \emptyset$
- P je konečná podmnožina kartézského součinu $(N \cup \Sigma)^* N (N \cup \Sigma)^* \times (N \cup \Sigma)^*$
- $S \in N$ je počáteční (také startovací) symbol gramatiky

V tomto textu se také setkáme s definicí gramatiky $G = (V, \Sigma, P, S)$, kde V je totální abecedou a platí, že množina nonterminálních symbolů N je rovna $V - \Sigma$.

Prvek (α, β) množiny P nazýváme *přepisovacím pravidlem* (krátce *pravidlem*) a budeme jej zapisovat ve tvaru $\alpha \to \beta$. Řetězec α resp. β nazýváme *levou* resp. *pravou stranou* přepisovacího pravidla.

Definice 2.3.8 Nechť $G = (N, \Sigma, P, S)$ je gramatika a nechť λ a μ jsou řetězce z $(N \cup \Sigma)^*$. Mezi řetězci λ a μ platí relace $\Rightarrow_G$, nazývaná *přímá derivace*, jestliže můžeme řetězce λ a μ vyjádřit ve tvaru

$$\lambda = \gamma\alpha\delta$$
$$\mu = \gamma\beta\delta$$

γ a δ jsou libovolné řetězce z $(N \cup \Sigma)^*$ a $\alpha \to \beta$ je přepisovací pravidlo z P.

Platí-li mezi řetězci λ a μ relace přímé derivace, pak píšeme $\lambda \Rightarrow_G \mu$ a říkáme, že řetězec μ lze přímo generovat z řetězce λ v gramatice G. Je-li z kontextu zřejmé, že jde o derivaci v gramatice G, pak nemusíme specifikaci gramatiky pod symbolem $\Rightarrow$ uvádět.

Definice 2.3.9 Nechť $G = (N, \Sigma, P, S)$ je gramatika a λ a μ jsou řetězce z $(N \cup \Sigma)^*$. Mezi řetězci λ a μ platí relace $\Rightarrow^+$ nazývaná *derivace*, jestliže existuje posloupnost přímých derivací $v_{i-1} \Rightarrow v_i$, $1 \le i \le n$ taková, že platí:

$$\lambda = v_0 \Rightarrow v_1 \Rightarrow \cdots \Rightarrow v_{n-1} \Rightarrow v_n = \mu.$$

Tuto posloupnost nazýváme *derivací délky n*. Platí-li $\lambda \Rightarrow^+ \mu$, pak říkáme, že řetězec μ lze *generovat* z řetězce λ v gramatice G. Relace $\Rightarrow^+$ je tranzitivním uzávěrem relace přímé derivace $\Rightarrow$. Symbolem $\Rightarrow^n$ značíme n-tou mocninu relace $\Rightarrow$.

Definice 2.3.10 Jestliže v gramatice G platí pro řetězce λ a μ relace $\lambda \Rightarrow^+ \mu$ nebo identita $\lambda = \mu$, pak píšeme $\lambda \Rightarrow^* \mu$. Relace $\Rightarrow^*$ je tranzitivním a reflexivním uzávěrem relace přímé derivace $\Rightarrow$.

Definice 2.3.11 Nechť $G = (N, \Sigma, P, S)$ je gramatika. Řetězec $\alpha \in (N \cup \Sigma)^*$ nazýváme *větnou formou*, jestliže platí $S \Rightarrow^* \alpha$, tj. řetězec α je generovatelný ze startovacího symbolu S. Větná forma, která obsahuje pouze terminální symboly, se nazývá *věta*. *Jazyk* $L(G)$, generovaný gramatikou G, je definován množinou všech vět

$$L(G) = \{u | S \Rightarrow^* u, \quad u \in \Sigma^*\}.$$

2.4 Chomského klasifikace gramatik

Chomského klasifikace gramatik (a jazyků), známá také pod názvem Chomského hierarchie jazyků, vymezuje čtyři typy gramatik podle tvaru přepisovacích pravidel, jež obsahuje množina přepisovacích pravidel. Tyto typy se označují jako typ 0, typ 1, typ 2 a typ 3.

2.4.1 Typ 0

Gramatika typu 0 obsahuje pravidla v nejobecnějším tvaru:

$$\alpha \to \beta; \quad \alpha \in (N \cup \Sigma)^* N (N \cup \Sigma)^*, \quad \beta \in (N \cup \Sigma)^*$$

Tyto gramatiky se také nazývají *gramatikami neomezenými*. Jazyky definované těmito gramatikami se nazývají rekurzivně vyčíslitelné a často se označují zkratkou **RE** (z angl. recursively enumerable).

2.4.2 Typ 1

Gramatika typu 1 obsahuje pravidla tvaru:

$$\alpha A \beta \to \alpha \gamma \beta; \quad A \in N \quad \alpha\beta \in (N \cup \Sigma)^*, \quad \gamma \in (N \cup \Sigma)^+$$

nebo

$$S \to \varepsilon.$$

Gramatiky typu 1 se nazývají také *gramatikami kontextovými* a to z toho důvodu, že tvar pravidla této gramatiky implikuje, že nonterminál A může být přepsán řetězcem γ pouze tehdy, je-li jeho pravým kontextem řetězec β a levým kontextem řetězec α.

Jazyk generovaný gramatikou typu 1 se nazývá jazykem kontextovým a často se označuje zkratkou **CS** (z angl. context-sensitive).

2.4.3 Typ 2

Gramatika typu 2 obsahuje pravidla tvaru:

$$A \to \gamma; \quad A \in N, \quad \gamma \in (N \cup \Sigma)^*.$$

Gramatiky typu 2 se nazývají *bezkontextovými gramatikami*, protože substituci levé strany pravidla (γ) za nonterminál A lze provádět bez ohledu na kontext, ve kterém je nonterminál A uložen. Na rozdíl od kontextových gramatik, bezkontextové gramatiky smí obsahovat pravidla tvaru $A \to \varepsilon$.

Jazyk generovaný gramatikou typu 2 se nazývá jazykem bezkontextovým a často se označuje zkratkou **CF** (z angl. context-free).

2.4.4 Typ 3

Gramatika typu 3 obsahuje pravidla tvaru:

$$A \to \gamma; \quad A \in N, \quad \gamma \in \Sigma^* \cup \Sigma^* N \Sigma^*.$$

Gramatika s tímto tvarem pravidel se nazývá *lineární gramatika*. K takovéto gramatice lze sestrojit ekvivalentní speciální *pravou lineární gramatiku*.

$$A \to \gamma; \quad A \in N, \quad \gamma \in \Sigma^* \cup \Sigma^* N$$

nebo *levou lineární gramatiku*:

$$A \to \gamma; \quad A \in N, \quad \gamma \in \Sigma^* \cup N\Sigma^*$$

Názvy pravé a levé lineární gramatiky jsou odvozeny od pozice nonterminálu na pravé straně pravidel. Pro tyto gramatiky je dále možné sestrojit ekvivalentní gramatiky, které se nazývají *regulární*. Opět podle pozice nonterminálu na pravé straně pravidel rozlišujeme *pravou regulární gramatiku*:

$$A \to \gamma, \quad A \in N, \quad \gamma \in \Sigma \cup \Sigma N \cup \{\varepsilon\}$$

a *levou regulární gramatiku*:

$$A \to \gamma, \quad A \in N, \quad \gamma \in \Sigma \cup N\Sigma \cup \{\varepsilon\}.$$

Gramatiky typu 3 se proto také nazývají regulárními gramatikami.

2.5 Kurodova normální forma

Pro popis jazyků typu 0 lze použít některou z normálních forem. V tomto dokumentu pro nás bude důležitá Kurodova normální forma, viz [16].

Definice 2.5.12 Gramatika $G = (N, \Sigma, P, S)$ je v *Kurodově normální formě*, pokud její množina přepisovacích pravidel P obsahuje pouze pravidla tvaru:

- $AB \to CD$,
- $A \to BC$,
- $A \to a$,
- $A \to \varepsilon$

$A, B, C, D \in N$, $a \in \Sigma$, ε je prázdný řetězec.

Věta 2.5.1 Každou gramatiku G typu 0 je možné transformovat na ekvivalentní gramatiku H v Kurodově normální formě takovou, že $L(G) = L(H)$.

Kapitola 3

Modely pro popis jazyků

V této kapitole budou představeny formální modely potřebné pro budoucí konstrukce gramatik a zásobníků nad volnou grupou. Bezkontextové gramatiky byly definovány výše, seznamme se tedy s E0L gramatikou.

3.1 L systémy

L systémy poprvé představil Aristid Lindenmayer v roce 1968 [18]. Původně se jednalo o paralelní přepisovací systém modelující vícebuněčné organismy. Základní myšlenka těchto systémů našla využití i v teoretické informatice. Vznikají nové jazyky založené na 0L, D0L, P0L, E0L a dalších gramatikách. Zvláštností většiny tříd jazyků, které jsou přijímány gramatikami založenými na 0L systémech, je jejich pozice v Chomského hierarchii - jednotlivé třídy mohou překrývat a přitom žádnou z nich nepokrývají.

Nás bude zajímat třída jazyků přijímaná E0L gramatikami, která leží nad třídou bezkontextových jazyků, ale nepokrývá celou třídu jazyků kontextových. Vhodnou modifikací, která bude představena později, se pokusíme sílu jazyků E0L gramatik zvýšit na sílu Turingových strojů.

3.2 0L systém

0L systém, nebo také *0L gramatika*, je trojice $G = (\Sigma, P, w)$, kde

- Σ je konečná množina terminálních symbolů (abeceda)
- P je konečná množina pravidel tvaru $a \rightarrow x, \quad a \in \Sigma, \quad x \in \Sigma^*$
- $w \in \Sigma^*$ je počáteční (startovací) řetězec, označuje se také jako *axiom* gramatiky

3.3 D0L systém

Nechť $G = (\Sigma, P, w)$ je 0L systém. Pokud pro každé $a \in \Sigma$ existuje právě jedno pravidlo $a \rightarrow x \in P, \quad x \in \Sigma^*$. Potom G je *D0L systém* (D - "deterministic").

3.4 P0L systém

Nechť $G = (\Sigma, P, w)$ je 0L systém. Pokud pro každé pravidlo $a \rightarrow x \in P$ platí $x \neq \varepsilon$. Potom G je *P0L systém* (P - "propagating").

Definice 3.4.1 Nechť $G = (\Sigma, P, w)$ je 0L systém a u, v jsou řetězce ze Σ^*. Mezi řetězci u a v platí relace $\Rightarrow_G$, nazývaná *přímá derivace*, jestliže můžeme řetězce u a v vyjádřit ve tvaru:

$$u = a_1 a_2 \dots a_n$$
$$v = b_1 b_2 \dots b_n$$
$$a_i \in \Sigma, \quad b_i \in \Sigma^* \text{ a } a_i \rightarrow b_i \in P \text{ pro } 1 \leq i \leq n.$$

Platí-li mezi řetězci u a v relace přímé derivace, pak píšeme $u \Rightarrow_G v$ a říkáme, že řetězec v lze přímo generovat z řetězce u v gramatice (systému) G. Je-li z kontextu zřejmé, že jde o derivaci v gramatice G, pak nemusíme specifikaci gramatiky (systému) pod symbolem $\Rightarrow$ uvádět.

Definice 3.4.2 Nechť $G = (\Sigma, P, w)$ je 0L systém a u, v jsou řetězce ze Σ^*. Mezi řetězci u a v platí relace $\Rightarrow^+$ nazývaná *derivace*, jestliže existuje posloupnost přímých derivací $x_{i-1} \Rightarrow x_i$, $1 \leq i \leq n$ taková, že platí:

$$u = x_0 \Rightarrow x_1 \Rightarrow \dots \Rightarrow x_{n-1} \Rightarrow x_n = v.$$

Tuto posloupnost nazýváme *derivací délky n*. Platí-li $u \Rightarrow^+ v$, pak říkáme, že řetězec v lze *generovat* z řetězce u v systému G. Relace $\Rightarrow^+$ je tranzitivním uzávěrem relace přímé derivace $\Rightarrow$. Symbolem $\Rightarrow^n$ značíme n-tou mocninu relace $\Rightarrow$.

Definice 3.4.3 Jestliže v 0L systému G platí pro řetězce u a v relace $u \Rightarrow^+ v$ nebo identita $u = v$, pak píšeme $u \Rightarrow^* v$. Relace $\Rightarrow^*$ je tranzitivním a reflexivním uzávěrem relace přímé derivace $\Rightarrow$.

Definice 3.4.4 Nechť $G = (\Sigma, P, w)$ je 0L systém. Řetězec $u \in \Sigma^*$ nazýváme *větnou formou*, jestliže platí $w \Rightarrow^* u$, tj. řetězec u je generovatelný z axiomu w. V 0L systémech se každá větná forma nazývá *věta*. *Jazyk* $L(G)$, generovaný systémem G, je definován množinou všech vět

$$L(G) = \{u | w \Rightarrow^* u, \quad u \in \Sigma^*\}$$

Příklad 3.4.1 Mějme 0L systém $G = (\Sigma, P, aa)$, kde

- $\Sigma = \{a, b, c\}$,
- $P = \{$
  p_1: $a \rightarrow ac$,
  p_2: $a \rightarrow bc$,
  p_3: $c \rightarrow \varepsilon\}$

Derivace v této gramatice může být například:

$$aa \Rightarrow acac[p_1, p_1] \Rightarrow bcac[p_2, p_3, p_1, p_3]$$

Příklad 3.4.2 Mějme D0L systém $G = (\Sigma, P, ab)$, kde

- $\Sigma = \{a, b, c\}$,
- $P = \{$
  p_1: $a \to ac$,
  p_2: $b \to bc$,
  p_3: $c \to \varepsilon\}$

Derivace v této gramatice může být například:

$$ab \Rightarrow acbc[p_1, p_2] \Rightarrow acbc[p_1, p_3, p_2, p_3]$$

Příklad 3.4.3 Mějme P0L systém $G = (\Sigma, P, ab)$, kde

- $\Sigma = \{a, b, c\}$,
- $P = \{$
  p_1: $a \to ac$,
  p_2: $b \to bc$,
  p_3: $c \to aa\}$

Derivace v této gramatice může být například:

$$ab \Rightarrow acbc[p_1, p_2] \Rightarrow acaabcaa[p_1, p_3, p_2, p_3]$$

Příklad 3.4.4 Mějme 0L systém $G = (\{a\}, \{a \to aa\}, a)$. Tento 0L systém je zároveň PD0L systémem a přijímá jazyk $L(G) = \{a^{2^n} : n \geq 0\}$.

3.4.1 E0L systém

E0L systém, nebo také E0L gramatika, je čtveřice $G = (V, \Sigma, P, w)$, kde

- V je konečná množina symbolů
- $\Sigma \subseteq V$ je konečná podmnožina terminálních symbolů
- P je konečná množina pravidel tvaru $a \to x, \quad a \in V, \quad x \in V^*$
- $w \in V^*$ je počáteční (startovací) řetězec, označuje se také jako *axiom* gramatiky

Definice 3.4.1 Nechť $G = (V, \Sigma, P, w)$ je E0L systém a nechť λ a μ jsou řetězce z V^*. Mezi řetězci λ a μ platí relace $\Rightarrow_G$, nazývaná *přímá derivace*, jestliže můžeme řetězce λ a μ vyjádřit ve tvaru

$$\lambda = x_1 x_2 \ldots x_n$$

$$\mu = y_1 y_2 \ldots y_n$$

$$\text{kde } x_i \in V, \quad y_i \in V^* \text{ a } x_i \to y_i \in P \text{ pro } 1 \leq i \leq n.$$

Platí-li mezi řetězci λ a μ relace přímé derivace, pak píšeme $\lambda \Rightarrow_G \mu$ a říkáme, že řetězec μ lze přímo generovat z řetězce λ v systému G.

Definice 3.4.2 Nechť $G = (N, \Sigma, P, w)$ je E0L systém a λ a μ jsou řetězce z V^*. Mezi řetězci λ a μ platí relace $\Rightarrow^+$ nazývaná *derivace*, jestliže existuje posloupnost přímých derivací $v_{i-1} \Rightarrow v_i \quad 1 \leq i \leq n$ taková, že platí:

$$\lambda = v_0 \Rightarrow v_1 \Rightarrow \cdots \Rightarrow v_{n-1} \Rightarrow v_n = \mu.$$

Tuto posloupnost nazýváme *derivací délky n*. Platí-li $\lambda \Rightarrow^+ \mu$, pak říkáme, že řetězec μ lze *generovat* z řetězce λ v systému G. Relace $\Rightarrow^+$ je tranzitivním uzávěrem relace přímé derivace $\Rightarrow$. Symbolem $\Rightarrow^n$ značíme n-tou mocninu relace $\Rightarrow$.

Definice 3.4.3 Jestliže v systému G platí pro řetězce λ a μ relace $\lambda \Rightarrow^+ \mu$ nebo identita $\lambda = \mu$, pak píšeme $\lambda \Rightarrow^* \mu$. Relace $\Rightarrow^*$ je tranzitivním a reflexivním uzávěrem relace přímé derivace $\Rightarrow$.

Definice 3.4.4 Nechť $G = (V, \Sigma, P, w)$ je E0L systém. Řetězec $\alpha \in V^*$ nazýváme *větnou formou*, jestliže platí $S \Rightarrow^* \alpha$, tj. řetězec α je generovatelný z axiomu w. Větná forma, která obsahuje pouze terminální symboly, se nazývá *věta*. *Jazyk* $L(G)$, generovaný systémem G, je definován množinou všech vět

$$L(G) = \{u | w \Rightarrow^* u, \quad u \in \Sigma^*\}.$$

E0L systémy jsou jednou z výjimek, které nelze zařadit do Chomského hierarchie. E0L systémy svojí vyjadřovací schopností přesahují množinu bezkontextových jazyků, ale zároveň nepopisují všechny kontextové jazyky.

Příklad 3.4.5 Mějme E0L systém $G = (V, \Sigma, P, aAa)$, kde

- $V = \{A\}$,
- $\Sigma = \{a, b\}$,
- $P = \{$
  p_1: $a \to aa$,
  p_2: $A \to bAb$,
  p_3: $b \to b$,
  p_4: $A \to \varepsilon\}$

Derivace v této gramatice může být například:

$$aAa \Rightarrow aabAbaa[p_1, p_2, p_1] \Rightarrow aaaabbaaaa[p_1, p_1, p_3, p_4, p_3, p_1, p_1]$$

Poznámka: další gramatiky založené na 0L systémech (ET0L, CT0L, FEP0L, atd.) a vztahy mezi nimi lze najít v [28] a [25].

3.5 Frontové gramatiky

Na konci této práce budou představeny oboustranné zásobníkové automaty nad volnou grupou, k jejich konstrukci bude zapotřebí definovat následující pojmy: zleva rozšířená frontová gramatika a rozšířený zásobníkový automat, o těchto formálních modelech pojednává tato a následující podkapitola. Frontové gramatiky a zleva rozšířené frontové gramatiky popisují třídu rekurzivně vyčíslitelných jazyků, více lze nalézt v [23].

3.5.1 Frontová gramatika

Definice 3.5.5 *Frontová gramatika* (viz [15]) je šestice, $Q = (V, T, W, F, s, P)$, kde V a W jsou totální abecedy takové, že $V \cap W = \emptyset$, $T \subseteq V$, $F \subseteq W$, $s \in (V - T)(W - F)$ je výchozí (startovací) axiom a $P \subseteq V \times (W - F) \times V^* \times W$ je konečná relace taková, že pro každé $a \in V$ existuje nějaký prvek $(a, b, x, c) \in P$.

Jestliže $u, v \in V^*W$, $u = arb$, $v = rxc$, $a \in V$, $r, x \in V^*$, $b, c \in W$ a $(a, b, x, c) \in P$, potom $u \Rightarrow v$ v Q. Symbolem $\Rightarrow$ je označována *relace přímé derivace* v Q. Obvyklým způsobem jsou pak definovány relace $\Rightarrow^n$, $\Rightarrow^+$ a $\Rightarrow^*$.

Jazyk generovaný frontovou gramatikou Q, $L(Q)$, je definován jako

$$L(Q) = \{w | s \Rightarrow^* wf, w \in T^*, f \in F\}.$$

Konstrukce oboustranného zásobníkového automatu nad volnou grupou vychází z modifikace této frontové gramatiky, která byla představena v [23].

Označme třídu jazyků generovaných frontovými gramatikami jako **QG**. Potom platí následující věta.

Věta 3.5.1 **QG = RE**. Důkaz je možné nalézt v [15].

Příklad 3.5.6 Mějme frontovou gramatiku $G = (V, T, W, F, s, P)$, kde

- $V = \{S, A, a, b\}$,
- $T = \{a, b\}$,
- $W = \{Q, f\}$,
- $F = \{f\}$,
- $s = SQ$,
- $P = \{$
  p_1: (S, Q, Aaa, Q),
  p_2: $(A, Q, bb, f)\}$

Potom v této gramatice existuje posloupnost derivací:

$$s = SQ \Rightarrow AaaQ[p_1] \Rightarrow aabbf[p_2]$$

která generuje větu *aabb*.

3.5.2 Zleva rozšířená frontová gramatika

Definice 3.5.6 *Zleva rozšířená frontová gramatika* je šestice, $Q = (V, T, W, F, s, P)$, kde V, T, W, F a s mají stejný význam jako v případě frontové gramatiky. Množina pravidel P je definována jako konečná relace $P \subseteq V \times (W - F) \times V^* \times W$. Na rozdíl od frontové gramatiky striktně nevyžaduje, aby pro každé $a \in V$ existoval nějaký prvek (a, b, x, c) v P.

Předpokládejme dále, že $\# \notin V \cup W$. Jestliže $u, v \in V^*\{\#\}V^*W$, kde $u = w\#arb$, $v = wa\#rxc$, $a \in V$, $r, x, w \in V^*$, $b, c \in W$ a $(a, b, x, c) \in P$, potom $u \Rightarrow v$ v Q. Standardním způsobem jsou pak také definovány relace $\Rightarrow^n$, kde $n \geq 0$, $\Rightarrow^+$ a $\Rightarrow^*$.

Jazyk generovaný zleva rozšířenou frontovou gramatikou je definován jako

$$L(Q) = \{v | \#s \Rightarrow^* w\#vf, w \in V^*, v \in T^*, f \in F\}.$$

Příklad 3.5.7 Mějme zleva rozšířenou frontovou gramatiku $G = (V, T, W, F, s, P)$, kde

- $V = \{S, A, a, b\}$,
- $T = \{a, b\}$,
- $W = \{Q, f\}$,
- $F = \{f\}$,
- $s = SQ$,
- $P = \{$
  p_1: (S, Q, Aaa, Q),
  p_2: $(A, Q, bb, f)\}$

Potom v této gramatice existuje posloupnost derivací:

$$\#s = \#SQ \Rightarrow S\#AaaQ[p_1] \Rightarrow AS\#aabbf[p_2]$$

která generuje větu $aabb$.

Následující pomocná věta bude použita při konstrukci oboustranného zásobníkového automatu nad volnou grupou.

Lemma 3.1 Pro každý rekurzivně vyčíslitelný jazyk L existuje zleva rozšířená frontová gramatika Q taková, že $L = L(Q)$ a pro každé pravidlo $(a, b, x, c) \in P$ platí $a \in (V - T)$, $b \in (W - F)$, $x \in ((V - T)^* \cup T^*)$. Důkaz viz [21].

Důsledek 3.5.1 Nechť $G = (V, T, W, F, Sq_0, P)$ je zleva rozšířená frontová gramatika splňující vlastnosti popsané v lemma 3.1. Tato gramatika G generuje každou větu $w \in L(G)$ následujícím způsobem

$$\begin{array}{lll}
 & \#Sq_0 & \\
\Rightarrow & x_1\#y_1q_1 & [p_1] \\
\Rightarrow & x_2\#y_2q_2 & [p_2] \\
 & \vdots & \\
\Rightarrow & x_k\#y_kq_k & [p_k] \\
\Rightarrow & x_{k+1}\#y_{k+1}z_1q_{k+1} & [p_{k+1}] \\
 & \vdots & \\
\Rightarrow & x_{k+j-1}\#y_{k+j-1}z_{j-1}q_{k+j-1} & [p_{k+j-1}] \\
\Rightarrow & x_{k+j}\#y_{k+j}z_jq_{k+j} & [p_{k+j}] \\
\Rightarrow & x_{k+j}y_{k+j}\#z_{j+1}q_{k+j+1} & [p_{k+j+1}]
\end{array}$$

kde $x_1, \ldots, x_{k+j} \in (V - T)^*$, $y_1, \ldots, y_{k+j-1} \in (V - T)^*$, $y_{k+j} \in (V - T)$, $z_1, \ldots, z_{j+1} \in T^*$, $z_{j+1} = w$, $q_1, \ldots, q_{k+j} \in (W - F)$, $q_{k+j+1} \in F$. $p_1, \ldots, p_k$ jsou tvaru (A, q, x, p), kde $A \in (V - T)$, $p, q \in (W - F)$ and $x \in (V - T)^*$. $p_{k+1}, \ldots, p_{k+j}$ jsou tvaru (A, q, y, p), kde $A \in (V - T)$, $p, q \in (W - F)$ a $y \in T^*$. Poslední použité pravidlo, p_{k+j+1}, je tvaru (A, p, y, t), kde $A \in (V - T)$, $p \in (W - F)$, $y \in T^*$ a $t \in F$.

Příklad 3.5.8 Uvažujme zleva rozšířenou frontovou gramatiku splňující výše zavedené lemma 3.1 $G = (V, T, W, F, s, P)$, kde

- $V = \{S, A, B, a, b\}$,
- $T = \{a, b\}$,
- $W = \{Q, f\}$,
- $F = \{f\}$,
- $s = SQ$,
- $P = \{$
  p_1: (S, Q, AB, Q),
  p_2: (A, Q, aa, Q),
  p_3: $(B, Q, bb, f)\}$

Potom v této gramatice G existuje posloupnost derivací:

$$\#s = \#SQ \Rightarrow S\#ABQ[p_1] \Rightarrow SA\#BaaQ[p_2] \Rightarrow SAB\#aabbf[p_3]$$

která generuje větu *aabb*. Všimněme si, že třetí komponenta pravidel je vždy řetězec pouze nonterminálních symbolů nebo pouze řetězec terminálních symbolů.

3.6 Zásobníkové automaty

Poslední formální model, který v této práci bude modifikován je zásobníkový automat, v tomto případě kromě přidání vlastností volné grupy se bude modifikace týkat i samotné struktury modelu.

Bude změněn zásobník a to tak, aby byl schopný vkládat symboly nebo řetězce vstupní abecedy z obou stran. Vznikne tak modifikace nazvaná oboustranný zásobníkový automat a rozšířený oboustranný zásobníkový automat. Pro účel konstrukce obou zmíněných modifikací uvádím pro úplnost definice nemodifikovaných verzí zásobníkových automatů.

3.6.1 Zásobníkový automat

Definice 3.6.7 *Zásobníkový automat* je sedmice $M = (Q, \Sigma, \Gamma, R, s, S, F)$, kde

- Q je konečná množina stavů
- Σ je konečná vstupní abeceda
- Γ je konečná zásobníková abeceda
- R je konečná množina pravidel tvaru $Apa \rightarrow wq$,
  kde $A \in \Gamma$, $p, q \in Q$, $a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ a $w \in \Gamma^*$
- $s \in Q$ je počáteční stav
- $S \in \Gamma$ je počáteční symbol zásobníku
- $F \subseteq Q$ je množina koncových stavů

Konfigurací zásobníkového automatu M rozumíme řetězec xpy, kde $p, q \in Q$, $A \in \Gamma$, $x, v, w \in \Gamma^*$, $a \in \Sigma$ a $y \in \Sigma^*$. Pokud $xApay$ a $xwqy$ jsou dvě konfigurace a $Apa \rightarrow wq \in R$, pak automat M provádí *přechod* z konfigurace $xApay$ do konfigurace $xwqy$ podle pravidla $Apa \rightarrow wq$ a píšeme

$$xApay \vdash_M xwqy[Apa \rightarrow wq]$$

nebo stručněji $xApay \vdash xwqy$. Symboly $\vdash^n$, $\vdash^+$ a $\vdash^*$ označují postupně posloupnost přechodů délky n, $n \geq 0$, tranzitivní uzávěr a reflexivní-tranzitivní uzávěr relace přechodu $\vdash$.

Jazyk přijímaný automatem M může být definován třemi způsoby:

1. přechodem do koncového stavu:

   $L(M_f) = \{w|w \in \Sigma^* \wedge Ssw \vdash^* rf$, kde $f \in F, r \in \Gamma^*\}$

2. s vyprázdněním zásobníku:

   $L(M_e) = \{w|w \in \Sigma^* \wedge Ssw \vdash^* p$, kde $p \in Q\}$

3. přechodem do koncového stavu a s vyprázdněním zásobníku:

   $L(M_{fe}) = \{w|w \in \Sigma^* \wedge Ssw \vdash^* f$, kde $f \in F\}$

Platí, že všechny tři způsoby přijímání zásobníkového automatu jsou si ekvivalentní a lze sestrojit ke každému zásobníkovému automatu všechny varianty: $L(M_f) = L(M_e) = L(M_fe)$.

Zásobníkové automaty popisují třídu bezkontextových jazyků (dokázáno na straně 486 v [19]).

Příklad 3.6.9 Uvažujme zásobníkový automat $M = (Q, \Sigma, \Gamma, R, s, S, F)$, který přijímá přechodem do koncového stavu a s vyprázdněním zásobníku a kde

- $Q = \{s, p, q, f\}$,
- $\Sigma = \{a, b\}$,
- $\Gamma = \{a, S\}$,
- $R = \{$
  p_1: $Ssa \rightarrow Sap$,
  p_2: $apa \rightarrow aap$,
  p_3: $apb \rightarrow q$,
  p_4: $aqb \rightarrow q$,
  p_5: $Sq \rightarrow f\}$,
- $F = \{f\}$

Přijetí věty $aabb$ pak bude provedeno následovně:

$$Ssaabb \vdash Sapabb[p_1] \vdash Saapbb[p_2] \vdash Saqb[p_3] \vdash Sq[p_4] \vdash f[p_5]$$

3.6.2 Rozšířený zásobníkový automat

Rozšířený zásobníkový automat se od klasického zásobníkového automatu liší tím, že ze vstupní pásky může číst i řetězce.

Definice 3.6.8 *Rozšířený zásobníkový automat* je sedmice $N = (Q, \Sigma, \Gamma, R, s, S, F)$, kde

- Q je konečná množina stavů
- Σ je konečná vstupní abeceda
- Γ je konečná zásobníková abeceda
- R je konečná množina pravidel tvaru $vpa \to wq$,
  kde $p, q \in Q$, $a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$, a $v, w \in \Gamma^*$
- $s \in Q$ je počáteční stav
- $S \in \Gamma$ je počáteční symbol zásobníku
- $F \subseteq Q$ je množina koncových stavů

Konfigurací zásobníkového automatu N rozumíme řetězec xpy, kde $p, q \in Q$, $x, v, w \in \Gamma^*$, $a \in \Sigma$ a $y \in \Sigma^*$. Pokud $xvpay$ a $xwqy$ jsou dvě konfigurace a $vpa \to wq \in R$, pak automat N provádí *přechod* z konfigurace $xvpay$ do konfigurace $xwqy$ podle pravidla $vpa \to wq$ a píšeme

$$xvpay \vdash_N xwqy[vpa \to wq]$$

nebo stručněji $xvpay \vdash xwqy$. Symboly $\vdash^n$, $\vdash^+$ a $\vdash^*$ označují postupně posloupnost přechodů délky n, $n \geq 0$, tranzitivní uzávěr a reflexivní-tranzitivní uzávěr relace přechodu $\vdash$.

Jazyk přijímaný automatem N je definován třemi způsoby stejně jako zásobníkový automat M.

1. přechodem do koncového stavu: $L(M_f) = \{w | w \in \Sigma^* \wedge Ssw \vdash^* rf$, kde $f \in F, r \in \Gamma^*\}$
2. s vyprázdněním zásobníku: $L(M_e) = \{w | w \in \Sigma^* \wedge Ssw \vdash^* p$, kde $p \in Q\}$
3. přechodem do koncového stavu a s vyprázdněním zásobníku: $L(M_{fe}) = \{w | w \in \Sigma^* \wedge Ssw \vdash^* f$, kde $f \in F\}$

Platí, že všechny tři způsoby přijímání rozšířeného zásobníkového automatu jsou si ekvivalentní a lze sestrojit ke každému rozšířenému zásobníkovému automatu všechny varianty: $L(M_f) = L(M_e) = L(M_f e)$.

Rozšíření tohoto zásobníkového automatu spočívá ve schopnosti číst ze vstupu nejen symboly ale i řetězce.

Dále platí, že každý rozšířený zásobníkový automat M_{EPDA} lze převést na klasický zásobníkový automat M_{PDA} a opačně. Platí tedy, že $L(M_{EPDA}) = L(M_{PDA})$, což bylo dokázáno na straně 419 v [19].

Rozšířené zásobníkové automaty popisují třídu bezkontextových jazyků (dokázáno na straně 486 v [19]).

Příklad 3.6.10 Uvažujme rozšířený zásobníkový automat $M = (Q, \Sigma, \Gamma, R, s, S, F)$, který přijímá přechodem do koncového stavu a s vyprázdněním zásobníku a kde

- $Q = \{s, f\}$,
- $\Sigma = \{a, b\}$,
- $\Gamma = \{a, b, S, C\}$,
- $R = \{$
  p_1: $sa \rightarrow as$,
  p_2: $sb \rightarrow bs$,
  p_3: $s \rightarrow Cs$,
  p_4: $aCsa \rightarrow Cs$,
  p_5: $bCsb \rightarrow Cs$,
  p_6: $SCs \rightarrow f\}$,
- $F = \{f\}$

Přijetí věty *abba* pak bude provedeno následovně:

$$Ssabba \vdash Sasbba[p_1] \vdash Sabsba[p_2] \vdash SabCsba[p_3] \vdash SaCsa[p_5] \vdash SCs[p_4] \vdash f[p_6]$$

Kapitola 4

Úvod do základních algebraických struktur

Při definici pojmu E0L gramatika nad volnou grupou a bezkontextová gramatika nad volnou grupou se neobejdeme bez znalosti základních algebraických struktur. Jedná se zejména o *binární operace*, *grupoidy, pologrupy, monoidy* a *grupy.* Na konci této kapitoly uvedeme definici *volné grupy*, kterou poté spojíme s E0L gramatikou a gramatikou bezkontextovou. U nově vzniklých struktur budeme zkoumat jejich schopnosti generovat jazyky.

Více ze základů obecné algebry lze nalézt v [17] nebo [14].

4.1 Finitární algebraické operace

Základním pojmem ve výše uvedených strukturách je pojem *algebraické operace.* Mějme dáno celé nezáporné číslo n a množinu M. Řekneme, že na množině M je definována $n-$ární algebraická operace $\circ$, když každé uspořádané $n-$tici prvků $a_1, a_2, \ldots, a_n \in M$ je přiřazen jednoznačně určený prvek z M. Tento prvek nazveme výsledkem operace $\circ$ na dané prvky a budeme jej označovat symbolem $a_1 a_2 \ldots a_n \circ$. Číslo n nazýváme *aritou* operace $\circ$.

Definice 4.1.1 *Nulární operací* na množině M nazýváme zobrazení $\circ : M^0 \to M$, jehož výsledkem je jeden z prvků množiny M, který není závislý na volbě prvků z M.

Tuto operaci můžeme chápat jako vyčlenění jednoho význačného prvku z množiny M.

Definice 4.1.2 *Unární operací* na množině M nazýváme zobrazení $\circ : M \to M$, které každému prvku $a \in M$ přiřazuje právě jeden prvek $a\circ \in M$.

Definice 4.1.3 *Binární operací* na množině M nazýváme zobrazení $\circ : M^2 \to M$. Prvek $a \circ b$, kde $a, b, a \circ b \in M$, nazýváme kompozicí prvků a, b vzhledem k binární operaci na množině M.

Podle základních požadavků kladených na binární operace na dané množině dostáváme objekty s různými algebraickými vlastnostmi. Tyto objekty nazýváme *algebraické struktury.* Binární operace na určité množině, které splňují axiómy příslušné algebraické struktury, nazýváme *operacemi této struktury.*

4.2 Axiomy binárních operací

Každý axiom budeme chápat jako požadavek, který na danou binární operaci klademe. Uvažujme binární operaci $\circ$ a množinu M. Nyní uveďme základní axiomy, které nás budou v souvislosti s naší problematikou zajímat.

A_0 *Uzavřenost operace*: ke každé dvojici prvků $a, b \in M$ přiřazujeme prvek $c = a \circ b$. Platí $c \in M$.

A_1 *Asociativní zákon*: Operace $\circ$ splňuje asociativní zákon, pokud $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$, kde $a, b, c \in M$.

A_2 *Existence neutrálního prvku*: existuje takový prvek $e \in M$, pro který platí $e \circ a = a \circ e = a$ pro všechna $a \in M$.

A_3 *Existence inverzního prvku*: ke každému prvku $a \in M$ existuje tzv. inverzní prvek $\overline{a} \in M$ takový, že platí $a \circ \overline{a} = \overline{a} \circ a = e$, kde $e \in M$ je neutrální prvek operace $\circ$ na množině M podle axiomu A_2.

Poznamenejme, že existují další axiomy definující další vlastnosti kladené a operace. My si však v tomto textu vystačíme s výše uvedenými a další proto nebudeme uvádět.

4.3 Grupoidy, pologrupy, monoidy a grupy

Než si definujeme *volnou grupu*, která nás jakožto algebraická struktura bude v tomto výkladu především zajímat, musíme si definovat i struktury, ze kterých bude definice volné grupy vycházet.

Definice 4.3.4 Algebraická struktura $(M, \circ)$ definována binární operací $\circ$ na množině M se nazývá *grupoid*, pokud operace $\circ$ splňuje axiom A_0 uzavřenosti operace.

Definice 4.3.5 Algebraická struktura $(M, \circ)$ jejíž operace splňuje axiom A_0 uzavřenosti operace a asociativní zákon podle axiomu A_1 se nazývá *pologrupa*. Ekvivalentní název je též *asociativní grupoid*.

Definice 4.3.6 Algebraická struktura $(M, \circ, \varepsilon)$ jejíž operace splňuje axiomy A_0, A_1 a A_2 se nazývá *monoid* s neutrálním prvkem ε. Ekvivalentní název je též *pologrupa s neutrálním prvkem*.

Výběr neutrálního prvku můžeme chápat jako definici určité nulární operace na množině M, která dává jako svůj výsledek právě prvek $\varepsilon \in M$.

Definice 4.3.7 Algebraická struktura $(M, \circ, \varepsilon, ^{-1})$, která splňuje axiomy A_0, A_1, A_2 a A_3, se nazývá *grupa*.

Grupu můžeme chápat jako monoid obsahující ke každému prvku $a \in M$ prvek inverzní $\overline{a} \in M$, kde jeho přiřazení každému prvku můžeme provést definicí unární operace $^{-1} : M \to M$.

Poznamenejme, že existují další algebraické struktury, které se liší počtem binárních operací, případně dalšími axiomy, které musí jejich operace splňovat. Operace mohou být v obecném případě $n-$ární a jejich arity mohou být navzájem různé. Tyto struktury však nevyužijeme a proto je ani nebudeme uvádět.

Kapitola 5

Volné grupy

Definujme si konečně strukturu volné grupy, která nás bude v souvislosti s naším výzkumem zajímat. Uveďme nejprve, jak je definována volná varianta struktury jednodušší — tedy monoidu.

5.1 Volný monoid

Volný monoid na množině V je monoid, jehož prvky jsou všechny konečné řetězce složené z prvků množiny V za pomoci binární operace konkatenace včetně prázdného řetězce ε, který je neutrálním prvkem. Tyto řetězce často nazýváme *slova* a množinu všech slov nad množinou V značíme V^*.

Definujme nyní výše uvedené formálně.

Definice 5.1.1 Množina V se nazývá *volná báze* monoidu G, jestliže V generuje G a každé zobrazení $f : V \to H$, kde H je monoid, lze rozšířit na homomorfismus $g : G \to H$. Monoid G se nazývá *volný*, jestliže má alespoň jednu volnou bázi.

Volný monoid generovaný množinou generátorů V pomocí operace konkatenace je v teorii formálních jazyků značen jednoduše symbolem V^*.

Příklad 5.1.1 Uvažujme množinu $V = \{a, b, c\}$. Potom prvky volného monoidu budou všechny řetězce složené z prvků množiny V. Například abc, ε, $abcc$, a, $cbcc \in V^*$.

5.2 Volná grupa

Podobně jako v případě volného monoidu, definujme si pojem volné grupy nejprve neformálně. *Volná grupa* na množině M je grupa, jejíž prvky jsou všechny konečné řetězce složené z prvků množiny M za pomoci binární operace konkatenace a to včetně prázdného řetězce ε, který je neutrálním prvkem. Připomeňme, že aby se jednalo o grupu, musí množina M ke každému svému prvku obsahovat prvek inverzní (výjimku tvoří pouze neutrální prvek, který je inverzní sám k sobě).

Uveďme si formální definici.

Definice 5.2.2 Množina V se nazývá *volná báze* grupy G, jestliže V generuje G a každé zobrazení $f : V \to H$, kde H je grupa, lze rozšířit na homomorfismus $g : G \to H$. Grupa G se nazývá *volná*, jestliže má (alespoň jednu) volnou bázi.

Aby nedošlo k záměně označení volného monoidu a volné grupy, stanovme si zde, že volnou grupu generovanou množinou generátorů V pomocí operace konkatenace budeme značit jednoduše symbolem V°. Protože množina V obsahuje ke každému prvku i prvek inverzní, mohou se všechny prvky z V vyskytovat v jednotlivých slovech množiny V°. Každé slovo, které obsahuje dvojice $\overline{x}x$ nebo $x\overline{x}$, lze dále redukovat až k jejich úplnému odstranění. Slovo, které neobsahuje žádné výše uvedené dvojice prvků vzájemně inverzních, se potom nazývá *redukované*. Lze dokázat, že každému slovu odpovídá pouze jediné slovo redukované a to bez ohledu na pořadí redukcí jednotlivých dvojic vzájemně inverzních symbolů. Důkaz je možné najít např. v [12].

V pozdějším spojení gramatiky a volné grupy však budeme možnost redukce dvojic vzájemně inverzních symbolů hojně využívat. Zvláště důležitým prvkem se stane inverzní řetězec.

Definice 5.2.3 Nechť $w = w_1 \dots w_n$ je řetězec z V°, kde $w_1, \dots w_n \in V$, $n \geq 0$, potom *inverzní řetězec* k řetězci w je definován jako $\overline{w} = \overline{w_n} \dots \overline{w_1}$, kde $\overline{w_1}, \dots, \overline{w_n} \in V$ a tedy $\overline{w} \in V^\circ$.

Příklad 5.2.2 Uvažujme množinu $V = \{a, b, c, \overline{a}, \overline{b}, \overline{c}\}$, potom inverzní řetězec k řetězci $bcaa \in V^\circ$ je roven řetězci $\overline{aacb} \in V^\circ$. Protože $\overline{a}a = a\overline{a} = \varepsilon$, $\overline{b}b = b\overline{b} = \varepsilon$ a $\overline{c}c = c\overline{c} = \varepsilon$, je zřejmé, že spojením obou řetězců získáme $bcaa\overline{aacb} = \overline{aacb}bcaa = \varepsilon$.

Definice 5.2.4 Nechť w je řetězec z V° a $\overline{w}$ je inverzní řetězec k řetězci w. Při jejich konkatenaci dojde k následnému vyrušení $\overline{w}w = \varepsilon$ a $w\overline{w} = \varepsilon$, tento jev založený na konkatenaci vzájemně inverzních symbolů budeme označovat jako *redukci*.

Příklad 5.2.3 Uvažujme opět množinu $V = \{a, b, c, \overline{a}, \overline{b}, \overline{c}\}$, kde inverzní prvek ke každému prvku $x \in V$ je prvek $\overline{x} \in V$. Každý prvek množiny V má tedy svůj inverzní protějšek a tak lze množinu V použít jako generátor volné grupy V°. Prvky volné grupy V° jsou všechny řetězce složené z prvků množiny V. Například abc, ε, $\overline{a}\overline{b}\overline{c}$, $a\overline{b}\overline{c}$, $c\overline{ac}bcc \in V^\circ$.

Kapitola 6

Gramatiky nad volnými grupami

V této kapitole budou představeny nové formální modely založené na gramatikách. Standardně jsou derivace v gramatikách definovány nad volným monoidem generovaným množinami terminálních a nonterminálnich symbolů (totální abecedou) operací konkatenace. V této práci provedeme modifikaci derivace a to tak, že ji budeme definovat nad volnou grupou. Dále se budeme zabývat generativní silou takto modifikovaných gramatik. Jako první případ prozkoumáme modifikaci bezkontextových gramatik. Budeme vycházet z gramatik typu 0, popsaných Kurodovou normální formou, představíme konstrukci, která danou gramatiku v Kurodově normální formě transformuje na gramatiku bezkontextovou nad volnou grupou. Podobně budeme transformovat i E0L gramatiky.

Tato kapitola byla ve velkém měřítku inspirovaná [24].

6.1 Bezkontextové gramatiky nad volnými grupami

Výše jsme si uvedli matematické a algebraické základy formálně, zde zavedeme určité zjednodušení. Uvažujme libovolnou abecedu V. Zdůrazněme znovu, že symbolem V° budeme označovat volnou grupu generovanou množinou generátorů V operací konkatenace. Přitom platí, že pro každý symbol $x \in V$ existuje právě jeden inverzní symbol $\overline{x} \in V$. Prázdný řetězec $\varepsilon \in V^\circ$ je neutrálním prvkem.

Spojením bezkontextové gramatiky a volné grupy generované totální abecedou této gramatiky získáme bezkontextovou gramatiku nad volnou grupou, kterou si nyní definujeme.

Tato problematika byla blíže popsána v [3].

Definice 6.1.1 *Bezkontextová gramatika nad volnou grupou* (zkráceně $\mathbf{CF}^\circ$) je čtveřice $\Gamma = (V, \Sigma, P, S)$, kde V, Σ a S má stejný význam jako v gramatikách bezkontextových. Dále P je konečná množina pravidel tvaru $A \to x$, kde $A \in V - \Sigma$ a $x \in V^*$.

Nás bude zajímat hlavně schopnost struktury generovat jazyky. Naším cílem je samozřejmě co nejvyšší síla — ideálně schopnost generovat celou třídu jazyků typu 0.

Ještě než začneme s podrobným průzkumem, musíme si definovat relaci přímé derivace $\Rightarrow^\circ$.

6.1.1 Derivace v bezkontextové gramatice nad volnou grupou

Definice 6.1.2 Nechť $\Gamma = (V, \Sigma, P, S)$ je bezkontextová gramatika nad volnou grupou. Mezi řetězci λ a μ platí relace $\Rightarrow^\circ$ zvaná přímá derivace, pokud oba řetězce můžeme vyjádřit ve tvaru

$$\lambda = \alpha A \beta$$

$$\mu = \alpha x \beta$$

a zároveň $p = A \rightarrow x \in P$, kde $\alpha, \beta, x \in V^*$. Potom píšeme $\lambda \Rightarrow^{\circ}_{\Gamma} \mu$ $[p]$ a říkáme, že řetězec λ přímo derivuje řetězec μ podle pravidla p v bezkontextové gramatice nad volnou grupou Γ.

V případě bezprostředního výskytu dvojice $x\overline{x}$ nebo $\overline{x}x$, kde $x, \overline{x} \in V$, ve větné formě se tato okamžitě redukuje podle pravidel popsaných výše. Protože je výsledná redukovaná větná forma nezávislá na pořadí případných redukcí jednotlivých dvojic vzájemně inverzních symbolů, nečiní tento jev žádné problémy při generování vět jazyka.

Poznámka *Tranzitivní uzávěr* $\Rightarrow^{\circ+}_{\Gamma}$, *reflexivní a tranzitivní uzávěr* $\Rightarrow^{\circ*}_{\Gamma}$ a derivace délky n $\Rightarrow^{\circ n}_{\Gamma}$ jsou definovány zcela přirozeně stejným způsobem jako v případě běžných gramatik. Podobně symbol $_{\Gamma}$ jako dolní index symbolu zavedené relace nebudeme uvádět, pokud je z kontextu zřejmé, o kterou bezkontextovou gramatiku nad volnou grupou se jedná.

6.1.2 Jazyk generovaný bezkontextovou gramatikou nad volnou grupou

Definice 6.1.3 Nechť $\Gamma = (V, \Sigma, P, S)$ je bezkontextová gramatika nad volnou grupou. Řetězec $\alpha \in V^{\circ}$ nazýváme *větnou formou*, jestliže platí $S \Rightarrow^{\circ*} \alpha$, tj. řetězec α je generovatelný ze startovacího symbolu S. Větná forma, která obsahuje pouze terminální symboly, se nazývá *věta*. *Jazyk* $L(\Gamma)$, generovaný bezkontextovou gramatikou nad volnou grupou, je definován množinou všech vět

$$L(\Gamma) = \{w \mid S \Rightarrow^{\circ*} w \wedge w \in \Sigma^*\}$$

generovatelných z výchozího symbolu této gramatiky.

6.1.3 Generativní schopnosti bezkontextových gramatik nad volnými grupami

Nyní se budeme zabývat generativními schopnostmi nově zavedené struktury. Naším cílem je ukázat, že pro každou gramatiku H typu 0 existuje ekvivalentní bezkontextová gramatika nad volnou grupou Γ taková, že $L(H) = L(\Gamma)$.

Je tedy nutné najít určitý algoritmus transformace gramatik typu 0 na bezkontextové gramatiky nad volnými grupami.

Pravidla tvaru $A \rightarrow \varepsilon$, která mohou být aplikována kdekoliv, působí potíže při práci s volnou grupou (konkrétně se jedná o simulaci kontextových pravidel), proto bylo z [22] převzato následující lemma. To zajistí převedení pravidel tvaru $A \rightarrow \varepsilon$ na pravidla tvaru $A \rightarrow B$. Ke gramatice je poté přidána určitá režie, která zajistí přijímání původního jazyka. V této režii se vyskytuje pouze jedno pravidlo tvaru $A \rightarrow \varepsilon$, jeho použití je snadné ošetřit a ve výsledné gramatice nad volnou grupou nečiní jeho výskyt potíže. Více podrobností lze nalézt v příkladu konstrukce bezkontextové gramatiky nad volnou grupou. Nyní si uvedeme zmíněné lemma.

Lemma 6.1 Pro každou gramatiku $H = (N, \Sigma, P, S_H)$ typu 0 existuje ekvivalentní gramatika $G = (N \cup \{X, Y\}, \Sigma, P, S_G)$ typu 0, kde $\{X, Y, S_G\} \cap \{N \cup \Sigma\} = \emptyset$ taková, že její množina přepisovacích pravidel obsahuje pouze pravidla tvaru:

(1) $AB \to CD$ pro $A, B, C, D \in N$

(2) $A \to x$ pro $A \in N$ a $x \in N^2 \cup \Sigma$

(3) $AY \to YA$ pro $A \in N$

(4) $S_G \to XS_H$

(5) $XY \to X$

(6) $X \to \varepsilon$

Je zřejmé, že nová gramatika je v Kurodově normální formě a tedy její generativní síla bude odpovídat jazykům typu 0.

Důkaz 6.1.1 Z důkazu si uvedeme pouze konstrukci, kterou je též možné najít v [22]. Uvažujme gramatiku $H = (N_H, \Sigma, P_H, S_H)$. Bez ztráty na obecnosti můžeme předpokládat, že H je v Kurodově normální formě, tedy množina přepisovacích pravidel P_H obsahuje pouze pravidla tvaru

- $AB \to CD$
- $A \to BC$
- $A \to a$
- $A \to \epsilon$

$A, B, C \in N_H$, $a \in \Sigma$.

Navíc předpokládejme, že $\{S_G, X, Y\} \cap (N_H \cup \Sigma) = \emptyset$. Definujme novou gramatiku $G = (N_G, \Sigma, P_G, S_G)$, kde množina $N_G = N_H \cup \{X, Y\}$. Množinu přepisovacích pravidel P_G zkonstruujeme následovně:

(1) pokud $A \to x \in P_H$, kde $A \in N_H$ a $x \in N_H^2 \cup \Sigma$, potom přidej $A \to x$ do P_G

(2) pokud $AB \to CD \in P_H$, kde $A, B, C, D \in N_H$, potom přidej $AB \to CD$ do P_G

(3) pokud $A \to \varepsilon \in P_H$, kde $A \in N_H$, potom přidej $A \to Y$ do P_G

(4) pro každé $A \in N_H$ přidej $AY \to YA$ do P_G

(5) přidej $S_G \to XS_H$, $XY \to X$ a $X \to \varepsilon$ do P_G

Tím je konstrukce hotova.

Transformací gramatiky H na gramatiku G zajistíme, že se v nové gramatice G bude vyskytovat pouze jediné pravidlo typu $A \to \varepsilon$ a to právě pro $A = X$. Všechna pravidla z gramatiky H tvaru $A \to \varepsilon$ jsou v nové gramatice G převedena na pravidla $A \to Y$.

V gramatice G pomocí pravidel $AY \rightarrow YA$ zajistíme postupné předávání nonterminálu Y na začátek větné formy, respektive za nonterminál X. Po takovémto přesunu se uplatní pravidlo $XY \rightarrow X$. Tím je provedena simulace pravidel $A \rightarrow \varepsilon$ z původní gramatiky H.

Zbývá zavést na začátek každé větné formy nonterminál X. To zajistí pravidlo $S_G \rightarrow XS_H$. Po vymazání všech nonterminálů Y je zapotřebí odstranit i pomocný nonterminál X, k tomuto účelu slouží pravidlo $X \rightarrow \varepsilon$. Pro lepší pochopení je uveden následující příklad.

Příklad 6.1.1 Uvažujme gramatiku $G = \{N_G, \Sigma, P_G, S_G\}$, kde

- $N_G = \{S_G, A, B\}$,
- $\Sigma = \{a\}$,
- $P_G = \{$
  p_1: $S_G \rightarrow AB$,
  p_2: $AB \rightarrow S_G S_G$,
  p_3: $A \rightarrow a$,
  p_4: $B \rightarrow \varepsilon\}$

Generování věty aa, na které ukážeme jak obě gramatiky provádí derivace, může probíhat následovně:

$$S_G \Rightarrow AB[p_1] \Rightarrow S_G S_G[p_2] \Rightarrow ABS_G[p_1] \Rightarrow ABAB[p_1] \Rightarrow$$
$$aBAB[p_3] \Rightarrow aAB[p_4] \Rightarrow aaB[p_3] \Rightarrow aa[p_4]$$

Gramatika G obsahuje pravidlo p_4, které má na pravé straně ε, budeme tedy tuto gramatiku upravovat podle lemma 6.1 na gramatiku H. Podle výše uvedené konstrukce bude nová gramatika $H = \{N_H, \Sigma, P_H, S_H\}$, kde

- $N_H = N_G \cup \{S_G, X, Y\}$,
- $P_H = \{$
  p_1: $S_H \rightarrow XS_G$, podle kroku (5)
  p_2: $S_G \rightarrow AB$, podle kroku (1)
  p_3: $AB \rightarrow S_G S_G$, podle kroku (2)
  p_4: $S_G Y \rightarrow YS_G$, podle kroku (4)
  p_5: $AY \rightarrow YA$, podle kroku (4)
  p_6: $BY \rightarrow YB$, podle kroku (4)
  p_7: $A \rightarrow a$, podle kroku (1)
  p_8: $X \rightarrow \varepsilon$, podle kroku (5)
  p_9: $XY \rightarrow X$, podle kroku (5)
  p_{10}: $B \rightarrow Y\}$ podle kroku (3)

Konstrukci gramatiky H vycházející z gramatiky G máme hotovou, v tomto okamžiku prozkoumáme jak lze, ale také jak nelze, v nové gramatice H generovat větu aa.

V prvním případě budeme zkoumat, jak se bude derivace vyvíjet, pokud budeme předčasně aplikovat pravidlo tvaru $X \rightarrow \varepsilon$.

$$S_H \Rightarrow XS_G[p_1] \Rightarrow S_G[p_8] \Rightarrow AB[p_2] \Rightarrow S_G S_G[p_3] \Rightarrow ABS_G[p_2] \Rightarrow ABAB[p_2] \Rightarrow AYAB[p_{10}] \Rightarrow$$

$$YAAB[p_5] \Rightarrow YAAY[p_{10}] \Rightarrow YAYA[p_5] \Rightarrow YYAA[p_5] \Rightarrow YYaA[p_7] \Rightarrow YYaa[p_7]$$

Jak můžeme vidět, pokud aplikujeme pravidlo $p_8 : X \to \varepsilon$ v okamžiku, kdy lze ve větné formě získat nějaký nonterminál Y, derivace se zablokuje a nonterminálů Y se už nelze zbavit.

V dalším příkladě prozkoumáme, co se v derivačním procesu stane, pokud předčasně aplikujeme pravidlo tvaru $A \to a$.

$$S_H \Rightarrow XS_G[p_1] \Rightarrow XAB[p_2] \Rightarrow XS_GS_G[p_3] \Rightarrow XABS_G[p_2] \Rightarrow XABAB[p_2] \Rightarrow XaBAB[p_7] \Rightarrow$$

$$XaBaB[p_7] \Rightarrow XaYaB[p_{10}] \Rightarrow XaYaY[p_{10}]$$

Opět je derivace zablokována. Je zřejmé, že abychom se dokázali zbavit nonterminálů Y, musíme tak učinit předtím, než ve větné formě začneme generovat terminální symboly.

V posledním příkladě si konečně ukážeme správnou posloupnost pravidel, pomocí kterých vygenerujeme větu aa.

$$S_H \Rightarrow XS_G[p_1] \Rightarrow XAB[p_2] \Rightarrow XS_GS_G[p_3] \Rightarrow XABS_G[p_2] \Rightarrow XABAB[p_2] \Rightarrow$$

$$XAYAB[p_{10}] \Rightarrow XYAAB[p_5] \Rightarrow XAAB[p_9] \Rightarrow XAAY[p_{10}] \Rightarrow XAYA[p_5] \Rightarrow XYAA[p_5] \Rightarrow$$

$$XAA[p_9] \Rightarrow XAa[p_7] \Rightarrow Xaa[p_7] \Rightarrow aa[p_8]$$

Poznámka Připomeňme, že podle zavedených konvencí z teorie formálních jazyků je třída všech jazyků typu 0 značena symbolem **RE**. Označme $\mathbf{CF}^\circ$ třídu všech jazyků generovaných bezkontextovými gramatikami nad volnými grupami (ekvivalentní název by taktéž mohl být „třída všech jazyků generovaných gramatikami typu 2 nad volnými grupami").

V tuto chvíli již máme definováno vše potřebné a můžeme si tedy vyslovit následující větu.

Věta 6.1.2 $\mathbf{CF}^\circ$=**RE**

Jinými slovy tato věta říká, že pro každou gramatiku G typu 0 existuje ekvivalentní bezkontextová gramatika nad volnou grupou Γ taková, že $L(G) = L(\Gamma)$.

Důkaz 6.1.2 Předpokládejme, že $G = (N_G, \Sigma, P_G, S)$ je gramatika typu 0 podle lemma 6.1.

Bezkontextovou gramatiku nad volnou grupou $\Gamma = (V, \Sigma, P_\Gamma, S)$, kde $N_\Gamma = N_G \cup N_{CS} \cup \overline{N_G}$, $V = N_\Gamma \cup \Sigma$ sestrojíme následovně:

I pokud $A \to x \in P_G$,
kde $x \in (N_G^2 \cup \{Y\} \cup \Sigma), A \in N_G$,
potom přidej $A \to x$ do P_Γ

II pokud $AB \to CD \in P_G$,
kde $A, B, C, D \in N_G$,
potom přidej $A \to C\langle ABCD\rangle$,
$B \to \overline{\langle ABCD\rangle}D$ do P_Γ
a $\langle ABCD\rangle, \overline{\langle ABCD\rangle}$ přidej do N_{CS}

III pro $XY \to X \in P_G$

přidej $X \to X\langle XYX\rangle$,

$Y \to \langle\overline{XYX}\rangle$ do P_Γ

a $\langle XYX\rangle, \langle\overline{XYX}\rangle$ přidej do N_{CS}

IV pro $X \to \varepsilon \in P_G$

přidej $X \to \langle X\rangle\langle\overline{X}\rangle$ do P_Γ

a $\langle X\rangle, \langle\overline{X}\rangle$ přidej do N_{CS}

V pro $Z \in N_G \cup \Sigma$

přidej $\overline{Z}$ do $\overline{N_G}$

Tím je konstrukce Γ hotova.

Množina $\overline{N_G}$ obsahuje inverzní symboly k symbolům z množiny $N_G \cup \Sigma$, tzn. které nejsou obsaženy v množině N_{CS}. Tato množina inverzních symbolů pouze doplňuje V na generátor volné grupy. Množina N_{CS} obsahuje nezbytně nutné nonterminály a jejich inverzní protějšky, které jsou potřeba pro další kroky důkazu a které se týkají kontextových přepisovacích pravidel.

Hlavní myšlenka důkazu Gramatika nad volnou grupou Γ simuluje aplikace kontextových pravidel tvaru $AB \to CD$ a to pomocí dvou derivačních kroků, které zajistí pravidla $A \to C\langle ABCD\rangle$ a $B \to \langle\overline{ABCD}\rangle D$ (bod **II**). Následující větná forma bude mít tvar $\alpha C\langle ABCD\rangle\langle\overline{ABCD}\rangle D\beta$. Pár $\langle ABCD\rangle\langle\overline{ABCD}\rangle$ je redukován pomocí vlastností volné grupy, tedy výsledná větná forma je $\alpha CD\beta$. Všimněme si, že symboly typu $\langle ABCD\rangle$ a $\langle\overline{ABCD}\rangle$ mohou být odstraněny z větné formy jen a pouze pomocí vlastnosti volné grupy, neexistuje totiž žádné pravidlo, které by tyto nonterminální symboly přepsalo. Je tedy zřejmé, že v případě nekorektního průběhu simulace původní gramatiky získáme tyto symboly bez svých inverzních protějšků, nedokážeme je eliminovat a zablokují tak derivaci. Ostatní pravidla, která mají tvar bezkontextových pravidel, jsou gramatikou Γ převzata.

Tento princip je stejný i u E0L gramatik nad volnými grupami.

Zbývá dokázat, že jsou obě gramatiky ekvivalentní, tedy že platí rovnost $L(G) = L(\Gamma)$. Nutně potom také $L(G) \subseteq L(\Gamma) \wedge L(\Gamma) \subseteq L(G)$.

Dokažme nejprve první inkluzi, tedy $L(G) \subseteq L(\Gamma)$. Důkaz provedeme matematickou indukcí pro nějaké $i \geq 0$ na tvrzení $S \Rightarrow^i w$ v G implikuje $S \Rightarrow^{\circ *} w$ v Γ pro každé $w \in (N_G \cup \Sigma)^*$.

Nechť $i = 0$. Potom $w = S$ a tedy $S \Rightarrow^0 S$ v G. Jistě také $S \Rightarrow^{\circ 0} S$ v Γ.

Formulujme nyní *indukční hypotézu*. Předpokládejme, že výše uvedená implikace platí pro všechna $i \leq l$, kde l je nezáporné celé číslo.

Indukční krok bude následující: Uvažujme derivace tvaru $S \Rightarrow^{l+1} \beta$, kde $\beta \in (N_G \cup \Sigma)^*$. Přesněji si vyjádříme $S \Rightarrow^{l+1} \beta$ jako $S \Rightarrow^l \alpha \Rightarrow \beta$, kde $\alpha \in (N_G \cup \Sigma)^*$. Podle indukční hypotézy musí platit $S \Rightarrow^{\circ *} \alpha$ v Γ. Existují následující možnosti provedení derivačního kroku $\alpha \Rightarrow \beta$ v G.

(1) Nechť $A \to z \in P_G$, kde $A \in N_G$, $z \in \Sigma \cup \{Y\}$. Potom $\alpha = xAy \Rightarrow xzy = \beta$ v G, kde $x, y \in (N_G \cup \Sigma)^*$. Podle **I** taktéž $A \to z \in P_\Gamma$ a tedy $\alpha \Rightarrow^\circ \beta$ v Γ. Potom jistě také platí $S \Rightarrow^{\circ *} \alpha \Rightarrow^\circ \beta$ v Γ.

(2) Nechť $A \to BC \in P_G$, kde $A, B, C \in N_G$, $\alpha = xAy \Rightarrow xBCy = \beta$ v G, kde $x, y \in (N_G \cup \Sigma)^*$. Podle **I** taktéž $A \to BC \in P_\Gamma$ a tedy $\alpha \Rightarrow^\circ \beta$ v Γ. Potom určitě také platí $S \Rightarrow^{\circ *} \alpha \Rightarrow^\circ \beta$ v Γ.

(3) Nechť $AB \to CD \in P_G$, kde $A, B, C, D \in N_G$. Potom $\alpha = xABy \Rightarrow xCDy = \beta$ v G, kde $x, y \in (N_G \cup \Sigma)^*$. Podle **II** obsahuje P_Γ dvojici pravidel $A \to C\langle ABCD\rangle$ a $B \to \langle\overline{ABCD}\rangle D$. Jejich aplikací získáme v Γ derivaci $\alpha = xABy \Rightarrow^\circ xC\langle ABCD\rangle By \Rightarrow^\circ xC\langle ABCD\rangle\langle\overline{ABCD}\rangle Dy = xCDy = \beta$. Z toho je zřejmé, že také platí $S \Rightarrow^{\circ *} \alpha \Rightarrow^\circ \beta$ v Γ.

(4) Nechť $XY \to X \in P_G$, $\alpha = XYw \Rightarrow Xw = \beta$ v G, kde $w \in (N_G \cup \Sigma)^*$. Podle **III** obsahuje P_Γ dvojici pravidel $X \to X\langle XYX\rangle$ a $Y \to \langle\overline{XYX}\rangle$. Jejich aplikací získáme v Γ derivaci $\alpha = XYw \Rightarrow^\circ X\langle XYX\rangle Yw \Rightarrow^\circ X\langle XYX\rangle\langle\overline{XYX}\rangle w = Xw = \beta$. Z toho je též zřejmé, že platí $S \Rightarrow^{\circ *} \alpha \Rightarrow^\circ \beta$ v Γ.

(5) Nechť $X \to \epsilon \in P_G$, $\alpha = Xw \Rightarrow w = \beta$ v G, kde $w \in (N_G \cup \Sigma)^*$. Podle **IV** obsahuje P_Γ pravidlo $X \to \langle X\rangle\langle\overline{X}\rangle$. Jehož aplikací získáme v Γ derivaci $\alpha = Xw \Rightarrow^\circ \langle X\rangle\langle\overline{X}\rangle w = w = \beta$. I z tohoto je zřejmé, že platí $S \Rightarrow^{\circ *} \alpha \Rightarrow^\circ \beta$ v Γ.

Výše uvedené body (1) až (5) dokazují, že $L(G) \subseteq L(\Gamma)$. $\square$

Zbývá dokázat obrácenou inkluzi, tedy $L(\Gamma) \subseteq L(G)$. Důkaz provedeme opět indukcí pro nějaké $i \geq 0$. Tvrzení, které nyní musí platit je v tomto případě následující: $S \Rightarrow^{\circ i} w$ v Γ implikuje $S \Rightarrow^j w$ v G, kde $i \geq j$ a $w \in (N_G \cup N_{CS} \cup \Sigma)^*$.

Jako základ uvažujme $i = 0$. Potom $w = S$ a $S \Rightarrow^{\circ 0} S$ v Γ. Jistě také $S \Rightarrow^0 S$ v G a tvrzení tedy platí.

Formulujme nyní *indukční hypotézu.* Předpokládejme, že výše uvedená implikace platí pro nějaké $i \leq k$, kde k je nezáporné celé číslo.

Indukční krok vyjádříme derivací $S \Rightarrow^{\circ k} \alpha \Rightarrow^{\circ +} \beta \Rightarrow^{\circ *} \gamma$. Musíme uvažovat všechny možné varianty jak v Γ realizovat derivační krok $\alpha \Rightarrow^{\circ +} \gamma$. Kde $\alpha, \gamma \in (N_G \cup \Sigma)^*$ a $\beta \in (N_G \cup N_{CS} \cup \Sigma)^*$.

(1) Nechť $A \to z \in P_\Gamma$, kde $A \in N_G$ a $z \in \Sigma \cup \{Y\}$. Pak $\alpha = xAy \Rightarrow^\circ xzy = \beta$ v Γ, kde $x, y \in (N_G \cup N_{CS} \cup \Sigma)^*$. Podle **I** také $A \to z \in P_G$ a tedy $\alpha \Rightarrow \beta = \gamma$ v G. Celkově potom $S \Rightarrow^{\circ *} \beta = \gamma$ v Γ i v G a tvrzení tedy platí.

(2) Nechť $A \to BC \in P_\Gamma$, kde $A, B, C \in N_G$. Pak $\alpha = xAy \Rightarrow^\circ xBCy = \beta$ v Γ, kde $x, y \in (N_G \cup N_{CS} \cup \Sigma)^*$. Podle **I** také $A \to BC \in P_G$ a tedy $\alpha \Rightarrow \beta = \gamma$ v G. Celkově opět dostáváme $S \Rightarrow^{\circ *} \beta = \gamma$ v Γ i v G a tvrzení v tomto případě platí také.

(3) Nechť $A \to C\langle ABCD\rangle \in P_\Gamma$, $A, C \in N_G$ a $\langle ABCD\rangle \in N_{CS}$. Potom $\alpha = xAy \Rightarrow^\circ xC\langle ABCD\rangle y = \beta$, kde $x, y \in (N_G \cup N_{CS} \cup \Sigma)^*$. Protože se nonterminál $\langle ABCD\rangle$ nevyskytuje na pravé straně žádného přepisovacího pravidla v P_Γ a dokonce $\langle ABCD\rangle \notin N_G$ gramatiky G, nevznikne tímto derivačním krokem ani v jedné z gramatik věta tvořená pouze terminálními symboly. Navíc nonterminál $\langle ABCD \rangle$ může být z větné formy odstraněn pouze vygenerováním jeho inverzního protějšku buď zleva nebo zprava. Pokud by měl být generován zleva, musí být generován nonterminálem C. Podle **II** žádné pravidlo s nonterminálem C na levé straně a s nonterminálem $\langle \overline{ABCD} \rangle$ jako nejpravějším symbolem na pravé straně v množině pravidel P_Γ neexistuje. Tímto způsobem tedy pokračovat nelze. Uvažujme variantu, že řetězec x je tvaru $x = w\langle \overline{ABCD} \rangle$, kde $w \in (N_G \cup N_{CS} \cup \Sigma)^*$. Větná forma potom bude mít tvar $w\langle \overline{ABCD} \rangle C$ $\langle ABCD \rangle y$. Pro odstranění nonterminálů $\langle \overline{ABCD} \rangle$ a $\langle ABCD \rangle$ musíme odstranit nonterminál C, tedy muselo by platit, že $C \Rightarrow^{\circ *} \varepsilon$. V tomto případě musí podle lemma 6.1 existovat derivace $C \Rightarrow^{\circ *} Y^n$. Derivace v naší větné formě by tedy měla tento tvar $w\langle \overline{ABCD} \rangle C \langle ABCD \rangle y \Rightarrow^{\circ *} w\langle \overline{ABCD} \rangle Y^n \langle ABCD \rangle y$, kde $n \geq 1$. Podle **II** v kombinaci s lemma 6.1 existuje pro každý nonterminál $A \in N_G$ dvojice pravidel $A \rightarrow Y\langle AYYA \rangle$ a $Y \rightarrow \langle \overline{AYYA} \rangle A$, pomocí které zaměníme pozici symbolu A se symbolem Y. V tomto případě je ale $A = \langle \overline{ABCD} \rangle$. Z konstrukce však vyplývá, že nonterminály z N_{CS} se nevyskytují na levé straně žádného přepisovacího pravidla, tedy i tato derivace by nikdy nevedla k řetězci nonterminálů.

Uvažujme, že $y = u\langle \overline{ABCD} \rangle v$, kde $u, v \in (N_G \cup N_{CS} \cup \Sigma)^*$. Potom nastává obdobná situace jako v předchozím odstavci tohoto bodu, tedy musí platit $u \Rightarrow^{\circ *} \varepsilon$. Pak $u \Rightarrow^{\circ *}$ Y^n, kde $n \geq 1$ a odstranění symbolů Y je opět nerealizovatelné. Ani tento případ nevede k platné větě. Jedinou možností jak vygenerovat inverzní symbol $\langle \overline{ABCD} \rangle$ je bezprostředně vpravo od symbolu $\langle ABCD \rangle$. Jediné pravidlo, které to zajistí, je podle **II** $B \rightarrow \langle \overline{ABCD} \rangle D \in P_\Gamma$. Pak nutně musí platit, že $y = Bu$, kde $u \in (N_G \cup N_{CS} \cup \Sigma)^*$. Získáme posloupnost derivací $\alpha = xABu \Rightarrow^\circ xC\langle ABCD \rangle Bu = \beta \Rightarrow^\circ xC\langle ABCD \rangle \langle \overline{ABCD} \rangle Du = xCDu = \gamma$ v Γ. Podle **II** obsahuje G pravidlo $AB \rightarrow CD \in P_G$ a tedy také $\alpha \Rightarrow^{\circ +} \gamma$ v Γ a zároveň i $S \Rightarrow^+ \gamma$ v G. I v tomto případě naše tvrzení platí.

(4) Nechť $B \rightarrow \langle \overline{ABCD} \rangle D \in P_\Gamma$, $B, D \in N_G$ a $\langle ABCD \rangle \in N_{CS}$. Potom $\alpha = xBy \Rightarrow^\circ x\langle \overline{ABCD} \rangle Dy = \beta$, kde $x, y \in (N_G \cup N_{CS} \cup \Sigma)^*$. Situace je analogická jako v bodu **(3)**. Jediný způsob jak odstranit nonterminál $\langle \overline{ABCD} \rangle$ je vygenerovat odpovídající inverzní protějšek, v tomto případě tedy $\langle ABCD \rangle$, jako bezprostředního souseda. Zprava to zde nebude možné, protože nám v tom brání nonterminál D, ze kterého podle **II** nonterminál $\langle ABCD \rangle$ vygenerovat nelze. Ze stejného důvodu jako v bodu **(3)** by nebylo možné uplatnit vygenerování prázdného řetězce z D, neboť by se derivace zablokovala na nonterminálu Y. Jedinou možností je vygenerovat nonterminál $\langle ABCD \rangle$ zleva. Podle **II** ho lze vygenerovat pouze pomocí pravidla $A \rightarrow C\langle ABCD \rangle \in P_\Gamma$. Potom musí být $x = uA$, kde $u \in (N_G \cup N_{CS} \cup \Sigma)^*$. Získáme posloupnost derivací $\alpha = uABy \Rightarrow^\circ uA\langle \overline{ABCD} \rangle Dy = \beta \Rightarrow^\circ uC\langle ABCD \rangle \langle \overline{ABCD} \rangle Dy = uCDy = \gamma$ v Γ. Podle **II** obsahuje G pravidlo $AB \rightarrow CD$ a tedy $\alpha \Rightarrow^+ \gamma$ v G. Shrnutím do derivace určité délky získáváme $S \Rightarrow^{\circ +} \gamma$ v Γ a také $S \Rightarrow^+ \gamma$ v G. Platnost tvrzení nebyla ani v tomto případě porušena.

(5) Nechť $X \rightarrow X\langle XYX \rangle \in P_\Gamma$. Pokud se X vyskytuje v dané větné formě, je vždy prvním symbolem této větné formy (viz lemma 6.1). Potom $\alpha = Xy \Rightarrow^\circ X\langle XYX \rangle y = \beta$ v Γ, kde $y \in (N_G \cup N_{CS} \cup \Sigma)^*$. Opět jako v předchozích bodech, jediným způsobem jak odstranit nonterminál $\langle XYX \rangle \in N_{CS}$ je vygenerovat jeho inverzní protějšek, tedy $\langle \overline{XYX} \rangle$. V tomto případě je jediná možnost vygenerovat jej zprava, protože podle **III** ho derivuje jediné pravidlo $Y \rightarrow \langle \overline{XYX} \rangle$. Nutně tedy musí být $y = Yw$, kde

$w \in (N_G \cup N_{CS} \cup \Sigma)^*$. Získáme posloupnost derivací $\alpha = XYw \Rightarrow^\circ X\langle XYX\rangle Yw = \beta \Rightarrow^\circ X\langle XYX\rangle\langle\overline{XYX}\rangle w = Xw = \gamma$ v Γ. Podle **III** platí $XY \to X \in P_G$ a tedy $\alpha \Rightarrow^+ \gamma$ v Γ zároveň $S \Rightarrow^{\circ+} \gamma$ v G a tvrzení opět platí.

(6) Nechť $Y \to \langle\overline{XYX}\rangle \in P_\Gamma$. Dále $\alpha = xYy \Rightarrow^\circ x\langle\overline{XYX}\rangle y = \beta$ v Γ, kde $x, y \in (N_G \cup N_{CS} \cup \Sigma)^*$. Opět jako v předchozích bodech, jediným způsobem jak odstranit nonterminál $\langle\overline{XYX}\rangle \in N_{CS}$ je vygenerovat jeho inverzní protějšek, tedy $\langle XYX\rangle$. V tomto případě je jediná možnost vygenerovat jej zleva, protože podle **III** ho derivuje jediné pravidlo $X \to X\langle XYX\rangle$. Nutně tedy musí být $x = wX$, kde $w \in (N_G \cup N_{CS} \cup \Sigma)^*$. Získáme posloupnost derivací $\alpha = wXYy \Rightarrow^\circ wX\langle\overline{XYX}\rangle y = \beta \Rightarrow^\circ wX\langle XYX\rangle\langle\overline{XYX}\rangle y = wXy = \gamma$ v Γ. Podle **III** platí $XY \to X \in P_G$ a tedy $\alpha \Rightarrow^+ \gamma$ v G. Tvrzení opět platí.

(7) Nechť $X \to \langle X\rangle\langle\overline{X}\rangle \in P_\Gamma$. Pak $\alpha = xXy \Rightarrow^\circ xy = \beta$ v Γ, kde $x, y \in (N_G \cup N_{CS} \cup \Sigma)^*$. Podle **IV** také $X \to \varepsilon \in P_G$ a tedy $\alpha \Rightarrow^+ \beta = \gamma$ v G. Celkově potom $S \Rightarrow^{\circ+} \beta = \gamma$ v Γ i v G a tvrzení tedy platí.

Body **(1)** až **(7)** dokazují, že $L(\Gamma) \subseteq L(G)$. □

Dohromady tedy skutečně $L(G) = L(\Gamma)$. ■

6.1.4 Příklad konstrukce bezkontextové gramatiky nad volnou grupou

Pro lepší pochopení této kapitoly si uveďme příklad, ve kterém bude ukázána konstrukce **CF**$^\circ$ gramatiky vycházející z gramatiky typu 0, $G = \{N_G, \Sigma, P_G, S_G\}$, splňující lemma 6.1, kde

- $N_G = \{S_G, S, A, B, X, Y\}$,
- $\Sigma = \{a\}$,
- $P_G = \{$
  p_1: $S_G \to XS$,
  p_2: $S \to AB$,
  p_3: $AB \to SS$,
  p_4: $SY \to YS$,
  p_5: $AY \to YA$,
  p_6: $BY \to YB$,
  p_7: $A \to a$,
  p_8: $X \to \varepsilon$,
  p_9: $XY \to X$,
  p_{10}: $B \to Y\}$

Generování věty aa v této gramatice G může probíhat následovně:

$$S_G \Rightarrow XS[p_1] \Rightarrow XAB[p_2] \Rightarrow XSS[p_3] \Rightarrow XABS[p_2] \Rightarrow XABAB[p_2] \Rightarrow$$
$$XAYAB[p_{10}] \Rightarrow XYAAB[p_5] \Rightarrow XAAB[p_9] \Rightarrow XAAY[p_{10}] \Rightarrow XAYA[p_5] \Rightarrow$$
$$XYAA[p_5] \Rightarrow XAA[p_9] \Rightarrow XaA[p_7] \Rightarrow Xaa[p_7] \Rightarrow aa[p_8]$$

Konstrukce bezkontextové gramatiky nad volnou grupou Γ podle gramatiky typu 0, G, je následující:

$\Gamma = \{V, \Sigma, P_\Gamma, S_G\}$, $V = N_G \cup N_{CS} \cup \overline{N_G} \cup \Sigma$, kde

- $\overline{N_G} = \{\overline{S_G}, \overline{S}, \overline{A}, \overline{B}, \overline{X}, \overline{Y}, \overline{a}\}$,
- $N_{CS} = \{$
  $\langle ABSS\rangle$, $\langle\overline{ABSS}\rangle$, $\langle AYYA\rangle$, $\langle\overline{AYYA}\rangle$,
  $\langle BYYB\rangle$, $\langle\overline{BYYB}\rangle$, $\langle SYYS\rangle$, $\langle\overline{SYYS}\rangle$,
  $\langle XYX\rangle$, $\langle\overline{XYX}\rangle$, $\langle X\rangle$, $\langle\overline{X}\rangle\}$,
- $P_\Gamma = \{$
  p_1: $S_G \to XS$, podle kroku **I**
  p_2: $S \to AB$, podle kroku **I**
  p_3: $B \to Y$, podle kroku **I**
  p_4: $A \to S\langle ABSS\rangle$, podle kroku **II** - pravidlo $AB \to SS$
  p_5: $B \to \langle\overline{ABSS}\rangle S$, podle kroku **II** - pravidlo $AB \to SS$
  p_6: $A \to Y\langle AYYA\rangle$, podle kroku **II** - pravidlo $AY \to YA$
  p_7: $Y \to \langle\overline{AYYA}\rangle A$, podle kroku **II** - pravidlo $AY \to YA$
  p_8: $B \to Y\langle BYYB\rangle$, podle kroku **II** - pravidlo $BY \to YB$
  p_9: $Y \to \langle\overline{BYYB}\rangle B$, podle kroku **II** - pravidlo $BY \to YB$
  p_{10}: $S \to Y\langle SYYS\rangle$, podle kroku **II** - pravidlo $SY \to YS$
  p_{11}: $Y \to \langle\overline{SYYS}\rangle S$, podle kroku **II** - pravidlo $SY \to YS$
  p_{12}: $X \to X\langle XYX\rangle$, podle kroku **III** - pravidlo $XY \to X$
  p_{13}: $Y \to \langle\overline{XYX}\rangle$, podle kroku **III** - pravidlo $XY \to X$
  p_{14}: $X \to \langle X\rangle\langle\overline{X}\rangle$, podle kroku **VI** - pravidlo $X \to \varepsilon$
  p_{15}: $A \to a\}$ podle kroku **I**

Konstrukce Γ je kompletní, zbývá ukázat přijetí věty aa:

$$S_G \Rightarrow^\circ XS[p_1] \Rightarrow^\circ XAB[p_2] \Rightarrow^\circ XS\langle ABSS\rangle B[p_4] \Rightarrow^\circ XS\langle ABSS\rangle\langle\overline{ABSS}\rangle S[p_5] = XSS \Rightarrow^\circ$$
$$XABS[p_2] \Rightarrow^\circ XABAB[p_2] \Rightarrow^\circ XAYAB[p_3] \Rightarrow^\circ XY\langle AYYA\rangle YAB[p_6] \Rightarrow^\circ$$
$$XY\langle AYYA\rangle\langle\overline{AYYA}\rangle AAB[p_7] = XYAAB \Rightarrow^\circ$$
$$X\langle XYX\rangle YAAB[p_{12}] \Rightarrow^\circ X\langle XYX\rangle\langle\overline{XYX}\rangle AAB[p_{13}] = XAAB \Rightarrow^\circ$$
$$XAAY[p_3] \Rightarrow^\circ XAY\langle AYYA\rangle Y[p_6] \Rightarrow^\circ XAY\langle AYYA\rangle\langle\overline{AYYA}\rangle A[p_7] = XAYA \Rightarrow^\circ$$
$$XY\langle AYYA\rangle YA[p_6] \Rightarrow^\circ XY\langle AYYA\rangle\langle\overline{AYYA}\rangle AA[p_7] = XYAA \Rightarrow^\circ$$
$$X\langle XYX\rangle YAA[p_{12}] \Rightarrow^\circ X\langle XYX\rangle\langle\overline{XYX}\rangle AA[p_{13}] = XAA \Rightarrow^\circ$$
$$XAa[p_{15}] \Rightarrow^\circ Xaa[p_{15}] \Rightarrow^\circ \langle X\rangle\langle\overline{X}\rangle aa[p_{14}] = aa$$

Všimněme si, že pokud aplikujeme pouze jedno z pravidel simulující pravidla tvaru $AB \to CD$ bez toho, aniž bychom k této aplikaci připojili druhé pravidlo potřebné k simulaci, derivace se zablokuje. Tento stav znázorňuje následující příklad:

$$S_G \Rightarrow^\circ XS[p_1] \Rightarrow^\circ XAB[p_2] \Rightarrow^\circ XS\langle ABSS\rangle B[p_4] \Rightarrow^\circ XS\langle ABSS\rangle Y[p_3] \Rightarrow^\circ$$

$$\langle X\rangle\langle\overline{X}\rangle S\langle ABSS\rangle Y[p_{14}] = S\langle ABSS\rangle Y$$

Nonterminálu $\langle ABSS\rangle$ se již nelze zbavit. Derivace je zablokována, protože pro nonterminály z množiny N_{CS} neexistují žádná přepisovací pravidla, tyto nonterminály lze eliminovat pouze za využití vlastností volné grupy.

Na závěr ještě uveďme situaci, ve které si objasníme proč vlastně musí originální gramatika, podle které se provádí konstrukce, splňovat podmínky popsané v lemma 6.1. Toto lemma nám zajistí, aby se obě pravidla simulující pravidlo tvaru $AB \rightarrow CD$ provedla ve správném pořadí. Pokud by byla pravidla tvaru $A \rightarrow \varepsilon$ povolena, mohlo by dojít k následující situaci:

Uvažujme $\mathbf{CF}^{\circ}$ gramatiku, obsahující pravidla
p_1: $A \rightarrow C\langle ABCD\rangle$,
p_2: $B \rightarrow \langle\overline{ABCD}\rangle D$,
p_3: $C \rightarrow \varepsilon$
p_4: $D \rightarrow \varepsilon$

Pravidla p_1 a p_2 simulují pravidlo $AB \rightarrow CD$.

$$BA \Rightarrow^{\circ} BC\langle ABCD\rangle[p_1] \Rightarrow^{\circ} \langle\overline{ABCD}\rangle DC\langle ABCD\rangle[p_2] \Rightarrow^{\circ}$$

$$\langle\overline{ABCD}\rangle D\langle ABCD\rangle[p_3] \Rightarrow^{\circ} \langle\overline{ABCD}\rangle\langle ABCD\rangle[p_4] = \varepsilon$$

Jak můžeme vidět, pravidla tvaru $A \rightarrow \varepsilon$ odstraní nonterminály, které oddělují vzájemně inverzní symboly. Nahrazením pravidel $A \rightarrow \varepsilon$ pravidly tvaru $A \rightarrow Y$ se tomuto problému snadno vyhneme.

6.2 E0L gramatiky nad volnými grupami

Druhá modifikace se bude týkat E0L gramatik. Konstrukce bude velmi podobná, proto bude popsána stručněji. Důvodem proč byly zvoleny E0L gramatiky, je jejich paralelní přístup k derivování větných forem a dále jsme jejich pomocí získali lepší výsledky v oblasti redukce nonterminálů.

Spojením E0L gramatiky a volné grupy generované totální abecedou této gramatiky získáme E0L gramatiku nad volnou grupou, kterou si nyní definujeme.

Tato problematika byla blíže popsána v [8].

Definice 6.2.4 *E0L gramatika nad volnou grupou* (zkráceně $\mathbf{E0L}^{\circ}$) je čtveřice $\Gamma = (V, \Sigma, P, w)$, kde V a Σ má stejný význam jako v E0L gramatikách. Dále $w \in V^{\circ}$ a P je konečná množina pravidel tvaru $X \rightarrow x$, kde $X \in V$ a $x \in V^*$.

Pro úplnost definujeme relaci přímé derivace $\Rightarrow_{\Gamma}^{\circ}$.

6.2.1 Derivace v E0L gramatice nad volnou grupou

Definice 6.2.5 Nechť $\Gamma = (V, \Sigma, P, w)$ je E0L gramatika nad volnou grupou, kde $V = N \cup \Sigma$. Nechť λ a μ jsou řetězce z V°. Mezi řetězci λ a μ platí relace $\Rightarrow_{\Gamma}^{\circ}$, nazývaná *přímá derivace*, jestliže můžeme řetězce λ a μ vyjádřit ve tvaru:

$$\lambda = x_1 x_2 \dots x_n$$

$$\mu = y_1 y_2 \dots y_n$$

$$x_i \in V, \quad y_i \in V^\circ \text{ a } x_i \to y_i \in P \text{ pro } 1 \leq i \leq n.$$

Platí-li mezi řetězci λ a μ relace přímé derivace, pak píšeme $\lambda \Rightarrow_\Gamma^\circ \mu$ a říkáme, že řetězec μ lze přímo generovat z řetězce λ v E0L gramatice nad volnou grupou Γ.

Poznámka *Tranzitivní uzávěr* $\Rightarrow_\Gamma^{\circ+}$, *reflexivní a tranzitivní uzávěr* $\Rightarrow_\Gamma^{\circ*}$ a derivace délky $n \Rightarrow_\Gamma^{\circ n}$ jsou definovány zcela přirozeně stejným způsobem jako v případě E0L gramatik.

6.2.2 Jazyk generovaný E0L gramatikou nad volnou grupou

Definice 6.2.6 Nechť $\Gamma = (V, \Sigma, P, w)$ je E0L gramatika nad volnou grupou, kde $V = N \cup \Sigma$. Řetězec $\alpha \in V^\circ$ nazýváme *větnou formou*, jestliže platí $w \Rightarrow^{\circ*} \alpha$, tj. řetězec α je generovatelný z výchozího řetězce w. Větná forma, která obsahuje pouze terminální symboly, se nazývá *věta*. *Jazyk* $L(\Gamma)$, generovaný E0L gramatikou nad volnou grupou, je definován množinou všech vět

$$L(\Gamma) = \{u \mid w \Rightarrow^{\circ*} u, u \in \Sigma^*\}$$

generovatelných z výchozího řetězce této gramatiky.

6.2.3 Generativní schopnosti E0L gramatik nad volnými grupami

Nyní se budeme zabývat generativní schopností nově zavedené struktury. Cílem je dokázat, že pro každou gramatiku H typu 0 existuje ekvivalentní E0L gramatika nad volnou grupou Γ taková, že $L(H) = L(\Gamma)$.

Je tedy nutné opět sestrojit algoritmus transformace gramatik typu 0 na E0L gramatiky nad volnými grupami.

Poznámka Připomeňme, že podle zavedených konvencí z teorie formálních jazyků je třída všech jazyků typu 0 značena symbolem **RE**. Označme **E0L**$^\circ$ třídu všech jazyků generovaných E0L gramatikami nad volnými grupami.

V tuto chvíli již máme definováno vše potřebné a můžeme si tedy vyslovit následující větu.

Věta 6.2.3 E0L$^\circ$=RE

Jinými slovy tato věta říká, že pro každou gramatiku G typu 0 existuje ekvivalentní E0L gramatika nad volnou grupou Γ taková, že $L(G) = L(\Gamma)$.

Důkaz 6.2.3 Předpokládejme, že $G = (N_G, \Sigma, P_G, S)$ je gramatika typu 0 podle lemma 6.1.

E0L gramatiku nad volnou grupou $\Gamma = (V, \Sigma, P_\Gamma, w_\Gamma)$, kde $V = \Sigma \cup N_\Gamma$, $N_\Gamma = N_G \cup N_{CS} \cup \overline{N_G}$ a $w_\Gamma = S$ sestrojíme následovně:

I pokud $A \to x \in P_G$,
kde $x \in (N_G^2 \cup \{Y\} \cup \Sigma), A \in N_G$,
potom přidej $A \to x$ do P_Γ

II pokud $AB \rightarrow CD \in P$,
kde $A, B, C, D \in N_G$,
potom přidej $A \rightarrow C\langle ABCD\rangle$,
$B \rightarrow \langle\overline{ABCD}\rangle D$ do P_Γ
a $\langle ABCD\rangle, \langle\overline{ABCD}\rangle$ přidej do N_{CS}

III pro $XY \rightarrow X \in P_G$
přidej $X \rightarrow X\langle XYX\rangle$,
$Y \rightarrow \langle\overline{XYX}\rangle$ do P_Γ
a $\langle XYX\rangle, \langle\overline{XYX}\rangle$ přidej do N_{CS}

IV pro $X \rightarrow \varepsilon \in P_G$
přidej $X \rightarrow \langle X\rangle\langle\overline{X}\rangle$ do P_Γ
a $\langle X\rangle, \langle\overline{X}\rangle$ přidej do N_{CS}

V pro $Z \in N_G \cup \Sigma$
přidej $\overline{Z}$ do $\overline{N_G}$

VI pro každé $z \in V$
přidej $z \rightarrow z$ do P_Γ

Tím je konstrukce Γ hotova.

Množina $\overline{N_G}$ obsahuje inverzní symboly k symbolům z množiny $N_G \cup \Sigma$, tzn. které nejsou obsaženy v množině N_{CS}. Tato množina inverzních symbolů pouze doplňuje V na generátor volné grupy. Množina N_{CS} obsahuje nezbytně nutné nonterminály a jejich inverzní protějšky, které jsou potřeba pro další kroky důkazu a které se týkají kontextových přepisovacích pravidel.

Zbývá dokázat, že jsou obě gramatiky ekvivalentní, tedy že platí rovnost $L(G) = L(\Gamma)$. Nutně potom také $L(G) \subseteq L(\Gamma) \wedge L(\Gamma) \subseteq L(G)$.

Dokažme nejprve první inkluzi, tedy $L(G) \subseteq L(\Gamma)$. Důkaz provedeme matematickou indukcí pro nějaké $i \geq 0$ na tvrzení $S \Rightarrow^i w$ v G implikuje $S \Rightarrow^{\circ *} w$ v Γ pro každé $w \in (N_G \cup \Sigma)^*$.

Nechť $i = 0$. Potom $w = S$ a tedy $S \Rightarrow^0 S$ v G. Jistě také $S \Rightarrow^{\circ 0} S$ v Γ.

Indukční hypotéza: Předpokládejme, že výše uvedená implikace platí pro všechna $i \leq l$, kde l je nezáporné celé číslo.

Indukční krok: Uvažujme derivace tvaru $S \Rightarrow^{l+1} \beta$, kde $\beta \in (N_G \cup \Sigma)^*$. Přesněji si vyjádříme $S \Rightarrow^{l+1} \beta$ jako $S \Rightarrow^l \alpha \Rightarrow \beta$, kde $\alpha \in (N_G \cup \Sigma)^*$. Podle indukční hypotézy musí platit $S \Rightarrow^{\circ *} \alpha$ v Γ. Existují následující možnosti provedení derivačního kroku $\alpha \Rightarrow \beta$ v G.

(1) Nechť $\alpha = xuy \Rightarrow xvy = \beta$ v G, kde $x, y \in (N_G \cup \Sigma)^*$ a $u \rightarrow v \in P_G$. Předpokládejme, že platí $u \Rightarrow v$ v G a $u \Rightarrow^\circ v$ v Γ - bude dokázáno v krocích (2) až (5).
Zaměřme se na části věty x a y, které se během derivačního kroku $\alpha \Rightarrow \beta$ nemění. V **E0L**$^\circ$ gramatice se musí v každém derivačním kroku přepsat každý symbol větné formy. Nezměněnost částí x a y v derivaci $xuv \Rightarrow^\circ xvy$ zajistí pravidla tvaru $z \rightarrow z$, $|z| = 1$, sestrojená v kroku **VI**.

(2) Nechť $A \rightarrow z \in P_G$, $\alpha = xAy$, $\beta = xzy$, $x, y \in (N_G \cup \Sigma)^*$, $z \in (N_G^2 \cup \{Y\} \cup \Sigma)$, $A \in N_G$. Podle **I**, také $A \rightarrow z \in P_\Gamma$. Je zřejmé, že platí $S \Rightarrow^{\circ *} \alpha \Rightarrow^\circ \beta$ také v Γ.

(3) Nechť $AB \rightarrow CD \in P_G$, $\alpha = xABy$, $\beta = xCDy$, $x, y \in (N_G \cup \Sigma)^*$, $A, B, C, D \in N_G$. Podle **II** jsou pro pravidla typu $AB \rightarrow CD$ vytvořena dvě pravidla $A \rightarrow C\langle ABCD \rangle$ a $B \rightarrow \langle \overline{ABCD} \rangle D$. Potom $xABy \Rightarrow^\circ xC\langle ABCD \rangle By \Rightarrow^\circ xC\langle ABCD \rangle \langle \overline{ABCD} \rangle Dy \Rightarrow^\circ xCDy$. Tedy platí také $S \Rightarrow^{\circ *} \alpha \Rightarrow^\circ \beta$ v Γ.

(4) Nechť $XY \rightarrow X \in P_G$, $\alpha = XYy$, $\beta = Xy$, $y \in (N_G \cup \Sigma)^*$. Podle **III** je pro pravidlo $XY \rightarrow X$ vytvořena skupina pravidel $X \rightarrow X\langle XYX \rangle$ a $Y \rightarrow \langle \overline{XYX} \rangle$. Potom $XYy \Rightarrow^\circ X\langle XYX \rangle Yy \Rightarrow^\circ X\langle XYX \rangle \langle \overline{XYX} \rangle y \Rightarrow^\circ Xy$. Zřejmě též platí $S \Rightarrow^{\circ *} \alpha \Rightarrow^\circ \beta$ v Γ.

(5) Nechť $X \rightarrow \varepsilon \in P_G$, $\alpha = Xy$, $\beta = y$, $y \in (N_G \cup \Sigma)^*$. Podle **IV** je pro pravidlo $X \rightarrow \varepsilon$ vytvořeno pravidlo $X \rightarrow \langle X \rangle \langle \overline{X} \rangle$. Potom $Xy \Rightarrow^\circ \langle X \rangle \langle \overline{X} \rangle y \Rightarrow^\circ y$. A tedy platí také $S \Rightarrow^{\circ *} \alpha \Rightarrow^\circ \beta$ v Γ.

Výše uvedené body (1) až (5) dokazují, že $L(G) \subseteq L(\Gamma)$. □

Zbývá dokázat obrácenou inkluzi $L(\Gamma) \subseteq L(G)$. Důkaz provedeme opět indukcí pro nějaké $i \geq 0$. Tvrzení, které nyní musí platit je v tomto případě následující: $S \Rightarrow^{\circ i} w$ v Γ implikuje $S \Rightarrow^j$ v G, kde $i \geq j$ a $w \in (N_\Gamma \cup \Sigma)^*$.

Nechť $i = 0$. Potom $w = S$ a $S \Rightarrow^{\circ 0} S$ v Γ a stejně tak $S \Rightarrow^0 S$ v G.

Indukční hypotéza: Pro $S \Rightarrow^{\circ i} w$ předpokládejme, že $i \leq k$, kde k je celé nezáporné číslo.

Indukční krok: Vyjádříme derivací $S \Rightarrow^{\circ k} \alpha \Rightarrow^{\circ +} \beta \Rightarrow^{\circ *} \gamma$. Musíme uvažovat všechny možné varianty jak v Γ realizovat derivační krok $\alpha \Rightarrow^{\circ +} \gamma$. Kde $\alpha, \gamma \in (N_G \cup N_{CS} \cup \Sigma)^*$ a $\beta \in (N_G \cup \Sigma)^*$.

(1) Nechť $z \rightarrow z \in P_\Gamma$ (vytvořené podle kroku **VI**), $z \in (N_G \cup \Sigma)$, $\alpha = xzy$, $\beta = xzy$, $x, y \in (N_G \cup N_{CS} \cup \Sigma)^*$ a $\alpha \Rightarrow^\circ \beta$ v Γ. V gramatice G tomuto derivačnímu kroku odpovídá krok $xzy \Rightarrow^0 xzy$. Tedy $\alpha \Rightarrow \beta$ také v G.

(2) Nechť $A \rightarrow z \in P_\Gamma$, $\alpha = xAy$, $\beta = xzy$, $x, y \in (N_G \cup N_{CS} \cup \Sigma)^*$, $z \in (N_G^2 \cup \{Y\} \cup \Sigma)$, $A \in N_G$. Také $A \rightarrow z \in P_G$ a tedy také platí $S \Rightarrow^* \alpha \Rightarrow \beta = \gamma$ v G.

(3) Nechť $A \rightarrow C\langle ABCD \rangle \in P_\Gamma$, $\alpha = xAy$, $\beta = xC\langle ABCD \rangle y$, $x, y \in (N_G \cup N_{CS} \cup \Sigma)^*$, $\langle ABCD \rangle \in N_{CS}$, $A, C \in N_G$. Zaměřme se na nonterminál $\langle ABCD \rangle$, nevyskytuje se na žádné levé straně přepisovacího pravidla z P_Γ. Abychom dosáhli věty jazyka, musíme ho eliminovat. Zde se využije vlastností volné grupy. Konkatenací s inverzním symbolem $\langle \overline{ABCD} \rangle$ získáme neutrální symbol ε. Přesněji $\langle ABCD \rangle \langle \overline{ABCD} \rangle = \langle \overline{ABCD} \rangle \langle ABCD \rangle = \varepsilon$. Musíme tedy jako souseda k $\langle ABCD \rangle$ z levé nebo pravé strany

získat nonterminál $\langle\overline{ABCD}\rangle$. Nonterminál $\langle\overline{ABCD}\rangle$ se vyskytuje pouze v jediném přepisovacím pravidle a to $B \to \langle\overline{ABCD}\rangle D \in P_\Gamma$ (viz. konstrukce gramatiky Γ krok **II**). Uvažujme, že $C = B$ a provedeme následující sled derivací $xAy \Rightarrow^\circ xC\langle ABCD\rangle y \Rightarrow^\circ x\langle\overline{ABCD}\rangle D\langle ABCD\rangle y$. Mezi nonterminály $\langle ABCD\rangle$ a $\langle\overline{ABCD}\rangle$ je jediný nonterminál D, který potřebujeme odstranit. K tomuto účelu můžeme použit pouze pravidla typu $A \to Y,\ \ A \in N_G$ simulující pravidla tvaru $A \to \varepsilon$. Získáme tedy místo nonterminálu D nonterminál Y a větná forma je $x\langle\overline{ABCD}\rangle Y\langle ABCD\rangle y$. Nonterminál Y můžeme přesunout na začátek větné formy a tam ho přepsat na ε (viz. **II** a **III**). K přesunutí Y lze použit pouze pravidel tvaru $A \to Y\langle AYYA\rangle$, $Y \to \langle\overline{AYYA}\rangle A$ kde $A \in N_G$. V našem případě by nonterminálem A byl nonterminál $\langle\overline{ABCD}\rangle$, ten ovšem nenáleží do N_G, ale do N_{CS} a proto pro něj nejsou pravidla tvaru $A \to Y\langle AYYA\rangle$, $Y \to \langle\overline{AYYA}\rangle A$ definována. V tomto případě nedokážeme pomocí vlastností volné grupy eliminovat nonterminál $\langle ABCD\rangle$. Pokud vygenerujeme inverzní nonterminál $\langle\overline{ABCD}\rangle$ na libovolné pozici v x, dojde k podobné situaci (mezi $\langle ABCD\rangle$ a $\langle\overline{ABCD}\rangle$ bude více než jeden symbol).

Nyní se zaměřme na pravou stranu y. Nechť $y = Zw$, $Z \in (N_G \cup N_{CS} \cup \Sigma)$, $w \in (N_G \cup N_{CS} \cup \Sigma)^*$. Předpokládejme, že inverzní symbol $\langle\overline{ABCD}\rangle$ bude vygenerován na libovolném místě v řetězci w. Vždy bude mezi $\langle ABCD\rangle$ a $\langle\overline{ABCD}\rangle$ symbol Z, který opět nelze odstranit (viz. výše).

Zbývá tedy jediná možnost, vygenerovat $\langle\overline{ABCD}\rangle$ ze symbolu Z (tedy $Z = B \in N_G$). Získáme $xC\langle ABCD\rangle\langle\overline{ABCD}\rangle Dw \Rightarrow^\circ xCDw$. Tedy $\alpha = xABw \Rightarrow^\circ xC\langle ABCD\rangle Bw = \beta \Rightarrow^\circ xC\langle ABCD\rangle\langle\overline{ABCD}\rangle Dw \Rightarrow^\circ xCDw = \gamma$. V gramatice G podle **II** existuje pravidlo $AB \to CD$, pomocí kterého platí také $S \Rightarrow^* \alpha = xABw \Rightarrow xCDw = \gamma$ v G.

(4) Nechť $B \to \langle\overline{ABCD}\rangle D \in P_\Gamma$, $\alpha = xBy$, $\beta = x\langle\overline{ABCD}\rangle Dy$, $x, y \in (N_G \cup N_{CS} \cup \Sigma)^*$, $\langle\overline{ABCD}\rangle \in N_{CS}$, $B, D \in N_G$. Situace je analogická s případem (2). Opět podle **II** musí existovat pravidlo $A \to C\langle ABCD\rangle \in P_\Gamma$ s inverzním nonterminálem $\langle ABCD\rangle \in N_{CS}$. Jediná možnost jak eliminovat $\langle\overline{ABCD}\rangle$ je vygenerování $\langle ABCD\rangle$ na poslední pozici v řetězci x. Nechť $x = wZ$, $w \in (N_G \cup N_{CS} \cup \Sigma)^*$ a $Z = A \in N_G$, potom $\alpha = wABy \Rightarrow^\circ wA\langle\overline{ABCD}\rangle Dy = \beta \Rightarrow^\circ wC\langle ABCD\rangle\langle\overline{ABCD}\rangle Dy \Rightarrow^\circ wCDy = \gamma$. V gramatice G podle **II** existuje pravidlo $AB \to CD$, pomocí kterého také platí $S \Rightarrow^* \alpha = wABy \Rightarrow wCDy = \gamma$.

(5) Nechť $X \to X\langle XYX\rangle \in P_\Gamma$, $\alpha = Xy$, $\beta = X\langle XYX\rangle y$, $y \in (N_G \cup N_{CS} \cup \Sigma)^*$, $\langle XYX\rangle \in N_{CS}$. Abychom opět eliminovali nonterminál $\langle XYX\rangle$, který se nenachází na žádné levé straně přepisovacího pravidla z P_Γ, musíme využít vlastnosti volné grupy. Z konstrukce Γ (krok **III**) víme, že jediný výskyt inverzního nonterminálu $\langle\overline{XYX}\rangle \in N_{CS}$ nalezneme v pravidle $Y \to \langle\overline{XYX}\rangle$. Tento inverzní symbol je možné vygenerovat pouze na nějaké pozici v y. Nechť $y = Zw, Z \in (N_G \cup N_{CS} \cup \Sigma), w \in (N_G \cup N_{CS} \cup \Sigma)^*$. Předpokládejme, že $\langle\overline{XYX}\rangle$ získáme na libovolné pozici v řetězci w. Potom mezi $\langle XYX\rangle$ a $\langle\overline{XYX}\rangle$ bude minimálně jeden symbol Z. Nechť $Z = Y$, pak existují pravidla typu $A \to Y\langle AYYA\rangle$, $Y \to \langle\overline{AYYA}\rangle A, A \in N_G$, která nám přesunou Y o jednu pozici doleva. K přesunu je zapotřebí, aby levým sousedem Y byl nonterminál $A \in N_G$. Ve zkoumané větné formě ovšem máme $X\langle XYX\rangle Yw$. Nonterminál $\langle XYX\rangle$ nenáleží do N_G, ale do N_{CS} a proto pro něj nejsou pravidla tvaru $A \to Y\langle AYYA\rangle$, $Y \to \langle\overline{AYYA}\rangle A$ definována a nonterminál $\langle XYX\rangle$ nelze odstranit.

Zbývá jediná možnost, vygenerovat $\langle\overline{XYX}\rangle$ ze symbolu Z (tedy $Z = Y$). Získáme

$X\langle XYX\rangle\langle\overline{XYX}\rangle w \Rightarrow^\circ Xw$. Tedy $\alpha = XYw \Rightarrow^\circ X\langle XYX\rangle Yw = \beta \Rightarrow^\circ X\langle XYX\rangle\langle\overline{XYX}\rangle w \Rightarrow^\circ Xw = \gamma$. V gramatice G existuje pravidlo $XY \to X$, pomocí kterého platí také $S \Rightarrow^* \alpha = XYw \Rightarrow Xw = \gamma$ v G.

(6) Nechť $Y \to \langle\overline{XYX}\rangle \in P_\Gamma$, $\alpha = xYy$, $\beta = x\langle\overline{XYX}\rangle y$, $x, y \in (N_G \cup N_{CS} \cup \Sigma)^*$, $\langle\overline{XYX}\rangle \in N_{CS}$. Situace je analogická s případem (4). Opět podle **III** musí existovat pravidlo $X \to X\langle XYX\rangle \in P_\Gamma$ s inverzním nonterminálem $\langle XYX\rangle \in N_{CS}$. Jediná možnost jak eliminovat $\langle\overline{XYX}\rangle$ je vygenerování $\langle XYX\rangle$ na poslední pozici v řetězci x. Nechť $x = wZ$, $Z \in (N_G \cup N_{CS} \cup \Sigma)$, $w \in (N_G \cup N_{CS} \cup \Sigma)^*$ a $Z = X$ potom $\alpha = wXYy \Rightarrow^\circ wX\langle\overline{XYX}\rangle y = \beta \Rightarrow^\circ wX\langle XYX\rangle\langle\overline{XYX}\rangle Xy \Rightarrow^\circ wXy = \gamma$. V gramatice G existuje pravidlo $XY \to X$, pomocí kterého platí také $S \Rightarrow^* \alpha = wXYy \Rightarrow wXy = \gamma$ v G.

(7) Nechť $X \to \langle X\rangle\langle\overline{X}\rangle \in P_\Gamma$, $\alpha = xXy$, $\beta = xy$, $x, y \in (N_G \cup N_{CS} \cup \Sigma)^*$, $A \in N_G$, $\langle X\rangle, \langle\overline{X}\rangle \in N_{CS}$. Potom $X \to \varepsilon \in P_G$ a tedy platí $S \Rightarrow^* \alpha \Rightarrow \beta = \gamma$ i v G.

Body **(1)** až **(7)** dokazují, že $L(\Gamma) \subseteq L(G)$. □

Dohromady tedy skutečně $L(G) = L(\Gamma)$. ■

Obě konstrukce jsou si velmi podobné (stejné až na bod **VI** a definici startovacího řetězce/nonterminálu), přesto se oba modely značně liší a to v definici přímé derivace. Bezkontextové gramatiky nad volnou grupou pracují sekvenčně a E0L gramatiky nad volnou grupou přepisují v každém kroku všechny symboly větné formy.

6.2.4 Příklad konstrukce E0L gramatiky nad volnou grupou

Pro lepší pochopení i této kapitoly si uveďme také příklad, ve kterém bude ukázána konstrukce **E0L°** gramatiky vycházející z gramatiky typu 0, $G = \{N_G, \Sigma, P_G, S_G\}$, představené již v předchozí kapitole a splňující lemma 6.1, kde

- $N_G = \{S_G, S, A, B, X, Y\}$,
- $\Sigma = \{a\}$,
- $P_G = \{$
  p_1: $S_G \to XS$,
  p_2: $S \to AB$,
  p_3: $AB \to SS$,
  p_4: $SY \to YS$,
  p_5: $AY \to YA$,
  p_6: $BY \to YB$,
  p_7: $A \to a$,
  p_8: $X \to \varepsilon$,
  p_9: $XY \to X$,
  p_{10}: $B \to Y\}$

Generování věty aa v této gramatice G může probíhat opět následovně:

$$S_G \Rightarrow XS[p_1] \Rightarrow XAB[p_2] \Rightarrow XSS[p_3] \Rightarrow XABS[p_2] \Rightarrow XABAB[p_2] \Rightarrow$$

$$XAYAB[p_{10}] \Rightarrow XYAAB[p_5] \Rightarrow XAAB[p_9] \Rightarrow XAAY[p_{10}] \Rightarrow XAYA[p_5] \Rightarrow$$
$$XYAA[p_5] \Rightarrow XAA[p_9] \Rightarrow XaA[p_7] \Rightarrow Xaa[p_7] \Rightarrow aa[p_8]$$

Konstrukce E0L gramatiky nad volnou grupou Γ podle gramatiky typu 0, G, je následující:

$\Gamma = \{V, \Sigma, P_\Gamma, w_\Gamma\}$, $V = N_G \cup N_{CS} \cup \overline{N_G} \cup \Sigma$, kde

- $w_\Gamma = S_G$
- $\overline{N_G} = \{\overline{S_G}, \overline{S}, \overline{A}, \overline{B}, \overline{X}, \overline{Y}, \overline{a}\}$,
- $N_{CS} = \{$
  $\langle ABSS \rangle$, $\langle \overline{ABSS} \rangle$, $\langle AYYA \rangle$, $\langle \overline{AYYA} \rangle$,
  $\langle BYYB \rangle$, $\langle \overline{BYYB} \rangle$, $\langle SYYS \rangle$, $\langle \overline{SYYS} \rangle$,
  $\langle XYX \rangle$, $\langle \overline{XYX} \rangle$, $\langle X \rangle$, $\langle \overline{X} \rangle\}$,
- $P_\Gamma = \{$

p_1:	$S_G \rightarrow XS$,	podle kroku **I**
p_2:	$S \rightarrow AB$,	podle kroku **I**
p_3:	$B \rightarrow Y$,	podle kroku **I**
p_4:	$A \rightarrow S\langle ABSS \rangle$,	podle kroku **II** - pravidlo $AB \rightarrow SS$
p_5:	$B \rightarrow \langle \overline{ABSS} \rangle S$,	podle kroku **II** - pravidlo $AB \rightarrow SS$
p_6:	$A \rightarrow Y\langle AYYA \rangle$,	podle kroku **II** - pravidlo $AY \rightarrow YA$
p_7:	$Y \rightarrow \langle \overline{AYYA} \rangle A$,	podle kroku **II** - pravidlo $AY \rightarrow YA$
p_8:	$B \rightarrow Y\langle BYYB \rangle$,	podle kroku **II** - pravidlo $BY \rightarrow YB$
p_9:	$Y \rightarrow \langle \overline{BYYB} \rangle B$,	podle kroku **II** - pravidlo $BY \rightarrow YB$
p_{10}:	$S \rightarrow Y\langle SYYS \rangle$,	podle kroku **II** - pravidlo $SY \rightarrow YS$
p_{11}:	$Y \rightarrow \langle \overline{SYYS} \rangle S$,	podle kroku **II** - pravidlo $SY \rightarrow YS$
p_{12}:	$X \rightarrow X\langle XYX \rangle$,	podle kroku **III** - pravidlo $XY \rightarrow X$
p_{13}:	$Y \rightarrow \langle \overline{XYX} \rangle$,	podle kroku **III** - pravidlo $XY \rightarrow X$
p_{14}:	$X \rightarrow \langle X \rangle \langle \overline{X} \rangle$,	podle kroku **VI** - pravidlo $X \rightarrow \varepsilon$
p_{15}:	$A \rightarrow a$,	podle kroku **I**

p_{16}:	$a \rightarrow a$,	podle kroku **VI**
p_{17}:	$\overline{a} \rightarrow \overline{a}$,	podle kroku **VI**
p_{18}:	$A \rightarrow A$,	podle kroku **VI**
p_{19}:	$\overline{A} \rightarrow \overline{A}$,	podle kroku **VI**
p_{20}:	$B \rightarrow B$,	podle kroku **VI**
p_{21}:	$\overline{B} \rightarrow \overline{B}$,	podle kroku **VI**
p_{22}:	$S \rightarrow S$,	podle kroku **VI**
p_{23}:	$\overline{S} \rightarrow \overline{S}$,	podle kroku **VI**
p_{24}:	$S_G \rightarrow S_G$,	podle kroku **VI**
p_{25}:	$\overline{S_G} \rightarrow \overline{S_G}$,	podle kroku **VI**
p_{26}:	$X \rightarrow X$,	podle kroku **VI**
p_{27}:	$\overline{X} \rightarrow \overline{X}$,	podle kroku **VI**
p_{28}:	$Y \rightarrow Y$,	podle kroku **VI**
p_{29}:	$\overline{Y} \rightarrow \overline{Y}$,	podle kroku **VI**
p_{30}:	$\langle X \rangle \rightarrow \langle X \rangle$,	podle kroku **VI**
p_{31}:	$\langle \overline{X} \rangle \rightarrow \langle \overline{X} \rangle$,	podle kroku **VI**
p_{32}:	$\langle ABSS \rangle \rightarrow \langle ABSS \rangle$,	podle kroku **VI**
p_{33}:	$\langle \overline{ABSS} \rangle \rightarrow \langle \overline{ABSS} \rangle$,	podle kroku **VI**
p_{34}:	$\langle AYYA \rangle \rightarrow \langle AYYA \rangle$,	podle kroku **VI**
p_{35}:	$\langle \overline{AYYA} \rangle \rightarrow \langle \overline{AYYA} \rangle$,	podle kroku **VI**
p_{36}:	$\langle BYYB \rangle \rightarrow \langle BYYB \rangle$,	podle kroku **VI**
p_{37}:	$\langle \overline{BYYB} \rangle \rightarrow \langle \overline{BYYB} \rangle$,	podle kroku **VI**
p_{38}:	$\langle SYYS \rangle \rightarrow \langle SYYS \rangle$,	podle kroku **VI**
p_{39}:	$\langle \overline{SYYS} \rangle \rightarrow \langle \overline{SYYS} \rangle$,	podle kroku **VI**
p_{40}:	$\langle XYX \rangle \rightarrow \langle XYX \rangle$,	podle kroku **VI**
p_{41}:	$\langle \overline{XYX} \rangle \rightarrow \langle \overline{XYX} \rangle\}$	podle kroku **VI**

Konstrukce Γ je kompletní, zbývá ukázat přijetí věty aa:

$$w_\Gamma = S_G \Rightarrow^\circ XS[p_1] \Rightarrow^\circ XAB[p_{26}, p_2] \Rightarrow^\circ XS\langle ABSS \rangle \langle \overline{ABSS} \rangle S[p_{26}, p_4, p_5] = XSS \Rightarrow^\circ$$

$$XABAB[p_{26}, p_2, p_2] \Rightarrow^\circ XAYAY[p_{26}, p_{18}, p_3, p_{18}, p_3] \Rightarrow^\circ$$

$$XY\langle AYYA \rangle \langle \overline{AYYA} \rangle AY\langle AYYA \rangle \langle \overline{AYYA} \rangle A[p_{26}, p_6, p_7, p_6, p_7] = XYAYA \Rightarrow^\circ$$

$$X\langle XYX \rangle \langle \overline{XYX} \rangle Y\langle AYYA \rangle \langle \overline{AYYA} \rangle Aa[p_{12}, p_{13}, p_6, p_7, p_{15}] = XYAa \Rightarrow^\circ$$

$$X\langle XYX \rangle \langle \overline{XYX} \rangle aa[p_{12}, p_{13}, p_{15}, p_{16}] = Xaa \Rightarrow^\circ \langle X \rangle \langle \overline{X} \rangle aa[p_{14}, p_{16}, p_{16}] = aa$$

Důvody použití lemma 6.1 a vlastnosti derivačního procesu v těchto E0L gramatikách nad volnou grupou jsou stejné jako v případě bezkontextových gramatik nad volnou grupou. Jediným podstatným rozdílem je možnost aplikovat pravidla pro každý symbol větné formy paralelně.

Kapitola 7

Gramatiky nad volnými grupami s redukovaným počtem nonterminálů

Při simulaci každého pravidla tvaru $AB \to CD$ vznikají jak v bezkontextových tak E0L gramatikách nad volnou grupou dva nové nonterminální symboly. Z tohoto důvodu se tato práce dále zajímá o redukci počtu nonterminálních symbolů v bezkontextových a E0L gramatikách nad volnou grupou.

7.1 Bezkontextové gramatiky nad volnými grupami s redukovaným počtem nonterminálů

V případě bezkontextových gramatik nad volnou grupou se podařilo dosáhnout redukce počtu nonterminálních symbolů na osm, jmenovitě to jsou, 0, $\overline{0}$, 1, $\overline{1}$, 2, $\overline{2}$, S a $\overline{S}$, přičemž nonterminální symbol $\overline{S}$ je zde z důvodů korektní definice volné grupy, nevyskytuje se v žádném z pravidel a tudíž ani v žádné větné formě. Síla těchto gramatik zůstává nezměněna a nadále popisují třídu jazyků typu 0.

V konstrukci budeme vycházet z upravené Kurodovy normální formy. Tuto úpravu definuje následující pomocná věta. Důvod použití této modifikace je blíže objasněn v příkladu konstrukce bezkontextové gramatiky nad volnou grupou s redukovaným počtem nonterminálů.

Tato problematika byla blíže popsána v [4].

Lemma 7.1 Pro každou gramatiku typu 0, $H = (V, T, P, S)$, $V = N \cup T$, existuje ekvivalentní gramatika typu 0, $G = (V_G, T, P_G, S)$, $V_G = N_G \cup T$, taková, že každé pravidlo z P_G je ve tvaru:

(1) $AB \to CD$, kde $A \neq C$ a $A, B, C, D \in N_G$

(2) $A \to BC$, kde $A \neq B$ a $A, B, C \in N_G$

(3) $A \to x$, kde $A \in N_G$, $x \in T \cup \{\varepsilon\}$

Důkaz 7.1.1 Nechť $H = (V, T, P, S)$ je gramatika. Bez ztráty na obecnosti předpokládejme, že gramatika H je v Kurodově normální formě.

Definujeme gramatiku $G = (V_G, T, P_G, S)$, $V_G = N_G \cup T$, kde P_G je vytvořena následovně:

(1) pro každé $AB \to AD \in P$ přidej $AB \to A'D'$, $A'D' \to AD$ do P_G a A', D' do N_G, kde A' a D' jsou dva nové nonterminály

(2) pro každé $A \to AB \in P$ přidej $A \to A'B'$, $A'B' \to AB$ do P_G a A', B' do N_G, kde A' a B' jsou dva nové nonterminály

(3) přidej všechna zbývající pravidla z P do P_G

Formální důkaz, že H a G jsou ekvivalentní, je snadný a proto je ponechán na čtenáři.

Příklad 7.1.1 Uvažujme gramatiku $H = \{V_H, T, P_H, S\}$, $V_H = N_H \cup T$, kde

- $N_H = \{A, B, S\}$,
- $T = \{a\}$,
- $P_H = \{$
  p_1: $S \to AB$,
  p_2: $AB \to AS$,
  p_3: $A \to a$,
  p_4: $B \to \varepsilon\}$

Generování věty aa v této gramatice je následující:

$$S \Rightarrow AB[p_1] \Rightarrow AS[p_2] \Rightarrow AAB[p_1] \Rightarrow$$

$$aAB[p_3] \Rightarrow aaB[p_3] \Rightarrow aa[p_4]$$

Gramatika H obsahuje pravidlo p_2, které začíná na obou stranách nonterminálním symbolem A. Budeme tedy tuto gramatiku upravovat podle lemma 7.1 na gramatiku G. Podle výše uvedené konstrukce bude nová gramatika $G = \{V_G, T, P_G, S\}$, $V_G = N_G \cup T$, kde

- $N_G = \{A, B, S, A', S'\}$,
- $P_G = \{$

p_1:	$S \to AB$,	podle kroku (3)
p_2:	$AB \to A'S'$,	podle kroku (1)
p_3:	$A'S' \to AS$,	podle kroku (1)
p_4:	$A \to a$,	podle kroku (3)
p_5:	$B \to \varepsilon\}$	podle kroku (3)

Přijetí věty aa v této gramatice G bude probíhat následovně:

$$S \Rightarrow AB[p_1] \Rightarrow A'S'[p_2] \Rightarrow AS[p_3] \Rightarrow AAB[p_1] \Rightarrow$$

$$aAB[p_4] \Rightarrow aaB[p_4] \Rightarrow aa[p_5]$$

Poznámka Připomeňme, že pro třídu jazyků popsaných bezkontextovými gramatikami nad volnou grupou jsme si zavedli označení $\mathbf{CF}^{\circ}$. Třídu jazyků popsaných bezkontextovými gramatikami nad volnými grupami s redukovaným počtem nonterminálů budeme tedy označovat pomocí $\mathbf{CF}^{\circ}\mathbf{R}$.

V tuto chvíli již máme definováno vše potřebné a můžeme si tedy vyslovit následující větu.

Věta 7.1.1 CF°R=RE

Důkaz 7.1.2 Uvažujme gramatiku typu 0, $G = (V, T, P, S)$, $V = N \cup T$. Bez ztráty na obecnosti lze předpokládat, že gramatika G splňuje vlastnosti popsané v lemma 7.1.

CF°R gramatiku, $\Gamma = (V_\Gamma, T, P_\Gamma, S_\Gamma)$, kde $V_\Gamma = N_\Gamma \cup T \cup \overline{T}$, $N_\Gamma = \{0, \overline{0}, 1, \overline{1}, 2, \overline{2}, S_\Gamma, \overline{S_\Gamma}\}$ sestrojíme následovně.

Připravíme si injekce $h : N \to \{0, 1\}^{2*n}$ a $\overline{h} : N \to \{\overline{0}, \overline{1}\}^{2*n}$, kde $n = \lceil \log_2 |N| \rceil$ a pro které platí, že $h(A) = xy$ a $\overline{h}(A) = \overline{h(A)}$, kde $|x| = |y| = n$, $x = x_1 \ldots x_n$, $y = x_n \ldots x_1$, $x_1, \ldots, x_n \in \{0, 1\}$ pro každé $A \in N$.

Poznamenejme, že inverzní symboly k $0, 1, 2$ a $S_\Gamma \in N_\Gamma$ jsou $\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}$ a $\overline{S_\Gamma} \in N_\Gamma$. Pomocí symbolů $0, 1, \overline{0}$ a $\overline{1}$ budeme kódovat nonterminály z původní množiny nonterminálních symbolů N a symboly $2, \overline{2}$ budou sloužit jako oddělovače kódů nonterminálů.

Vraťme se zpět ke konstrukci, nyní zbývá definovat množinu pravidel P_Γ:

I přidej $S_\Gamma \to h(S)2$ do P_Γ

II pro každé $AB \to CD \in P$ přidej $2 \to \overline{h}(B)\overline{2}\overline{h}(A)\overline{2}2h(C)2h(D)2$ do P_Γ

III pro každé $A \to BC \in P$ přidej $2 \to \overline{h}(A)\overline{2}2h(B)2h(C)2$ do P_Γ

IV pro každé $A \to x \in P$ přidej $2 \to \overline{h}(A)x$ do P_Γ

V pro každé $a \in T$ přidej $\overline{a}$ do $\overline{T}$

kde $A, B, C, D \in N$ a $x \in T \cup \{\varepsilon\}$. Poslední bod **V** je nutný k doplnění množiny V na generátor volné grupy, abeceda terminálních symbolů $\overline{T}$ se při generování vět jazyka nevyužije.

Konstrukce Γ je kompletní.

Hlavní myšlenka důkazu Gramatika nad volnou grupou Γ binárně kóduje nonterminály původní gramatiky G a simuluje aplikaci pravidel z původní gramatiky. Bezkontextové pravidla tvaru $A \to BC$ (bod **III**) jsou nahrazena pravidlem $\overline{h}(A)\overline{2}2h(B)2h(C)2$. Kde 2 je jediný nonterminál, který lze přepsat, tedy symbol 2 je přepsán a pokud se před ním nachází nonterminál A je vše korektní, protože tento symbol je odstraněn pomocí vlastností volné grupy a z aplikovaného pravidla tedy zbude pouze $h(B)2h(C)2$. Tento řetězec odpovídá BC. Na podobném způsobu je postavena simulace i ostatních pravidel. Vždy tedy platí, že se přepisuje pouze symbol 2, pokud tedy dojde k aplikaci nějakého pravidla na nesprávném místě, derivace se zablokuje, protože se neodstraní všechny nonterminální symboly.

Podobným způsobem lze popsat simulaci pomocí E0L gramatik nad volnou grupou s redukovaným počtem nonterminálních symbolů.

Zbývá dokázat, že obě gramatiky jsou ekvivalentní, tedy že platí rovnost $L(G) = L(\Gamma)$. Nutně potom také $L(G) \subseteq L(\Gamma)$ a $L(\Gamma) \subseteq L(G)$. Tato rovnost je dokázána v [2].

Důsledek 7.1.1 CF°=CF°R

Na závěr této podkapitoly poznamenejme, že způsob redukce využívající vlastností volných grup nikterak nezvýší počet pravidel vzhledem k původní gramatice v upravené Kurodově normální formě.

7.1.1 Příklad konstrukce bezkontextové gramatiky nad volnou grupou s redukovaným počtem nonterminálů

Nyní si ukážeme příklad, ve kterém bude demonstrována konstrukce **CF°R** gramatiky vycházející z gramatiky typu 0, $G = \{V_G, T, P_G, S\}$, $V_G = N_G \cup T$ představené již výše a splňující lemma 7.1, kde

- $N_G = \{A, B, S, A', S'\}$,
- $T = \{a\}$,
- $P_G = \{$
  p_1: $S \to AB$,
  p_2: $AB \to A'S'$,
  p_3: $A'S' \to AS$,
  p_4: $A \to a$,
  p_5: $B \to \varepsilon\}$

Pro porovnání si ukážeme přijetí věty aa, které v gramatice G bude probíhat následovně:

$$S \Rightarrow AB[p_1] \Rightarrow A'S'[p_2] \Rightarrow AS[p_3] \Rightarrow AAB[p_1] \Rightarrow$$

$$aAB[p_4] \Rightarrow aaB[p_4] \Rightarrow aa[p_5]$$

Konstrukce bezkontextové gramatiky nad volnou grupou s redukovaným počtem nonterminálů Γ podle gramatiky typu 0, G, je následující:

$\Gamma = \{V_\Gamma, T, P_\Gamma, S\}$, $V_\Gamma = N_\Gamma \cup T \cup \overline{T}$, kde

- $N_\Gamma = \{0, \overline{0}, 1, \overline{1}, 2, \overline{2}, S, \overline{S}\}$,
- $T = \{a\}$,
- $\overline{T} = \{\overline{a}\}$,
- $P_\Gamma = \{$

p_1:	$S \to h(S)2$,	podle kroku **I**
p_2:	$2 \to \overline{h}(B)\overline{2}\overline{h}(A)\overline{2}2h(A')2h(S')2$,	podle kroku **II** a pravidla $AB \to A'S'$
p_3:	$2 \to \overline{h}(S')\overline{2}\overline{h}(A')\overline{2}2h(A)2h(S)2$,	podle kroku **II** a pravidla $A'S' \to AS$
p_4:	$2 \to \overline{h}(S)\overline{2}2h(A)2h(B)2$,	podle kroku **III** a pravidla $S \to AB$
p_5:	$2 \to \overline{h}(A)a$,	podle kroku **IV** a pravidla $A \to a$
p_6:	$2 \to \overline{h}(B)\}$	podle kroku **IV** a pravidla $B \to \varepsilon$

Dále si zavedeme injekce $h()$ a $\overline{h}()$:

$h()$: $h(A) = 00011000$,
$h(B) = 00100100$,
$h(S) = 01000010$,
$h(A') = 01011010$,
$h(S') = 10011001$

$\overline{h}()$: $\overline{h}(A) = \overline{00011000}$,
$\overline{h}(B) = \overline{00100100}$,
$\overline{h}(S) = \overline{01000010}$,
$\overline{h}(A') = \overline{01011010}$,
$\overline{h}(S') = \overline{10011001}$

Nyní si ukážeme jak tato gramatika Γ generuje větu aa:

$$S \Rightarrow^\circ h(S)2[p_1] \Rightarrow^\circ \underline{h(S)\overline{h}(S)\overline{2}}2h(A)2h(B)2[p_4] = h(A)2h(B)2 \Rightarrow^\circ$$

$$\underline{h(A)2h(B)2\overline{h}(B)\overline{2}\overline{h}(A)\overline{2}}2h(A')2h(S')2[p_2] = h(A')2h(S')2 \Rightarrow^\circ$$

$$\underline{h(A')2h(S')\overline{h}(S')\overline{2}\overline{h}(A')\overline{2}}2h(A)2h(S)2[p_3] = h(A)2h(S)2 \Rightarrow^\circ$$

$$h(A)2\underline{h(S)\overline{h}(S)\overline{2}}2h(A)2h(B)2[p_4] = h(A)2h(A)2h(B)2 \Rightarrow^\circ$$

$$\underline{h(A)\overline{h}(A)}ah(A)2h(B)2[p_5] = ah(A)2h(B)2 \Rightarrow^\circ$$

$$a\underline{h(A)\overline{h}(A)}ah(B)2[p_5] = aah(B)2 \Rightarrow^\circ$$

$$aa\underline{h(B)\overline{h}(B)}[p_6] = aa$$

Na závěr tohoto příkladu objasníme, proč je nutné, aby originální gramatika splňovala lemma 7.1. Uvažujme pravidlo $AB \to AC$, podle kroku konstrukce **II** bude toto pravidlo převedeno na pravidlo $2 \to \overline{h}(B)\overline{2}\overline{h}(A)\overline{2}2h(A)2h(C)2$. Díky vlastnostem volné grupy je toto pravidlo $2 \to \overline{h}(B)\underline{\overline{2}\overline{h}(A)\overline{2}2h(A)2}h(C)2$ rovno $2 \to \overline{h}(B)h(C)2$ a toto pravidlo by v originální gramatice odpovídalo pravidlu $B \to C$, které rozhodně není stejné jako pravidlo $AB \to AC$.

Podobný problém vznikne s pravidly tvaru $A \to AB$, k tomuto pravidlu by podle kroku konstrukce **III** odpovídalo pravidlo $2 \to \overline{h}(A)\overline{2}2h(A)2h(B)2$. Opět dojde k redukci z $2 \to \underline{\overline{h}(A)\overline{2}2h(A)}2h(B)2$ na $2 \to 2h(B)2$. Toto pravidlo by v originální gramatice odpovídalo pravidlu $\varepsilon \to B$. Těmto problémům předejdeme zavedením výše zmíněného lemma 7.1.

7.2 E0L gramatiky nad volnými grupami s redukovaným počtem nonterminálů

V této podkapitole popíšeme mechanismus převodu gramatiky typu 0 splňující výše popsané lemma 7.1 na E0L gramatiku nad volnou grupou s redukovaným počtem nonterminálů. Protože u E0L gramatik používáme místo startovacího symbolu startovací řetězec, dosáhneme tak lepšího výsledku než v případě bezkontextových gramatik nad volnou grupou. Výsledkem tedy je, že pro každou gramatiku typu 0 existuje E0L gramatika nad volnou grupou s pouze šesti nonterminálními symboly.

Konstrukce je opět velmi podobná, ale způsob provádění derivací je paralelní, narozdíl od bezkontextových gramatik nad volnou grupou, kde derivace probíhá sekvenčně.

Tato problematika byla blíže popsána v [10].

Poznámka Připomeňme, že pro třídu jazyků popsaných E0L gramatikami nad volnou grupou jsme si zavedli označení **E0L**$^\circ$. Třídu jazyků popsaných E0L gramatikami nad volnými grupami s redukovaným počtem nonterminálů budeme tedy označovat pomocí **E0L**$^\circ$**R**.

Věta 7.2.2 E0L$^\circ$R=RE

Důkaz 7.2.3 Uvažujme gramatiku typu 0, $G = (V, T, P, S)$, $V = N \cup T$. Bez ztráty na obecnosti lze předpokládat, že gramatika G splňuje vlastnosti popsané v lemma 7.1.

E0L°R gramatiku, $\Gamma = (V_\Gamma, T, P_\Gamma, s_\Gamma)$, kde $V_\Gamma = N_\Gamma \cup T \cup \overline{T}$, $N_\Gamma = \{0, \overline{0}, 1, \overline{1}, 2, \overline{2}\}$ sestrojíme následovně.

Připravíme si opět injekce $h : N \to \{0, 1\}^{2*n}$ a $\overline{h} : N \to \{\overline{0}, \overline{1}\}^{2*n}$, kde $n = \lceil \log_2 |N| \rceil$ a pro které platí, že $h(A) = xy$ a $\overline{h}(A) = \overline{h(A)}$, kde $|x| = |y| = n$, $x = x_1 \dots x_n$, $y = x_n \dots x_1$, $x_1, \dots, x_n \in \{0, 1\}$ pro každé $A \in N$.

Uveďme si pro lepší pochopení způsobu kódování malý příklad. Uvažujme $n = 3$ a například $h(A) = xy = 001100$, tedy $x = 001$, $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ a $x_3 = 1$, podle definice injekce h musí být $y = x_3x_2x_1$ a tedy $y = 100$. Uvedený kód tedy splňuje požadované podmínky, podle kterých jsme tento kód nazvali zrcadlový.

Inverzní kód k $h(A)$ je následující, podle definice 5.3 inverzního řetězce se musí řetězec reverzovat (otočit) a každý symbol z řetězce je nahrazen svým inverzním protějškem. Kód $\overline{h}(A) = \overline{h(A)} = \overline{001100}$. Otočení se zde vzhledem k vlastnostem kódu žádným způsobem neprojevilo.

Poznámka: Aby následující text byl srozumitelnější, vyznačíme vybrané (delší) celky, které jsou vzájemně inverzní a jejiž výsledkem je prázdný řetězec ε, podtržením. Například výraz $h(x_{k+1})\underline{h(x_{k+1})\overline{h}(x_{k+1})}h(x_{k+1})$ je roven $h(x_{k+1})h(x_{k+1})$, tedy část zvýrazněná podtržením $\underline{h(x_{k+1})\overline{h}(x_{k+1})} = \varepsilon$.

Startovací řetězec s_Γ položíme rovno $h(S)2$. Nyní zbývá definovat množinu pravidel P_Γ:

I pro každé $z \in N_\Gamma \cup T$ přidej $z \to z$ do P_Γ

II pro každé $AB \to CD \in P$ přidej $2 \to \overline{h}(B)\overline{2}\overline{h}(A)\overline{2}2h(C)2h(D)2$ do P_Γ

III pro každé $A \to BC \in P$ přidej $2 \to \overline{h}(A)\overline{2}2h(B)2h(C)2$ do P_Γ

IV pro každé $A \to x \in P$ přidej $2 \to \overline{h}(A)x$ do P_Γ

V pro každé $a \in T$ přidej $\overline{a}$ do $\overline{T}$

kde $A, B, C, D \in N$ a $x \in T \cup \{\varepsilon\}$.

Konstrukce Γ je kompletní.

Hlavní myšlenka důkazu Princip simulace gramatiky typu 0 pomocí nově definované E0L gramatiky nad volnou grupou s redukovaným počtem nonterminálů je velice podobný simulaci pomocí **CF°R** gramatik, tento princip byl popsán v předchozí kapitole. Hlavním rozdílem oproti **CF°R** gramatikám je způsob provádění derivací. Rysem **E0L°R** gramatik je paralelní způsob provádění derivací. Ale z důvodu lepšího pochopení důkazu zavádíme v konstrukci pravidla tvaru $z \to z$, kde $z \in V_\Gamma$. Tento druh pravidel nám zajistí možnost uvažovat derivace v **E0L°R** gramatikách jako sekvenční. Přiblížíme se tedy velice blízko **CF°R** gramatikám.

Dokážeme, že obě gramatiky jsou ekvivalentní, tedy že platí rovnost $L(G) = L(\Gamma)$. Nutně potom také $L(G) \subseteq L(\Gamma)$ a $L(\Gamma) \subseteq L(G)$.

Předpokládejme bez ztráty na obecnosti, že každá věta $w \in L(G)$ je generována derivací tvaru $S \Rightarrow^* w' \Rightarrow^* w$, kde větná forma w' je generována ze startovacího nonterminálu S a to pouze za použití pravidel tvaru $A_iA_j \to A_rA_s$, $A_i \to A_rA_s$ a $A_i \to \varepsilon$. V momentě, kdy již tyto pravidla nelze aplikovat, přechází w' za pomocí pravidel tvaru $A_i \to a$ na w. Přitom $A_i, A_j, A_r, A_s \in N$, $i, j, r, s \in \{1, \dots, n\}$, $a \in T$ a $w' \in N^*$, $w \in T^*$.

Pomocí matematické indukce pro $i \geq 0$ dokážeme inkluzi $L(G) \subseteq L(\Gamma)$, ustanovíme tvrzení A a B.

Tvrzení A $S \Rightarrow^i y_1y_2 \dots y_m$ v G implikuje $s_\Gamma \Rightarrow^{\circ i} h(y_1)2h(y_2)2 \dots h(y_m)2$ v Γ, kde $y_1, \dots, y_m \in V - T$, $m \geq 0$.

Nechť $i = 0$. Potom $S \Rightarrow^0 S$ v G. Podle konstrukce je zřejmé, že $s_\Gamma = h(S)2 \in P_\Gamma$ a tedy také $S_\Gamma \Rightarrow^{\circ 0} h(S)2$ v Γ.

Indukční hypotéza: Předpokládejme, že výše uvedená implikace tvrzení A platí pro všechna $i \leq l$, kde l je nezáporné celé číslo.

Indukční krok: Uvažujme derivace tvaru $S \Rightarrow^{l+1} \beta$, kde $\beta \in N^*$. Přesněji si vyjádříme $S \Rightarrow^{l+1} \beta$ jako $S \Rightarrow^l \alpha \Rightarrow \beta$, kde $\alpha \in N^*$.

Vyjádřeme si β jako $\beta = x_1x_2 \dots x_k$, kde $x_1, \dots, x_k \in V - T$, $k \geq 0$. Podle indukční hypotézy musí platit $s_\Gamma \Rightarrow^{\circ i+1} h(x_1)2h(x_2)2 \dots h(x_k)2 = \beta_\Gamma$ v Γ. Existují následující možnosti provedení derivačního kroku $\alpha \Rightarrow \beta$ v G.

(1) Nechť $\alpha = uxv \Rightarrow uyv = \beta$ v G, kde $u, v \in N^*$ a $x \to y \in P_G$. Předpokládejme, že platí $u \Rightarrow v$ v G a $u \Rightarrow^\circ v$ v Γ - bude dokázáno později.
Zaměřme se na části věty u a v, které se během derivačního kroku $\alpha \Rightarrow \beta$ nemění. V **E0L**$^\circ$ gramatice se musí v každém derivačním kroku přepsat každý symbol větné formy. Stálost částí u a v v derivaci $uxv \Rightarrow^\circ uyv$ zajistí pravidla tvaru $z \to z$, $|z| = 1$, sestrojená v kroku **I**.

(2) Nechť $A_iA_j \to A_rA_s \in P$, kde $A_i, A_j, A_r, A_s \in N$. Potom $\alpha = uA_iA_jv \Rightarrow uA_rA_sv = \beta$ v G, kde $u, v \in N^*$. Vyjádřeme si řetězce u a v jako $u = x_1 \dots x_k$ a $v = y_1 \dots y_l$
Podle **II**, $2 \to \overline{h}(A_j)2\overline{h}(A_i)\overline{2}2h(A_r)2h(A_s)2 \in P_\Gamma$
a $\alpha_\Gamma = h(x_1)2 \dots h(x_k)2h(A_i)2h(A_j)2h(y_1)2 \dots h(y_l)2 \Rightarrow^\circ$
$h(x_1)2 \dots h(x_k)2\underline{h(A_i)2h(A_j)\overline{h}(A_j)2\overline{h}(A_i)\overline{2}2}h(A_r)2h(A_s)2h(y_1)2 \dots h(y_l)2 =$
$h(x_1)2 \dots h(x_k)2h(A_r)2h(A_s)2h(y_1)2 \dots h(y_l)2 = \beta_\Gamma$ v Γ. Tedy $S \Rightarrow^{i+1} \beta$ jak v G tak i platí $s_\Gamma \Rightarrow^{\circ i+1} \beta_\Gamma$ v Γ.

(3) Nechť $A_i \to A_rA_s \in P$, kde $A_i, A_r, A_s \in N$. Potom $\alpha = uA_iv \Rightarrow uA_rA_sv = \beta$ v G, kde $u, v \in N^*$. Vyjádřeme si řetězce u a v jako $u = x_1 \dots x_k$ a $v = y_1 \dots y_l$.
Podle **III**, $2 \to \overline{h}(A_i)\overline{2}2h(A_r)2h(A_s)2 \in P_\Gamma$
a $\alpha_\Gamma = h(x_1)2 \dots h(x_k)2h(A_i)2h(y_1)2 \dots h(y_l)2 \Rightarrow^\circ$
$h(x_1)2 \dots h(x_k)2\underline{h(A_i)\overline{h}(A_i)\overline{2}2}h(A_r)2h(A_s)2h(y_1)2 \dots h(y_l)2 =$
$h(x_1)2 \dots h(x_k)2h(A_r)2h(A_s)2h(y_1)2 \dots h(y_l)2 = \beta_\Gamma$ v Γ. Je zřejmé, že $S \Rightarrow^{i+1} \beta$ v G a stejně tak $s_\Gamma \Rightarrow^{\circ i+1} \beta_\Gamma$ v Γ.

(4) Nechť $A_i \to \varepsilon \in P$, kde $A_i \in N$. Potom $\alpha = uA_iv \Rightarrow uv = \beta$ v G, kde $u, v \in N^*$. Vyjádřeme si řetězce u a v jako $u = x_1 \dots x_k$ a $v = y_1 \dots y_l$. Podle **IV**, $2 \to \overline{h}(A_i) \in P_\Gamma$ a $\alpha_\Gamma = h(x_1)2h(x_k)2h(A_i)2h(y_1)2 \dots h(y_l)2 \Rightarrow^\circ$ $h(x_1)2 \dots h(x_k)2\underline{h(A_i)\overline{h}(A_i)\overline{2}}2h(y_1)2 \dots h(y_l)2 =$ $h(x_1)2 \dots h(x_k)2h(y_1)2 \dots h(y_l)2 = \beta_\Gamma$ v Γ. Je opět zřejmé,že $S \Rightarrow^{i+1} \beta$ v G a stejně tak $s_\Gamma \Rightarrow^{\circ i+1} \beta_\Gamma$ v Γ.

Výše uvedené body **(1)** až **(4)** dokazují, že tvrzení A platí. Nyní zavedeme tvrzení B.□

Tvrzení B $x_1 \dots x_k \Rightarrow^k w$ v G pouze za použití pravidel tvaru $A_i \to a \in P$ implikuje $h(x_1)2 \dots h(x_k)2 \Rightarrow^{\circ k} w$ v Γ, kde $A_i, x_j \in N$ pro $i = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2, \dots k$, $1 \leq k \leq n$ a $a \in T$. Bez ztráty na obecnosti můžeme předpokládat, že výsledná věta je získána pomocí nejlevějších derivací.

Nechť $k = 0$. Potom $\varepsilon \Rightarrow^0 \varepsilon$ v G. Jistě také $\varepsilon \Rightarrow^{\circ 0} \varepsilon$ v Γ.

Indukční hypotéza: Předpokládejme, že výše uvedená implikace tvrzení B platí pro všechna $k \leq l$, kde l je celé nezáporné číslo.

Indukční krok: Uvažujme větné formy $x_1x_2 \dots x_kx_{k+1}$, kde $x_i \in N$ pro $i = 1, 2, \dots k+1$. Vyjádřeme si derivace jako $x_1x_2 \dots x_kx_{k+1} \Rightarrow^k wx_{k+1} \Rightarrow wa$, kde $w \in T^*$, $a \in T$.

Nechť $x_{k+1} \to a \in P$, kde $x_{k+1} \in N$ a $a \in T$. Potom $x_{k+1} \Rightarrow a$ v G.
Podle **IV**, $2 \to \overline{h}(x_{k+1})a \in P_\Gamma$, tedy $h(x_{k+1})2 \Rightarrow^\circ \underline{h(x_{k+1})\overline{h}(x_{k+1})}a = a$ v Γ. Je zřejmé, že $h(x_1)2h(x_2)2 \dots h(x_k)2h(x_{k+1})2 \Rightarrow^{\circ k+1} wa$ platí také v Γ.

Indukční krok je kompletní a tvrzení B platí. Pomocí tvrzení A a B jsme dokázali platnost první část důkazu. Inkluze $L(G) \subseteq L(\Gamma)$ je dokázána. □

Dále se budeme zabývat platností druhé inkluze $L(\Gamma) \subseteq L(G)$. Podobně jako v předcházející části předpokládejme, že každé $w \in L(\Gamma)$ získáme pomocí následující posloupnosti derivací $s_\Gamma \Rightarrow^{\circ *} w' \Rightarrow^{\circ *} w$, kde w' je generováno z s_Γ pouze za použití pravidel tvaru $2 \to \overline{h}(A_j)\overline{2}\overline{h}(A_i)\overline{2}2h(A_r)2h(A_s)2$, $2 \to \overline{h}(A_i)\overline{2}2h(A_r)2h(A_s)2$, $2 \to \overline{h}(A_i)$ $A_i \to A_i$. Věta w je získána z větné formy w' za použití pravidel tvaru $2 \to \overline{h}(A_i)a$ a $a \to a$, kde $A_i, A_j, A_r, A_s \in V - T$, pro $i, j, r, s \in \{1, 2, \dots, n\}$, $a \in T$. Důkaz provedeme matematickou indukcí pro nějaké $i \geq 0$.Ustanovíme tvrzení C.

Tvrzení C $s_\Gamma \Rightarrow^{\circ i} h(y_1)2h(y_2)2 \dots h(y_m)2$ v Γ implikuje $S \Rightarrow^* y_1y_2 \dots y_m$ v G, kde $y_j \in V - T$, $1 \leq j \leq m$ a $m \geq 0$.

Nechť $i = 0$. Potom $m = 1$, $h(y_1)2 = s_\Gamma$ a $S_\Gamma \Rightarrow^{\circ 0} S_\Gamma$ v Γ. Tedy $y_1 = S$ a platí $S \Rightarrow^0 S$ také v G.

Indukční hypotéza: Předpokládejme, že výše uvedená implikace pro tvrzení C platí pro všechna $i \leq k$, kde k je celé nezáporné číslo.

Indukční krok: Uvažujme derivace tvaru $s_\Gamma \Rightarrow^{\circ k} \alpha \Rightarrow^\circ \beta$, kde $\alpha, \beta \in V_\Gamma^\circ$.

Podle indukční hypotézy musí platit $\beta = h(x_1)2h(x_2) \dots h(x_k)2$ a $S \Rightarrow^* x_1x_2 \dots x_k = \beta_G$ v G. Existují následující možnosti provedení derivačního kroku $\alpha \Rightarrow^\circ \beta$ v Γ.

(1) Nechť $z \to z \in P_\Gamma$ (vytvořené podle kroku **I**), $z \in (N \cup T)$, $\alpha = uzv$, $\beta = uzv$, $u, v \in (N \cup T)^*$ a $\alpha \Rightarrow^\circ \beta$ v Γ. V gramatice G tomuto derivačnímu kroku odpovídá krok $uzv \Rightarrow^0 uzv$. Tedy $\alpha \Rightarrow \beta$ také v G.

(2) Nechť $2 \to \overline{h}(A_j)\overline{2}\overline{h}(A_i)\overline{2}2h(A_r)2h(A_s)2 \in P_\Gamma$, kde $A_i, A_j, A_r, A_s \in N$. Dále nechť potom $\alpha = uh(X)2h(Y)2v \Rightarrow^\circ uh(X)2h(Y)\overline{h}(A_j)\overline{2}\overline{h}(A_i)\overline{2}2h(A_r)2h(A_s)2v$, kde prefix u a sufix v jsou tvaru $u = h(x_1)2 \dots h(x_k)2$ a $v = h(y_1)2 \dots h(y_l)2$, $x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_l \in N$.

Předpokládejme, že $Y \neq A_j$ a vyjádřeme řetězec $h(Y)\overline{h}(A_j)$ jako $B_1 \dots B_n B_n \dots B_1$ $A_1 \dots A_n A_n \dots A_1$, kde $B_1, \dots, B_n \in \{0, 1\}$ a $A_1, \dots, A_n \in \{\overline{0}, \overline{1}\}$.
Nechť $B_1 = \overline{A_1}, \dots, B_m = \overline{A_m}$, kde $0 \leq m < n$. Potom je řetězec redukován na $B_1 \dots B_n B_n \dots B_{n-m} A_{n-m} \dots A_n A_n \dots A_1$ a výsledná větná forma má tvar $uh(X)2B_1 \dots B_n B_n \dots B_{n-m} A_{n-m} \dots A_n A_n \dots A_1 \overline{2}\overline{h}(A_i)\overline{2}2h(A_r)2h(A_s)2v$.
Pokud $A_1, \dots, A_n \in \{\overline{0}, \overline{1}\}$, podle konstrukce zde nejsou žádná pravidla přepisující $\overline{0}$ a $\overline{1}$. Tyto symboly můžeme odstranit jen a pouze pomocí vlastností volné grupy, to znamená konkatenací s inverzním protějškem. Kromě toho, řetězce $A_{n-m} \dots A_n A_n \dots A_1$ a $B_1 \dots B_n B_n \dots B_{n-m}$ mají délku $2n - m$. Podle konstrukce je každý nonterminál kódován binární sekvencí konstantní délky $2n$. Z tohoto shrnutí nám vyplývá, že uvažované řetězce nereprezentují korektní nonterminální symboly a není tedy možné jejich odebrání a vytvoření věty jazyka.

Budeme-li uvažovat případ, kdy $Y = A_j$ a $X \neq A_i$, nastane analogická situace, ve které bude další derivace blokována.

Jediný správný způsob aplikace uvažovaného pravidla je dosažen v případě, kdy $Y = A_j$ a $X = A_i$. Získáme derivaci $\alpha = h(x_1)2 \dots \dots h(x_k)2h(X)2h(Y)2h(y_1)2 \dots h(y_l)2 \Rightarrow^\circ$ $h(x_1)2 \dots h(x_k)\underline{2h(X)2h(Y)\overline{h}(A_j)\overline{2}\overline{h}(A_i)\overline{2}}2h(A_r)2h(A_s)2h(y_1)2 \dots h(y_l)2 =$ $h(x_1)2 \dots h(x_k)2h(A_r)2h(A_s)2h(y_1)2 \dots h(y_l)2 = \beta$ v Γ. Podle **II**, musí existovat $A_iA_j \to A_rA_s \in P$. V G také platí $\alpha_G = x_1 \dots x_k A_i A_j y_1 \dots y_l \Rightarrow x_1 \dots x_k A_r A_s y_1 \dots y_l = \beta_G$ (připomeňme, že $X = A_i$ a $Y = A_j$).

(3) $2 \to \overline{h}(A_i)\overline{2}2h(A_r)2h(A_s)2 \in P_\Gamma, \alpha = uh(A_i)2v, \beta = uh(A_r)2h(A_s)2v$, kde $u, v \in V_\Gamma^\circ$, $u = h(x_1)2 \dots h(x_k)2$, $v = h(y_1)2 \dots h(y_l)2$, $A_i, A_r, A_s \in N$. Podle **III** musí existovat $A_i \to A_rA_s \in P$.

Jejich aplikací získáme $\alpha_G = x_1 \dots x_k A_i y_1 \dots y_l \Rightarrow x_1 \dots x_k A_r A_s y_1 \dots y_l = \beta_G$. Platnost je tedy i v G.

(4) $2 \to \overline{h}(A_i)\overline{2}2z \in P_\Gamma, \alpha = uh(A_i)2v, \beta = uzv$, kde $u, v \in V_\Gamma^\circ$, $u = h(x_1)2 \dots h(x_k)2$, $v = h(y_1)2 \dots h(y_l)2$, $A_i \in N$. Podle **IV** musí existovat $A_i \to z \in P$.

Jejich aplikací získáme $\alpha = x_1 \dots x_k A_i y_1 \dots y_l \Rightarrow x_1 \dots x_k z y_1 \dots y_l = \beta_G$. Platnost je tedy i v G.

Výše uvedené body **(1)** až **(4)** dokazují, že tvrzení C platí. Nyní zavedeme tvrzení D.$\square$

Tvrzení D $h(x_1)2 \dots h(x_k)2 \Rightarrow^{\circ k} w$ v Γ za použití pravidel tvaru $2 \rightarrow \overline{h}(A_i)a$ implikuje $x_1 \dots x_k \Rightarrow^k w$ v G, kde $A_i, x_j \in N$ pro $i = 1, 2, \dots n-1$, $j = 1, 2, \dots k$, $k \geq 0$ a $a \in T$. Bez ztráty na obecnosti předpokládejme, že věta je získána posloupností nejlevějších derivací.

Nechť $k = 0$. Potom $\varepsilon \Rightarrow^{0\circ} \varepsilon$ v Γ. Jistě také $\varepsilon \Rightarrow^0 \varepsilon$ v G.

Indukční hypotéza: Předpokládejme, že výše uvedená implikace tvrzení D platí pro všechna $k \leq l$, kde l je celé nezáporné číslo.

Indukční krok: Uvažujme derivace tvaru $h(x_1)2h(x_2)2 \dots h(x_k)2h(x_{k+1})2$, kde $x_i \in N$ pro $i = 1, 2, \dots k+1$. Derivaci si přesněji vyjádříme jako
$h(x_1)2h(x_2)2 \dots h(x_k)2h(x_{k+1})2 \Rightarrow^{\circ k} wh(x_{k+1})2 \Rightarrow^\circ wa$, kde $w \in T^*$, $a \in T$.

Nechť $2 \rightarrow \overline{h}(x_{k+1})a$, kde $x_{k+1} \in N$ a $a \in T$. Potom $h(x_{k+1})2 \Rightarrow^\circ \underline{h(x_{k+1})\overline{h}(x_{k+1})}a = a$ v Γ. Podle **IV** musí existovat $x_{k+1} \rightarrow a \in P$. Tedy $x_{k+1} \Rightarrow a$ v G. Je zřejmé, že $x_1x_2 \dots x_kx_{k+1} \Rightarrow^{k+1} wa$ platí také v G.

Tvrzení C a D jsou nyní dokázána. Platnost druhé inkluze $L(\Gamma) \subseteq L(G)$ je potvrzena. $\square$

A celková platnost všech tvrzení A, B, C a D nám podává důkaz, že platí i $L(\Gamma) = L(G)$.$\blacksquare$

Důsledek 7.2.1 E0L$^\circ$=E0L$^\circ$R

Poznamenejme, že počet pravidel je shodný s počtem pravidel gramatiky typu 0, ze které tato konstrukce vychází.

7.2.1 Příklad konstrukce E0L gramatiky nad volnou grupou s redukovaným počtem nonterminálů

Nyní si opět ukážeme příklad, ve kterém bude demonstrována konstrukce **E0L$^\circ$R** gramatiky vycházející z gramatiky typu 0, $G = \{V_G, T, P_G, S\}$, $V_G = N_G \cup T$ prezentované již několikrát a splňující lemma 7.1, kde

- $N_G = \{A, B, S, A', S'\}$,
- $T = \{a\}$,
- $P_G = \{$
  p_1: $S \rightarrow AB$,
  p_2: $AB \rightarrow A'S'$,
  p_3: $A'S' \rightarrow AS$,
  p_4: $A \rightarrow a$,
  p_5: $B \rightarrow \varepsilon\}$

Pro porovnání si opět připomeneme přijetí věty aa, které je v gramatice G následující:

$$S \Rightarrow AB[p_1] \Rightarrow A'S'[p_2] \Rightarrow AS[p_3] \Rightarrow AAB[p_1] \Rightarrow$$
$$aAB[p_4] \Rightarrow aaB[p_4] \Rightarrow aa[p_5]$$

Konstrukce E0L gramatiky nad volnou grupou s redukovaným počtem nonterminálů Γ podle gramatiky typu 0, G, je následující:

$\Gamma = \{V_\Gamma, T, P_\Gamma, s_\Gamma\}$, $V_\Gamma = N_\Gamma \cup T \cup \overline{T}$, kde

- $N_\Gamma = \{0, \overline{0}, 1, \overline{1}, 2, \overline{2}\}$,
- $T = \{a\}$,
- $\overline{T} = \{\overline{a}\}$,
- $P_\Gamma = \{$

p_1:	$2 \rightarrow \overline{h}(B)\overline{2}\overline{h}(A)\overline{2}2h(A')2h(S')2$,	podle kroku **II** a pravidla $AB \rightarrow A'S'$
p_2:	$2 \rightarrow \overline{h}(S')\overline{2}\overline{h}(A')\overline{2}2h(A)2h(S)2$,	podle kroku **II** a pravidla $A'S' \rightarrow AS$
p_3:	$2 \rightarrow \overline{h}(S)\overline{2}2h(A)2h(B)2$,	podle kroku **III** a pravidla $S \rightarrow AB$
p_4:	$2 \rightarrow \overline{h}(A)a$,	podle kroku **IV** a pravidla $A \rightarrow a$
p_5:	$2 \rightarrow \overline{h}(B)$,	podle kroku **IV** a pravidla $B \rightarrow \varepsilon$
p_6:	$0 \rightarrow 0$,	podle kroku **I**
p_7:	$\overline{0} \rightarrow \overline{0}$,	podle kroku **I**
p_8:	$1 \rightarrow 1$,	podle kroku **I**
p_9:	$\overline{1} \rightarrow \overline{1}$,	podle kroku **I**
p_{10}:	$2 \rightarrow 2$,	podle kroku **I**
p_{11}:	$\overline{2} \rightarrow \overline{2}$,	podle kroku **I**
p_{12}:	$a \rightarrow a\}$,	podle kroku **I**

- $s_\Gamma = h(S)2$

Dále si zavedeme injekce $h()$ a $\overline{h}()$:

$$
\begin{array}{ll}
h(): & h(A) = 00011000, \\
 & h(B) = 00100100, \\
 & h(S) = 01000010, \\
 & h(A') = 01011010, \\
 & h(S') = 10011001 \\
\overline{h}(): & \overline{h}(A) = \overline{00011000}, \\
 & \overline{h}(B) = \overline{00100100}, \\
 & \overline{h}(S) = \overline{01000010}, \\
 & \overline{h}(A') = \overline{01011010}, \\
 & \overline{h}(S') = \overline{10011001}
\end{array}
$$

Nyní si ukážeme jak tato gramatika Γ generuje větu aa:

$$a_\Gamma = h(S)2 \Rightarrow^\circ \underline{h(S)\overline{h}(S)\overline{2}}2h(A)2h(B)2[p_6, p_8, p_3] = h(A)2h(B)2 \Rightarrow^\circ$$

$$\underline{h(A)2h(B)2\overline{h}(B)\overline{2}\overline{h}(A)\overline{2}}2h(A')2h(S')2[p_6, p_8, p_{10}, p_1] = h(A')2h(S')2 \Rightarrow^\circ$$

$$\underline{h(A')2h(S')\overline{h}(S')\overline{2}\overline{h}(A')\overline{2}}2h(A)2h(S)2[p_6, p_8, p_{10}, p_2] = h(A)2h(S)2 \Rightarrow^\circ$$

$$\underline{h(A)\overline{h}(A)}a\underline{h(S)\overline{h}(S)\overline{2}}2h(A)2h(B)2[p_6, p_8, p_4, p_3] = ah(A)2h(B)2 \Rightarrow^\circ$$

$$a\underline{h(A)\overline{h}(A)}a\underline{h(B)\overline{h}(B)}[p_6, p_8, p_4, p_5] = aa$$

Kapitola 8

Rozšířené oboustranné zásobníkové automaty nad volnými grupami

Poslední modifikovaný model je zásobníkový automat. Pomocí vlastností volné grupy se bude redukovat obsah zásobníku. Avšak výsledky získané přidáním volné grupy nikterak nezvýší generativní sílu samotných rozšířených oboustranných zásobníkových automatů nad volným monoidem, proč tomu tak je, bude ukázáno později. Samotné oboustranné zásobníkové automaty jsou definované v [2].

Tyto automaty se nazývají rozšířené, protože mají schopnost číst v jednom kroku ze vstupní pásky řetězce vstupní abecedy, - nerozšířené oboustranné zásobníkové automaty mohou číst v jednom kroku ze vstupní pásky pouze jeden vstupní symbol.

Nutno ještě poznamenat, že modifikací zásobníkových automatů, které přijímají třídu rekurzivně vyčíslitelných jazyků je nemalé množství, model který se nejvíce blíží modifikaci uvedené v této práci je tzv. Flip Pushdown Automaton, který je v podstatě také oboustranný, ale v jednom kroku lze pracovat vždy jen s jedním vrcholem (formální definici lze nalézt v [29]). U oboustranných zásobníkových automatů ale nejlépe využijeme vlastností volné grupy k redukci počtu pravidel a obsahu zásobníku.

Na začátek si zavedeme následující značení. Třídu všech jazyků přijímaných rozšířenými oboustrannými zásobníkovými automaty nad volnými grupami označíme **E2PDA**$^\circ$.

Tato kapitola byla ve velkém měřítku inspirovaná [21].

Definice 8.0.1 *Rozšířený oboustranný zásobníkový automat nad volnou grupou* je n-tice $M = (Q, \Sigma, \Gamma, R, z, Z_L, Z_R, F)$, $Q \cap (\Sigma \cup \Gamma) = \emptyset$, kde

- Q je konečná množina stavů
- Σ je konečná vstupní abeceda
- Γ je konečná zásobníková abeceda
- R je konečná množina pravidel tvaru $u_1|u_2pw \to v_1|v_2q$,
  kde $u_1, u_2 \in \Gamma$, $v_1, v_2 \in \Gamma^*$, $p, q \in Q$ a $w \in \Sigma^*$
- $z \in Q$ je počáteční stav
- $Z_L \in \Gamma$ je počáteční symbol levé strany zásobníku
- $Z_R \in \Gamma$ je počáteční symbol pravé strany zásobníku

- $F \subseteq Q$ je množina koncových stavů

8.1 Přechody v rozšířeném oboustranném zásobníkovém automatu nad volnou grupou

Definice 8.1.2 *Konfigurací* rozšířeného oboustranného zásobníku nad volnou grupou rozumíme řetězec vqy, kde $v \in \Gamma^\circ$, $y \in \Sigma^*$, and $q \in Q$.

Definice 8.1.3 Pokud $u_1|u_2qw \to v_1|v_2p \in R$, $y = u_1hu_2qwz$ a $x = v_1hv_2pz$ jsou dvě konfigurace automatu M, kde $u_1, u_2 \in \Gamma$, $x, y \in \Gamma^\circ$, $q, p \in Q$ a $w, z \in \Sigma^*$, potom automat M provádí *přechod* z konfigurace y do konfigurace x podle pravidla $u_1|u_2qw \to v_1|v_2p$ a píšeme

$$y \vdash_M^\circ x[u_1|u_2qw \to v_1|v_2q]$$

nebo jednoduše

$$y \vdash^\circ x$$

Relace $\vdash^{\circ n}$, $\vdash^{\circ +}$ a $\vdash^{\circ *}$ označující posloupnost délky n, pro $n \geq 0$, tranzitivní a reflexivní-tranzitivní uzávěr relace $\vdash^\circ$ v tomto pořadí jsou definovány obvyklým způsobem.

8.2 Jazyk generovaný rozšířeným oboustranným zásobníkovým automatem nad volnou grupou

Definice 8.2.3 Jazyk přijímaný rozšířeným zásobníkovým automatem nad volnou grupou je definován jako

$$L(M) = \{w|w \in \Sigma^*, Z_L Z_R zw \vdash^{\circ *} \varepsilon f, f \in F\}.$$

Poznamenejme, že řetězce vyskytující se na oboustranném zásobníku jsou tvořeny volnou grupou generovanou zásobníkovou abecedou Γ operací konkatenace. Řetězec ω je automatem M přijat pouze tehdy, pokud je celý přečten, zásobník je prázdný a automat M se nachází v některém z koncových stavů.

8.3 Generativní schopnosti rozšířených oboustranných zásobníkových automatů nad volnou grupou

Nyní se budeme zabývat generativní schopností nově zavedené struktury. Cílem je dokázat, že pro každou zleva rozšířenou gramatiku G existuje rozšířený oboustranný zásobníkový automat nad volnou grupou M přijímající stejný jazyk, $L(G) = L(M)$.

Věta 8.3.1 E2PDA°=RE

Důkaz 8.3.1 Je dokázáno, že třída jazyků generovaných zleva rozšířenými frontovými gramatikami (viz kapitola 3.2) je totožná s třídou rekurzivně vyčíslitelných jazyků. Postačuje tedy dokázat, že pro každou zleva rozšířenou frontovou gramatiku $G = (V, T, W, F, Sq_0, P)$ existuje rozšířený oboustranný zásobníkový automat nad volnou grupou $M = (Q, T, \Gamma, R, z, Z_L, Z_R, F)$ takový, že $L(G) = L(M)$. Bez ztráty na obecnosti předpokládejme, že gramatika G splňuje podmínky popsané v lemma 3.1.

Konstrukci rozšířeného oboustranného zásobníkového automatu nad volnou grupou M, která byla prezentována v [9], provedeme aplikací následujících kroků:

- $Q = \{f, z\} \cup \{\langle q, 1\rangle, \langle q, 2\rangle | q \in W\}$
- $\Gamma = \{Z_L, Z_R, \overline{Z_L}, \overline{Z_R}\} \cup (V - T) \cup \overline{N}$, kde $\overline{N} = \{\overline{x} | x \in (V - T)\}$
- $F_M = \{f\}$

Množina pravidel R je vytvořena následovně:

I pro startovací axiom Sq_0 gramatiky G, kde $S \in (V - T)$, $q_0 \in (W - F)$
přidej $Z_L | Z_R z \rightarrow Z_L | S Z_R \langle q_0, 1\rangle$ do R

II pro každé $(A, p, x, q) \in P$, kde $A \in (V - T)$, $p, q \in (W - F)$, $x \in (V - T)^*$
přidej $Z_L | Z_R \langle p, 1\rangle \rightarrow Z_L \overline{A} | x Z_R \langle q, 1\rangle$ do R

III pro každé $p \in W$
přidej $Z_L | Z_R \langle p, 1\rangle \rightarrow Z_L | Z_R \langle p, 2\rangle$ do R

IV pro každé $(A, p, y, q) \in P$, kde $A \in (V - T)$, $p, q \in (W - F)$, $y \in T^*$
přidej $Z_L | Z_R \langle p, 2\rangle y \rightarrow Z_L \overline{A} | Z_R \langle q, 2\rangle$ do R

V pro každé $(A, p, y, t) \in P$, kde $A \in (V - T)$, $p \in (W - F)$, $y \in T^*$, $t \in F_M$
přidej $Z_L | Z_R \langle p, 2\rangle y \rightarrow \overline{A} | \varepsilon f$ do R

Konstrukce M je kompletní. Pro další části důkazu si zavedeme následující notaci. Pokud $\langle q, 1\rangle$ je aktuální stav automatu M, říkáme, že M je v *nonterminal-generating* módu. Podobně, když je aktuálním stavem $\langle q, 2\rangle$ automatu M, říkáme, že M je v *terminal-reading* módu, kde $q \in W$.

Hlavní myšlenka důkazu Automat M bude simulovat derivace v zleva rozšířené frontové gramatice G a ukládá na oboustranný zásobník nonterminální symboly z $V - T$. Uvažujme jako aktuální větnou formu $w\#Avp$ gramatiky G, kde $w, v \in (V - T)^*$, $A \in (V - T)$, a $p \in (W - F)$. Potom odpovídající konfigurace automatu M bude $Z_L \overline{w} w A v Z_R \langle p, 1\rangle \omega$, kde $\omega \in T^*$. Předpokládejme existenci pravidla $(A, p, x, q) \in P$, kde $x \in (V - T)^*$, potom $w\#Avp \Rightarrow wA\#vxq$ v G. V takovém případě, automat M musí být v *nonterminal-generating* módu a podle konstrukce obsahuje pravidlo $Z_L | Z_R \langle p, 1\rangle \rightarrow Z_L \overline{A} | x Z_R \langle q, 1\rangle \in R$. Použitím tohoto pravidla přejde automat M do nové konfigurace $Z_L \overline{A} \overline{w} w A v x Z_R \langle q, 1\rangle \omega$. Všimněme si, že symbol A je uložen ve své inverzní podobě jako $\overline{A}$ a je vložen z levé strany oboustranného zásobníku. Dále je řetězec x vložen do oboustranného zásobníku z pravé strany.

Dále uvažujme jako aktuální větnou formu $w\#Avup$ gramatiky G, kde $u \in T^*$ a $(A, p, y, q) \in P$, $y \in T^*$. Potom lze provést $w\#Avup \Rightarrow wA\#vuyq$. Podle konstrukce musí existovat v automatu M pravidlo $Z_L | Z_R \langle p, 2\rangle y \rightarrow Z_L \overline{A} | Z_R \langle q, 2\rangle \in R$ a automat M může provést přechod $Z_L\overline{w}wAvZ_R\langle p,2\rangle y\omega' \vdash^{\circ} Z_L\overline{A}\overline{w}wAvZ_R\langle q,2\rangle\omega'$, kde $\omega' \in T^*$. Poznamenejme, že v tomto případě automat M musí být v módu *terminal-reading*. V tomto režimu jsou pouze ukládány inverzní protějšky symbolu A na levou stranu oboustranného zásobníku.

Jinými slovy, každý symbol $A \in (V - T)$, který je generován za $\#$ v gramatice G, je do oboustranného zásobníku vložen z pravé strany jako A. Všimněme si, že každý takovýto symbol ve frontové gramatice G splňující lemma 3.1 je přesunut před $\#$. Z tohoto důvodu ukládá automat M inverzní protějšky těchto symbolů na levou stranu oboustranného zásobníku. Pokud se všechny přechody provedou korektně, oboustranný zásobník se pomocí vlastností volné grupy automaticky redukuje.

Dokazujeme $L(G) = L(M)$, tedy musí platit $L(G) \subseteq L(M)$ a $L(M) \subseteq L(G)$. V první části ustanovíme tvrzení A, B a C pomocí kterých dokážeme, že $L(G) \subseteq L(M)$.

Tvrzení A. Pokud $A_1 \dots A_n\#B_1 \dots B_m u \Rightarrow^i A_1 \dots A_n B_1 \dots B_i\#B_{i+1} \dots B_m x_1 \dots x_i p$ v G, potom $Z_L\overline{A_n} \dots \overline{A_1}A_1 \dots A_n B_1 \dots B_m Z_R\langle u,1\rangle\omega \vdash^{\circ i}$
$Z_L\overline{B_i} \dots \overline{B_1}\,\overline{A_n} \dots \overline{A_1}A_1 \dots A_n B_1 \dots B_m x_1 \dots x_i Z_R\langle p,1\rangle\omega$ v M,
kde $A_1,\dots,A_n,B_1,\dots,B_m \in (V-T)$, $x_1,\dots,x_i \in (V-T)^*$, $u,p \in (W-F)$, $m \geq 1$, $n \geq 0$, $\omega \in T^*$, $i < m$.

Nechť $i = 0$. Potom $A_1 \dots A_n\#B_1 \dots B_m u \Rightarrow^0 A_1 \dots A_n\#B_1 \dots B_m u$ v G. Zajisté také $Z_L\overline{A_n} \dots \overline{A_1}A_1 \dots A_n B_1 \dots B_m Z_R\langle u,1\rangle\omega \vdash^{\circ 0} Z_L\overline{A_n} \dots \overline{A_1}A_1 \dots A_n B_1 \dots B_m Z_R\langle u,1\rangle\omega$ v M.

Indukční hypotéza: Předpokládejme, že tvrzení A platí pro všechna $i \leq l$, kde l je celé nezáporné číslo.

Indukční krok: Uvažujme derivaci tvaru $A_1 \dots A_n\#B_1 \dots B_m u \Rightarrow^{l+1}$
$A_1 \dots A_n B_1 \dots B_l B_{l+1}\#B_{l+2} \dots B_m x_1 \dots x_l x_{l+1} q$. Derivaci si přesněji vyjádříme jako
$A_1 \dots A_n\#B_1 \dots B_m u \Rightarrow^l A_1 \dots A_n B_1 \dots B_l\#B_{l+1} \dots B_m x_1 \dots x_l p \Rightarrow$
$A_1 \dots A_n B_1 \dots B_l B_{l+1}\#B_{l+2} \dots B_m x_1 \dots x_l x_{l+1} q$ v G, kde $l + 2 \leq m$, $q \in (W - F)$.

Podle indukční hypotézy
$Z_L\overline{A_n} \dots \overline{A_1}A_1 \dots A_n B_1 \dots B_m Z_R\langle u,1\rangle\omega \vdash^{\circ l}$
$Z_L\overline{B_l} \dots \overline{B_1}\,\overline{A_n} \dots \overline{A_1}A_1 \dots A_n B_1 \dots B_m x_1 \dots x_l Z_R\langle p,1\rangle\omega \vdash^{\circ}$
$Z_L\overline{B_{l+1}B_l} \dots \overline{B_1}\,\overline{A_n} \dots \overline{A_1}A_1 \dots A_n B_1 \dots B_m x_1 \dots x_l x_{l+1} Z_R\langle q,1\rangle\omega$ v M. Jediný typ pravidla z P, pomocí kterého lze derivaci $A_1 \dots A_n B_1 \dots B_l\#B_{l+1} \dots B_m x_1 \dots x_l$
$p \Rightarrow A_1 \dots A_n B_1 \dots B_l B_{l+1}\#B_{l+2} \dots B_m x_1 \dots x_l x_{l+1} q$ v G provést je $(B_{l+1}, p, x_{l+1}, q) \in P$, kde $B_{l+1} \in (V - T)$, $p, q \in (W - F)$ a $x_{l+1} \in (V - T)^*$. Všimněte si, že podle konstrukce , bod **II**, existuje pravidlo $Z_L|Z_R\langle p,1\rangle \to Z_L\overline{B_{l+1}}|x_{l+1}Z_R\langle q,1\rangle$ v R, tedy
$Z_L\overline{B_l} \dots \overline{B_1}\,\overline{A_n} \dots \overline{A_1}A_1 \dots A_n B_1 \dots B_m x_1 \dots x_l Z_R\langle p,1\rangle\omega \vdash^{\circ}$
$Z_L\overline{B_{l+1}B_l} \dots \overline{B_1}\,\overline{A_n} \dots \overline{A_1}A_1 \dots A_n B_1 \dots B_m x_1 \dots x_l x_{l+1} Z_R\langle q,1\rangle\omega$ v M a
tvrzení A platí. $\square$

Tvrzení B. Pokud $A_1 \dots A_n\#B_1 \dots B_m a_1 \dots a_k u$
$\Rightarrow^i A_1 \dots A_n B_1 \dots B_i\#B_{i+1} \dots B_m a_1 \dots a_k b_1 \dots b_i p$ v G, potom
$Z_L\overline{A_n} \dots \overline{A_1}A_1 \dots A_n B_1 \dots B_m Z_R\langle u,2\rangle b_1 \dots b_j \vdash^{\circ i}$
$Z_L\overline{B_i} \dots \overline{B_1}\,\overline{A_n} \dots \overline{A_1}A_1 \dots A_n B_1 \dots B_i B_{i+1} \dots B_m Z_R\langle p,2\rangle b_{i+1} \dots b_j$ v M,
kde $A_1,\dots,A_n,B_1,\dots,B_m \in (V - T)$, $a_1,\dots,a_k,b_1,\dots,b_j \in T^*$, $u,p \in (W - F)$, $i < m$, $i < j$, $k \geq 0$, $j \geq 0$.

Nechť $i = 0$. Potom $A_1 \dots A_n \# B_1 \dots B_m a_1 \dots a_k u \Rightarrow^0 A_1 \dots A_n \# B_1 \dots B_m a_1 \dots a_k u$ v G. Jistě tedy i $Z_L \overline{A_n} \dots \overline{A_1} A_1 \dots A_n B_1 \dots B_m Z_R \langle u, 2 \rangle b_1 \dots b_j \vdash^{\circ 0}$
$Z_L \overline{A_n} \dots \overline{A_1} A_1 \dots A_n B_1 \dots B_m Z_R \langle u, 2 \rangle b_1 \dots b_j$ v M.

Indukční hypotéza: Předpokládejme, že tvrzení B platí pro každé $i \leq l$, kde l je celé nezáporné číslo.

Indukční krok: Uvažujme derivaci tvaru $A_1 \dots A_n \# B_1 \dots B_m a_1 \dots a_k u \Rightarrow^{l+1}$
$A_1 \dots A_n B_1 \dots B_l B_{l+1} \# B_{l+2} \dots B_m a_1 \dots a_k b_1 \dots b_l b_{l+1} q$ a derivaci si přesněji vyjádříme jako $A_1 \dots A_n \# B_1 \dots B_m a_1 \dots a_k u \Rightarrow^l A_1 \dots A_n B_1 \dots B_l \# B_{l+1} \dots B_m a_1 \dots a_k b_1 \dots b_l p \Rightarrow$
$A_1 \dots A_n B_1 \dots B_l B_{l+1} \# B_{l+2} \dots B_m a_1 \dots a_k b_1 \dots b_l b_{l+1} q$ v G, kde $l + 2 \leq m$, $k \geq 0$, $i < j$, $l + 2 \leq j$, $q \in (W - F)$.

Podle indukční hypotézy $Z_L \overline{A_n} \dots \overline{A_1} A_1 \dots A_n B_1 \dots B_m Z_R \langle u, 2 \rangle b_1 \dots b_j \vdash^{\circ l}$
$Z_L \overline{B_l} \dots \overline{B_1 A_n} \dots \overline{A_1} A_1 \dots A_n B_1 \dots B_m Z_R \langle p, 2 \rangle b_{l+1} \dots b_j \vdash^{\circ}$
$Z_L \overline{B_{l+1} B_l} \dots \overline{B_1 A_n} \dots \overline{A_1} A_1 \dots A_n B_1 \dots B_m Z_R \langle q, 2 \rangle b_{l+2} \dots b_j$ v M.

V tomto případě, máme jedinou možnost jak může G provést derivaci
$A_1 \dots A_n B_1 \dots B_l \# B_{l+1} \dots B_m a_1 \dots a_k b_1 \dots b_l p \Rightarrow$
$A_1 \dots A_n B_1 \dots B_l B_{l+1} \# B_{l+2} \dots B_m a_1 \dots a_k b_1 \dots b_l b_{l+1} q$. Všimněme si, že toto nám zajistí pravidlo tvaru $(B_{l+1}, p, b_{l+1}, q) \in P$, kde $B_{l+1} \in (V - T)$, $p, q \in (W - F)$, $b_{l+1} \in T^*$. Podle bodu **IV** z konstrukce existuje pravidlo $Z_L | Z_R \langle p, 2 \rangle b_{l+1} \rightarrow Z_L \overline{B_{l+1}} | Z_R \langle q, 2 \rangle$ v R, tedy
$Z_L \overline{B_l} \dots \overline{B_1 A_n} \dots \overline{A_1} A_1 \dots A_n B_1 \dots B_m Z_R \langle p, 2 \rangle b_{l+1} \dots b_j \vdash^{\circ}$
$Z_L \overline{B_{l+1} B_l} \dots \overline{B_1 A_n} \dots \overline{A_1} A_1 \dots A_n B_1 \dots B_m Z_R \langle q, 2 \rangle b_{l+2} \dots b_j$ v M a tvrzení B platí. $\square$

Tvrzení C. Pokud $A_1 \dots A_{n-1} \# A_n y q \Rightarrow A_1 \dots A_{n-1} A_n \# y z t$ v G, kde $A_1, \dots, A_n \in (V - T)$, $y, z \in T^*$, $q \in (W - F)$, $t \in F$, potom $Z_L \overline{A_{n-1}} \dots \overline{A_1} A_1 \dots A_n Z_R \langle q, 2 \rangle z \vdash^{\circ}$
$\overline{A_n} \dots \overline{A_1} A_1 \dots A_n f = \varepsilon f$ v M, kde $f \in F_M$.

Gramatika G provede zmíněnou derivaci pomocí pravidla tvaru $(A_n, q, z, t) \in P$, kde $A_n \in (V - T)$, $z \in T^*$, $q \in (W - F)$, $t \in F$. Podle bodu **V** z konstrukce existuje pravidlo $Z_L | Z_R \langle q, 2 \rangle z \rightarrow \overline{A_n} | \varepsilon f$ z R, tedy odpovídající výpočetní krok popsaný v tvrzení C se také nachází v automatu M. Tvrzení C platí. $\square$

Platnost tvrzení A, B a C dokazuje, že platí také $L(G) \subseteq L(M)$. V dalším kroku ustanovíme tvrzení D, E a F, které dokáží platnost $L(M) \subseteq L(G)$.

Tvrzení D. Automat M přijímá každou větu $w \in L(M)$ následujícím způsobem

$Z_L Z_R z w_1 w_2 \dots w_r \vdash^{\circ}$
$Z_L S Z_R \langle q_0, 1 \rangle w_1 w_2 \dots w_r \vdash^{\circ}$
$Z_L \overline{S} S X_1^1 X_2^1 \dots X_{n_1}^1 Z_R \langle q_1, 1 \rangle w_1 w_2 \dots w_r \vdash^{\circ}$
$Z_L \overline{X_1^1} \overline{S} S X_1^1 X_2^1 \dots X_{n_1}^1 X_1^2 X_2^2 \dots X_{n_2}^2 Z_R \langle q_2, 1 \rangle w_1 w_2 \dots w_r \vdash^{\circ}$
$Z_L \overline{X_2^1 X_1^1} \overline{S} S X_1^1 X_2^1 \dots X_{n_1}^1 X_1^2 X_2^2 \dots X_{n_2}^2 X_1^3 X_2^3 \dots X_{n_3}^3 Z_R \langle q_3, 1 \rangle w_1 w_2 \dots w_r \vdash^{\circ}$

...

$Z_L\overline{X_j^k}\ldots\overline{X_2^1X_1^1\overline{S}}SX_1^1X_2^1\ldots X_{n_1}^1X_1^2X_2^2\ldots X_{n_2}^2X_1^3X_2^3\ldots X_{n_3}^3\ldots$
$\ldots X_1^mX_2^m\ldots X_{n_m}^mZ_R\langle q_m,1\rangle w_1w_2\ldots w_r \vdash^\circ$

$Z_L\overline{X_j^k}\ldots\overline{X_2^1X_1^1\overline{S}}SX_1^1X_2^1\ldots X_{n_1}^1X_1^2X_2^2\ldots X_{n_2}^2X_1^3X_2^3\ldots X_{n_3}^3\ldots$
$\ldots X_1^mX_2^m\ldots X_{n_m}^mZ_R\langle q_m,2\rangle w_1w_2\ldots w_r \vdash^\circ$

$Z_L\overline{X_{j+1}^kX_j^k}\ldots\overline{X_2^1X_1^1\overline{S}}SX_1^1X_2^1\ldots X_{n_1}^1X_1^2X_2^2\ldots X_{n_2}^2X_1^3X_2^3\ldots X_{n_3}^3\ldots$
$\ldots X_1^mX_2^m\ldots X_{n_m}^mZ_R\langle q_{m+1},2\rangle w_2\ldots w_r \vdash^\circ$

$Z_L\overline{X_{j+2}^kX_{j+1}^kX_j^k}\ldots\overline{X_2^1X_1^1\overline{S}}SX_1^1X_2^1\ldots X_{n_1}^1X_1^2X_2^2\ldots X_{n_2}^2X_1^3X_2^3\ldots X_{n_3}^3\ldots$
$\ldots X_1^mX_2^m\ldots X_{n_m}^mZ_R\langle q_{m+2},2\rangle w_3\ldots w_r \vdash^\circ$

$\ldots$

$Z_L\overline{X_{n_m-1}^m}\ldots\ldots\overline{X_{j+2}^kX_{j+1}^kX_j^k}\ldots\overline{X_2^1X_1^1\overline{S}}SX_1^1X_2^1\ldots X_{n_1}^1X_1^2X_2^2\ldots X_{n_2}^2X_1^3X_2^3\ldots X_{n_3}^3\ldots$
$\ldots X_1^mX_2^m\ldots X_{n_m}^mZ_R\langle q_{m+r-1},2\rangle w_r \vdash^\circ$

$\overline{X_{n_m}^mX_{n_m-1}^m}\ldots\ldots\overline{X_{j+2}^kX_{j+1}^kX_j^k}\ldots\overline{X_2^1X_1^1\overline{S}}SX_1^1X_2^1\ldots X_{n_1}^1X_1^2X_2^2\ldots X_{n_2}^2X_1^3X_2^3\ldots X_{n_3}^3\ldots$
$\ldots X_1^mX_2^m\ldots X_{n_m}^mf=\varepsilon f$

v M, kde $w=w_1w_2\ldots w_r$, $r\geq 1$, $w_1,\ldots,w_r\in T^*$, $q_0,q_1,\ldots,q_{m+r-1}\in(W-F)$, $X_1^1,\ldots,X_{n_1}^1,X_1^2,\ldots,X_{n_2}^2,\ldots,X_1^m,\ldots,X_{n_m}^m\in(V-T)$, $n_1,n_2,\ldots,n_m\geq 0$, $m\geq 1$, $0\leq k\leq m$.

Důkaz tvrzení D. Podrobně prozkoumáme kroky **I** až **V** konstrukce množiny pravidel R.
V prvním výpočetním kroku automat M aplikuje pravidlo $Z_L|Z_Rz\to Z_L|SZ_R\langle q_0,1\rangle$ zavedené v bodě **I**, kde Sq_0 je startovací axiom gramatiky G. Je to jediný způsob, jak může automat M přejít do další konfigurace $Z_LZ_Rzw_1w_2\ldots w_r\vdash^\circ Z_LSZ_R\langle q_0,1\rangle w_1w_2\ldots w_r$. Všimněme si, že toto pravidlo je použito pouze jednou v průběhu celého úspěšného výpočtu automatu M. Tímto krokem se automat M přepíná do *nonterminal-generating* módu.
Tato část výpočtu zajistí uložení startovacího symbolu S simulované gramatiky G na pravou stranu rozšířeného oboustranného zásobníkového automatu M. Automat dále přechází do stavu $\langle q_0,1\rangle$ a výsledná konfigurace $Z_LSZ_R\langle q_0,1\rangle w_1w_2\ldots w_r$ odpovídá větné formě $\#Sq_0$ simulované gramatiky G.

V další části výpočtu

$Z_LSZ_R\langle q_0,1\rangle w_1w_2\ldots w_r\vdash^{\circ *}$
$Z_L\overline{X_j^k}\ldots\overline{X_2^1X_1^1\overline{S}}SX_1^1X_2^1\ldots X_{n_1}^1X_1^2X_2^2\ldots X_{n_2}^2X_1^3X_2^3\ldots X_{n_3}^3\ldots$
$\ldots X_1^mX_2^m\ldots X_{n_m}^mZ_R\langle q_m,1\rangle w_1w_2\ldots w_r$

automat M používá pravidla typu $Z_L|Z_R\langle q,1\rangle\to Z_L\overline{A}|xZ_R\langle p,1\rangle$ vytvořených v bodě **II**, kde $A\in(V-T)$, $x\in(V-T)^*$, $p,q\in(W-F)$. Tato část výpočtu je charakteristická tím, že stavy automatu M jsou tvaru $\langle q,1\rangle$, $q\in(W-F)$. Více do detailů je tato část popsána v tvrzení E.
Zde automat M simuluje aplikaci pravidel tvaru (A,q,x,p) gramatiky G, kde $A\in V-T$, $p,q\in W-F$, $x\in(V-T)^*$. Tyto pravidla generují větné formy tvaru $z_1\#z_2q$ v G, kde

$z_1, z_2 \in (V-T)^*$, $q \in W - F$. Zdůrazněme, že během této části výpočtu nejsou automatem M přečteny žádné vstupní symboly, podobně jako simulovaná gramatika by v tomto momentě negenerovala žádné terminály. Simulace probíhá tak, že automat M na svoji pravou stranu ukládá nonterminální symboly, které by původní gramatika G vygenerovala. Později se dozvíme, že na stranu levou automat M určitým způsobem ukládá inverzní protějšky nonterminálů A ze simulovaných pravidel (A, q, x, p). Podrobněji je tato část samostatně popsána tvrzení E.

V dalším výpočetním kroku

$$Z_L\overline{X_j^k}\dots\overline{X_2^1X_1^1}\overline{S}SX_1^1X_2^1\dots X_{n_1}^1X_1^2X_2^2\dots X_{n_2}^2X_1^3X_2^3\dots X_{n_3}^3\dots$$
$$\dots X_1^mX_2^m\dots X_{n_m}^mZ_R\langle q_m,1\rangle w_1w_2\dots w_r \vdash^{\circ}$$

$$Z_L\overline{X_j^k}\dots\overline{X_2^1X_1^1}\overline{S}SX_1^1X_2^1\dots X_{n_1}^1X_1^2X_2^2\dots X_{n_2}^2X_1^3X_2^3\dots X_{n_3}^3\dots$$
$$\dots X_1^mX_2^m\dots X_{n_m}^mZ_R\langle q_m,2\rangle w_1w_2\dots w_r$$

se automat M přepíná do *terminal-reading* módu. Zajistí to pravidlo tvaru $Z_L|Z_R\langle q,1\rangle \to Z_L|Z_R\langle q,2\rangle$ získané konstrukcí v bodě **III**. Opět si všimněme, že takovéto pravidlo je použito jen a pouze jednou v průběhu celého úspěšného výpočtu automatu M. Jakmile se změní stav automatu M z $\langle q,1\rangle$ na stav $\langle q,2\rangle$, $q \in (W-F)$, automat M už nemá možnost použít pravidla sestrojená v bodech **I** až **III**. Dále také poznamenejme, že tento krok neodpovídá žádné derivaci v původní gramatice G.

V další části výpočtu

$$Z_L\overline{X_j^k}\dots\overline{X_2^1X_1^1}\overline{S}SX_1^1X_2^1\dots X_{n_1}^1X_1^2X_2^2\dots X_{n_2}^2X_1^3X_2^3\dots X_{n_3}^3\dots$$
$$\dots X_1^mX_2^m\dots X_{n_m}^mZ_R\langle q_m,2\rangle w_1w_2\dots w_r \vdash^{\circ *}$$

$$Z_L\overline{X_{n_m-1}^m}\dots\overline{X_{j+2}^kX_{j+1}^kX_j^k}\dots\overline{X_2^1X_1^1}\overline{S}SX_1^1X_2^1\dots X_{n_1}^1X_1^2X_2^2\dots X_{n_2}^2X_1^3X_2^3\dots X_{n_3}^3\dots$$
$$\dots X_1^mX_2^m\dots X_{n_m}^mZ_R\langle q_{m+r-1},2\rangle w_r$$

automat M používá pravidla podle bodu **IV** a čte vstupní řetězce terminálních symbolů. Provádí se tedy simulace pravidel tvaru (A, q, w, p) původní gramatiky G, kde $A \in V-T$, $p, q \in W - F$ a $w \in T^*$. Automat M na levou stranu oboustranného zásobníku ukládá inverzní protějšky symbolů A a zároveň ze vstupní pásky čte odpovídající řetězce w. Proces, který odpovídá původní gramatice G, generuje větné formy tvaru $z_1\#z_2yq$, kde $z_1, z_2 \in (V-T)^*$, $y \in T^*$. Podrobněji je tato část výpočtu samostatně popsána v tvrzení F.

Poslední výpočetní krok zajistí přechod automatu M do koncového stavu. To je zajištěno pravidlem typu $Z_L|Z_R\langle q,2\rangle y \to \overline{A}|\varepsilon f$, které jsme sestrojili v bodě **V**, kde $q \in (W-T)$, $y \in T^*$, $A \in (V-T)$ a $f \in F_M$. V případě, že automat M přejde do tohoto stavu a pomocí vlastností volné grupy je oboustranný zásobník prázdný a samozřejmě je přečtena celá vstupní páska, lze prohlásit, že automat M přijímá vstupní řetězec. V jiném případě je řetězec automatem M nepřijatý. V původní gramatice G odpovídá tomuto přechodu derivace pomocí pravidla tvaru (A, q, y, t), kde $A \in (V-T)$, $q \in W-F$, $y \in T^*$ a $t \in F$. Tvrzení D tedy můžeme prohlásit za dokázané. □

Tvrzení E. Pokud $Z_L\overline{A_n}\dots\overline{A_1}A_1\dots A_nB_1\dots B_mZ_R\langle u,1\rangle\omega \vdash^{\circ i}$
$Z_L\overline{B_i}\dots\overline{B_1A_n}\dots\overline{A_1}A_1\dots A_nB_1\dots B_mx_1\dots x_iZ_R\langle p,1\rangle\omega$ v M,
potom $A_1\dots A_n\#B_1\dots B_mu \Rightarrow^i A_1\dots A_nB_1\dots B_i\#B_{i+1}\dots B_mx_1\dots x_ip$ v G,

kde $A_1, \ldots, A_n, B_1, \ldots, B_m \in (V - T)$, $x_1, \ldots, x_i \in (V - T)^*$, $u, p \in (W - F)$, $i < m$.

Nechť $i = 0$. Potom $Z_L\overline{A_n} \ldots \overline{A_1}A_1 \ldots A_nB_1 \ldots B_mZ_R\langle u, 1\rangle\omega \vdash^{\circ 0}$
$Z_L\overline{A_n} \ldots \overline{A_1}A_1 \ldots A_nB_1 \ldots B_mZ_R\langle u, 1\rangle\omega$ v M. Je zřejmé, že také $A_1 \ldots A_n\#B_1 \ldots B_mu \Rightarrow^0$
$A_1 \ldots A_n\#B_1 \ldots B_mu$ v G.

Indukční hypotéza: Předpokládejme, že tvrzení E platí pro všechna $i \leq l$, kde l je celé nezáporné číslo.

Indukční krok: Předpokládejme výpočet automatu M, který je typu
$Z_L\overline{A_n} \ldots \overline{A_1}A_1 \ldots A_nB_1 \ldots B_mZ_R\langle u, 1\rangle\omega \vdash^{\circ l+1}$
$Z_L\overline{B_{l+1}B_l} \ldots \overline{B_1A_n} \ldots \overline{A_1}A_1 \ldots A_nB_1 \ldots B_mx_1 \ldots x_lx_{l+1}Z_R\langle q, 1\rangle\omega$
rozepišme si předchozí podrobněji jako $Z_L\overline{A_n} \ldots \overline{A_1}A_1 \ldots A_nB_1 \ldots B_mZ_R\langle u, 1\rangle\omega \vdash^{\circ l}$
$Z_L\overline{B_l} \ldots \overline{B_1A_n} \ldots \overline{A_1}A_1 \ldots A_nB_1 \ldots B_mx_1 \ldots x_lZ_R\langle p, 1\rangle\omega \vdash^{\circ}$
$Z_L\overline{B_{l+1}B_l} \ldots \overline{B_1A_n} \ldots \overline{A_1}A_1 \ldots A_nB_1 \ldots B_mx_1 \ldots x_lx_{l+1}Z_R\langle q, 1\rangle\omega$ v M,
kde $q \in (W - F)$, $l + 2 \leq m$.

Podle indukční hypotézy $A_1 \ldots A_n\#B_1 \ldots B_mu \Rightarrow^l$
$A_1 \ldots A_nB_1 \ldots B_l\#B_{l+1} \ldots B_mx_1 \ldots x_lp \Rightarrow$
$A_1 \ldots A_nB_1 \ldots B_lB_{l+1}\#B_{l+2} \ldots B_mx_1 \ldots x_lx_{l+1}q$ v G. V množině pravidel R je pouze jediný typ pravidla, který zajistí takovýto přechod
$Z_L\overline{B_l} \ldots \overline{B_1A_n} \ldots \overline{A_1}A_1 \ldots A_nB_1 \ldots B_mx_1 \ldots x_lZ_R\langle p, 1\rangle\omega \vdash^{\circ}$
$Z_L\overline{B_{l+1}B_l} \ldots \overline{B_1A_n} \ldots \overline{A_1}A_1 \ldots A_nB_1 \ldots B_mx_1 \ldots x_lx_{l+1}Z_R\langle q, 1\rangle\omega$ v M, jmenovitě pravidlo tvaru $Z_L|Z_R\langle p, 1\rangle \rightarrow Z_L\overline{B_{l+1}}|x_{l+1}Z_R\langle q, 1\rangle \in R$. Všimněme si, že podle konstrukce musí existovat pravidlo (B_{l+1}, p, x_{l+1}, q) v P, so $A_1 \ldots A_n\#B_1 \ldots B_mu \Rightarrow^l$
$A_1 \ldots A_nB_1 \ldots B_l\#B_{l+1} \ldots B_mx_1 \ldots x_lp \Rightarrow$
$A_1 \ldots A_nB_1 \ldots B_lB_{l+1}\#B_{l+2} \ldots B_mx_1 \ldots x_lx_{l+1}q$ v G a tvrzení E je platné. □

Tvrzení F. Pokud $Z_L\overline{A_n} \ldots \overline{A_1}A_1 \ldots A_nB_1 \ldots B_mZ_R\langle u, 2\rangle b_1 \ldots b_j \vdash^{\circ i}$
$Z_L\overline{B_i} \ldots \overline{B_1A_n} \ldots \overline{A_1}A_1 \ldots A_nB_1 \ldots B_iB_{i+1} \ldots B_mZ_R\langle p, 2\rangle b_{i+1} \ldots b_j$ v M,
potom $A_1 \ldots A_n\#B_1 \ldots B_ma_1 \ldots a_ku \Rightarrow^i$
$A_1 \ldots A_nB_1 \ldots B_i\#B_{i+1} \ldots B_ma_1 \ldots a_kb_1 \ldots b_ip$ v G,
kde $A_1, \ldots, A_n, B_1, \ldots, B_m \in V - T$, $a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_j \in T^*$ a $p, u \in W - F$, $i < m$.

Nechť $i = 0$. Potom $Z_L\overline{A_n} \ldots \overline{A_1}A_1 \ldots A_nB_1 \ldots B_mZ_R\langle u, 2\rangle b_1 \ldots b_j \vdash^{\circ 0}$
$Z_L\overline{A_n} \ldots \overline{A_1}A_1 \ldots A_nB_1 \ldots B_mZ_R\langle u, 2\rangle b_1 \ldots b_j$ v M.
Je zřejmé, že také platí $A_1 \ldots A_n\#B_1 \ldots B_ma_1 \ldots a_ku \Rightarrow^0 A_1 \ldots A_n\#B_1 \ldots B_ma_1 \ldots a_ku$ v G.

Indukční hypotéza: Předpokládejme, že tvrzení F platí pro všechna $i \leq l$, kde l je celé nezáporné číslo.

Indukční krok: Uvažujme výpočet automatu M typu
$Z_L\overline{A_n} \ldots \overline{A_1}A_1 \ldots A_nB_1 \ldots B_mZ_R\langle u, 2\rangle b_1 \ldots b_j \vdash^{\circ l+1}$
$Z_L\overline{B_{l+1}B_l} \ldots \overline{B_1A_n} \ldots \overline{A_1}A_1 \ldots A_nB_1 \ldots B_mZ_R\langle q, 2\rangle b_{l+2} \ldots b_j$ podrobněji vyjádřeno
$Z_L\overline{A_n} \ldots \overline{A_1}A_1 \ldots A_nB_1 \ldots B_mZ_R\langle u, 2\rangle b_1 \ldots b_j \vdash^{\circ l}$
$Z_L\overline{B_l} \ldots \overline{B_1A_n} \ldots \overline{A_1}A_1 \ldots A_nB_1 \ldots B_mZ_R\langle p, 2\rangle b_{l+1} \ldots b_j \vdash^{\circ}$
$Z_L\overline{B_{l+1}B_l} \ldots \overline{B_1A_n} \ldots \overline{A_1}A_1 \ldots A_nB_1 \ldots B_mZ_R\langle q, 2\rangle b_{l+2} \ldots b_j$ v M, kde $l + 2 \leq j$, $q \in$

$(W - F)$.

Podle indukční hypotézy $A_1 \ldots A_n \# B_1 \ldots B_m a_1 \ldots a_k u \Rightarrow^l$
$A_1 \ldots A_n B_1 \ldots B_l \# B_{l+1} \ldots B_m a_1 \ldots a_k b_1 \ldots b_l p \Rightarrow$
$A_1 \ldots A_n B_1 \ldots B_l B_{l+1} \# B_{l+2} \ldots B_m a_1 \ldots a_k b_1 \ldots b_l b_{l+1} q$ v G, kde $l + 2 \leq m$.

V tomto případě je jediný způsob, kterým může automat M uskutečnit přechod, následující
$Z_L \overline{B_l} \ldots \overline{B_1 A_n} \ldots \overline{A_1} A_1 \ldots A_n B_1 \ldots B_m Z_R \langle p, 2 \rangle b_{l+1} \ldots b_j \vdash^\circ$
$Z_L \overline{B_{l+1} B_l} \ldots \overline{B_1 A_n} \ldots \overline{A_1} A_1 \ldots A_n B_1 \ldots B_m Z_R \langle q, 2 \rangle b_{l+2} \ldots b_j$. Všimněme si, že k tomuto je použito pravidlo tvaru $Z_L | Z_R \langle p, 2 \rangle b_{l+1} \rightarrow Z_L \overline{B_{l+1}} | Z_R \langle q, 2 \rangle \in R$. Podle konstrukce musí existovat pravidlo typu $(B_{l+1}, p, b_{l+1}, q) \in P$, kde $B_{l+1} \in (V - T)$, $p, q \in (W - F)$, $b_{l+1} \in T^*$, tedy $A_1 \ldots A_n B_1 \ldots B_l \# B_{l+1} \ldots B_m a_1 \ldots a_k b_1 \ldots b_l p \Rightarrow$
$A_1 \ldots A_n B_1 \ldots B_l B_{l+1} \# B_{l+2} \ldots B_m a_1 \ldots a_k b_1 \ldots b_l b_{l+1} q$ v G a tvrzení F platí. $\square$

Platností tvrzení D, E a F jsme dokázali že platí i $L(M) \subseteq L(G)$. Celkově s tvrzeními A, B a C jsme dokázali, že $L(G) = L(M)$. $\blacksquare$

Pokud si uvědomíme jakým způsobem se využívá vlastností volné grupy - redukují se dvojice nonterminálů $\overline{A}A$, dokud zásobník není prázdný - lze tento mechanismus nahradit pravidly tvaru $A'|Ap \rightarrow \varepsilon|\varepsilon q$, tyto pravidla budou aplikována po načtení celého vstupního řetězce. Budou pravděpodobně vyžadovat další zásobníkový stav. Takto upravená verze bez volné grupy bude mít stejnou vyjadřovací schopnost jako výše definovaná verze využívající volnou grupu.

V tomto případě výhodu použití volných grup lze spatřit v redukci počtu pravidel, stavů a automatického mazání symbolů uvnitř zásobníku, čímž se šetří paměťové nároky v případě dynamické alokace.

8.4 Příklad konstrukce rozšířeného oboustranného zásobníkového automatu nad volnou grupou

Pro lepší pochopení a ilustraci celého důkazu z této kapitoly si uveďme krátký příklad, ve kterém bude ukázána konstrukce **E2PDA**$^\circ$ vycházející z zleva rozšířené frontové gramatiky G, která již splňuje lemma 3.1.

Uvažujme tedy zleva rozšířenou frontovou gramatiku splňující lemma 3.1,
$G = (V, T, W, F, s, P)$, kde

- $V = \{S, A, B, a, b\}$,
- $T = \{a, b\}$,
- $W = \{Q, f\}$,
- $F = \{f\}$,
- $s = SQ$,
- $P = \{$
  p_1: (S, Q, AB, Q),
  p_2: (A, Q, aa, Q),
  p_3: $(B, Q, bb, f)\}$

Tato gramatika G generuje větu $aabb$ následujícím způsobem

$$\#s = \#SQ \Rightarrow S\#ABQ[p_1] \Rightarrow SA\#BaaQ[p_2] \Rightarrow SAB\#aabbf[p_3]$$

Nyní přistoupíme ke konstrukci rozšířeného oboustranného zásobníkového automatu nad volnou grupou $M = (Q, T, Z, R, z, Z_L, Z_R, F_M)$, kde

- $Q = \{z, f, \langle Q, 1\rangle\ \langle Q, 2\rangle\}$,
- $T = \{a, b\}$,
- $Z = \{Z_L, \overline{Z_L}, Z_R, \overline{Z_R}, S, \overline{S}, A, \overline{A}, B, \overline{B}\}$,
- $R = \{$

p_1:	$Z_L\|Z_R z \to Z_L\|SZ_R\langle Q, 1\rangle$	podle počátečního řetězce $s = SQ$,
p_2:	$Z_L\|Z_R\langle Q, Z_L\rangle \to Z_R\overline{S}\|ABZ_R\langle Q, 1\rangle$	podle $(S, Q, AB, Q) \in P$,
p_3:	$Z_L\|Z_R\langle Q, Z_L\rangle \to Z_L\|Z_R\langle Q, 2\rangle$	podle $Q \in W$,
p_4:	$Z_L\|Z_R\langle Q, 2\rangle aa \to Z_L\overline{A}\|Z_R\langle Q, 2\rangle$	podle $(A, Q, aa, Q) \in P$,
p_5:	$Z_L\|Z_R\langle Q, 2\rangle bb \to \overline{B}\|\varepsilon f$	podle $(B, Q, bb, f) \in P\}$,

- $F_M = \{f\}$

Konstrukce automatu M je kompletní. Nyní zbývá ukázat jakým způsobem automat M přijímá obsah na vstupní pásce. Abychom mohli tento způsob přijetí věty jazyka srovnat s generováním stejné věty v původní gramatice G, tak jako obsah vstupní pásky zvolíme větu $aabb$, pro kterou již zde máme příklad v gramatice G.

oboustranný zásobník	stav	vstupní páska	pravidlo
$Z_L Z_R$	z	$aabb$	
$Z_L S Z_R$	$\langle Q, 1\rangle$	$aabb$	p_1
$Z_L\overline{S}SABZ_R$	$\langle Q, 1\rangle$	$aabb$	p_2
$Z_L ABZ_R$	$\langle Q, 1\rangle$	$aabb$	redukce obsahu zásobníku
$Z_L ABZ_R$	$\langle Q, 2\rangle$	$aabb$	p_3
$Z_L\overline{A}ABZ_R$	$\langle Q, 2\rangle$	bb	p_4
$Z_L BZ_R$	$\langle Q, 2\rangle$	bb	redukce obsahu zásobníku
$\overline{B}B$	f	ε	p_5
ε	f	ε	redukce obsahu zásobníku

Obsah oboustranného zásobníku je prázdný a aktuální stav automatu M je konečný stav f. Věta $aabb$ je tedy automatem M korektně přijata.

Kapitola 9

Rozšířené oboustranné zásobníkové automaty nad volnými grupami s redukovanou zásobníkovou abecedou

Způsob kódování nonterminálních symbolů, který jsme zavedli při redukci nonterminální abecedy bezkontextových gramatik a E0L gramatik, lze využít i v případě kódování zásobníkové abecedy oboustranných zásobníkových automatů. Dosáhneme tak velice dobrého výsledku a to redukci zásobníkové abecedy přesně na čtyři symboly, konkrétně se jedná o symboly $0, \overline{0}, 1$ a $\overline{1}$.

Než přistoupíme k samotnému důkazu generativní síly těchto automatů, zavedeme si následující značení. Rozšířené zásobníkové automaty nad volnou grupou s redukovanou zásobníkovou abecedou bude značit jako **E2PDA°R**.

Věta 9.0.1 E2PDA°R=RE

Důkaz 9.0.1 Je dokázáno, že třída jazyků generovaných zleva rozšířenými frontovými gramatikami (viz kapitola 3.2) je totožná s třídou rekurzivně vyčíslitelných jazyků. Postačuje tedy dokázat, že pro každou zleva rozšířenou frontovou gramatiku $G = (V, T, W, F, Sq_0, P)$ existuje rozšířený oboustranný zásobníkový automat nad volnou grupou $M = (Q, T, Z, R, z, 1, 1, F_M)$ takový, že $L(G) = L(M)$. Bez ztráty na obecnosti předpokládejme, že gramatika G splňuje podmínky popsané v lemma 3.1.

Konstrukce rozšířeného zásobníkového automatu nad volnou grupou s redukovanou zásobníkovou abecedou je následující.

Zavedeme injekce $h : (V-T) \rightarrow \{0,1\}^{n+2}$ a $\overline{h} : (V-T) \rightarrow \{\overline{0},\overline{1}\}^{n+2}$, kde $n = \lceil \log_2(card(V-T)) \rceil$, takové že pro každé $A \in (V-T)$, $h(A) = \{0\}\{0,1\}^n\{0\}$ a $\overline{h}(A) = \overline{h(A)}$. Rozšíříme doménu h na $(V-T)^*$. Nyní je h injektivní homomorfismus z $(V-T)^*$ na $(\{0\}\{0,1\}^n\{0\})^*$. Poznamenejme, že inverzní symboly k 0 a $1 \in V-T$ jsou $\overline{0}$ a $\overline{1} \in V-T$.

- $Q = \{f, z\} \cup \{\langle q, 1\rangle, \langle q, 2\rangle | q \in W\}$
- $Z = \{0, \overline{0}, 1, \overline{1}\}$

- $F_M = \{f\}$

Množina pravidel R je vytvořena následovně:

I pro startovací axiom Sq_0 gramatiky G, kde $S \in (V - T)$, $q_0 \in (W - F)$
přidej $1|1z \rightarrow 1|h(S)1\langle q_0, 1\rangle$ do R

II pro každé $(A, q, x, p) \in P$, kde $A \in (V - T)$, $p, q \in (W - F)$, $x \in (V - T)^*$
přidej $1|1\langle q, 1\rangle \rightarrow 1\overline{h}(A)|h(x)1\langle p, 1\rangle$ do R

III pro každé $q \in W$
přidej $1|1\langle q, 1\rangle \rightarrow 1|1\langle q, 2\rangle$ do R

IV pro každé $(A, q, y, p) \in P$, kde $A \in (V - T)$, $p, q \in (W - F)$, $y \in T^*$
přidej $1|1\langle q, 2\rangle y \rightarrow 1\overline{h}(A)|1\langle p, 2\rangle$ do R

V pro každé $(A, q, y, t) \in P$, kde $A \in (V - T)$, $q \in (W - F)$, $y \in T^*$, $t \in F$
přidej $1|1\langle q, 2\rangle y \rightarrow \overline{h}(A)|\varepsilon f$ do R

Konstrukce automatu M je kompletní. Pro další části důkazu si zavedeme stejnou notaci jako v předchozí kapitole. Pokud $\langle q, 1\rangle$ je aktuální stav automatu M, říkáme, že M je v *nonterminal-generating* módu. Podobně, když je aktuálním stavem $\langle q, 2\rangle$ automatu M, říkáme, že M je v *terminal-reading* módu, kde $q \in W$.

Hlavní myšlenka důkazu Automat M simuluje derivace v zleva rozšířené frontové gramatice G a ukládá na zásobník binárně kódované symboly z $V - T$. Uvažujme jako aktuální větnou formu $w\#Avp$ gramatiky G, kde $w, v \in (V - T)^*$, $A \in (V - T)$, a $p \in (W - F)$. Potom odpovídající konfigurace automatu M je $1\overline{h}(w)h(w)h(A)h(v)1\langle p, 1\rangle\omega$, kde $\omega \in T^*$. Nechť existuje nějaké pravidlo $(A, p, x, q) \in P$, kde $x \in (V - T)^*$, potom $w\#Avp \Rightarrow wA\#vxq$ v G. V takovém případě, automat M musí být v *nonterminal-generating* módu a podle konstrukce obsahuje pravidlo $1|1\langle p, 1\rangle \rightarrow 1\overline{h}(A)|h(x)1\langle q, 1\rangle \in R$. Použitím tohoto pravidla přechází automat M do nové konfigurace $1\overline{h}(A)\overline{h}(w)h(w)h(A)h(v)h(x)1\langle q, 1\rangle\omega$. Všimněme si, že symbol A je kódován jako $\overline{h}(A)$ a výsledný binární kód tohoto symbolu je vložen z levé strany oboustranného zásobníku. Dále je řetězec x kódován pomocí injekce h a výsledný binární kód je vložen do oboustranného zásobníku z pravé strany.

Dále uvažujme jako aktuální větnou formu $w\#Avup$ gramatiky G, kde $u \in T^*$ a $(A, p, y, q) \in P$, $y \in T^*$. Potom lze provést $w\#Avup \Rightarrow wA\#vuyq$. Podle konstrukce musí existovat v automatu M pravidlo $1|1\langle p, 2\rangle y \rightarrow 1\overline{h}(A)|1\langle q, 2\rangle \in R$ a automat M může provést přechod $1\overline{h}(w)h(w)h(A)h(v)1\langle p, 2\rangle y\omega' \vdash^{\circ} 1\overline{h}(A)\overline{h}(w)h(w)h(A)h(v)1\langle q, 2\rangle\omega'$, kde $\omega' \in T^*$. Poznamenejme, že v tomto případě automat M musí být v módu *terminal-reading.* V tomto režimu jsou binárně kódovány pouze symboly A. Na levou stranu oboustranného zásobníku se tedy vkládá binární řetězec $\overline{h}(A)$.

Jinými slovy, každý symbol $A \in (V - T)$, který je generován za $\#$ v gramatice G, je do oboustranného zásobníku vložen z pravé strany jako $h(A)$. Všimněme si, že každý takovýto symbol ve frontové gramatice G splňující lemma 3.1 je přesunut před $\#$. Z tohoto důvodu ukládá automat M inverzní protějšky těchto symbolů na levou stranu oboustranného zásobníku. Pokud se všechny přechody provedou korektně, oboustranný zásobník se pomocí vlastností volné grupy sám vyprázdní.

Nyní dokážeme, že $L(G) = L(M)$, tedy $L(G) \subseteq L(M)$ a $L(M) \subseteq L(G)$. V první části ustanovíme tvrzení A, B a C, abychom dokázali platnost první inkluze $L(G) \subseteq L(M)$.

Tvrzení A. Pokud $A_1 \dots A_n \# B_1 \dots B_m u \Rightarrow^i A_1 \dots A_n B_1 \dots B_i \# B_{i+1} \dots B_m x_1 \dots x_i p$ v G, potom $1\overline{h}(A_n) \dots \overline{h}(A_1) h(A_1) \dots h(A_n) h(B_1) \dots h(B_m) 1\langle u, 1\rangle \omega \vdash^{\circ i}$
$1\overline{h}(B_i) \dots \overline{h}(B_1)\overline{h}(A_n) \dots \overline{h}(A_1) h(A_1) \dots h(A_n) h(B_1) \dots h(B_m) h(x_1) \dots h(x_i) 1\langle p, 1\rangle \omega$ v M, kde $A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_m \in (V - T)$, $x_1, \dots, x_i \in (V - T)^*$, $u, p \in (W - F)$, $n \geq 0$, $\omega \in T^*$, $0 \leq i \leq m$.

Nechť $i = 0$. Potom $A_1 \dots A_n \# B_1 \dots B_m u \Rightarrow^0 A_1 \dots A_n \# B_1 \dots B_m u$ v G. Je zřejmé, že $1\overline{h}(A_n) \dots \overline{h}(A_1) h(A_1) \dots h(A_n) h(B_1) \dots h(B_m) 1\langle u, 1\rangle \omega \vdash^{\circ 0}$
$1\overline{h}(A_n) \dots \overline{h}(A_1) h(A_1) \dots h(A_n) h(B_1) \dots h(B_m) 1\langle u, 1\rangle \omega$ v M.

Indukční hypotéza: Předpokládejme, že tvrzení A platí pro každé $i \leq l$, kde l je nezáporné celé číslo.

Indukční krok: Uvažujme derivaci tvaru $A_1 \dots A_n \# B_1 \dots B_m u \Rightarrow^{l+1}$
$A_1 \dots A_n B_1 \dots B_l B_{l+1} \# B_{l+2} \dots B_m x_1 \dots x_l x_{l+1} q$. Vyjádřeme si tuto derivaci podrobněji jako
$A_1 \dots A_n \# B_1 \dots B_m u \Rightarrow^l A_1 \dots A_n B_1 \dots B_l \# B_{l+1} \dots B_m x_1 \dots x_l p \Rightarrow$
$A_1 \dots A_n B_1 \dots B_l B_{l+1} \# B_{l+2} \dots B_m x_1 \dots x_l x_{l+1} q$ v G, kde $0 \leq l \leq m$, $q \in (W - F)$.

Podle indukční hypotézy $1\overline{h}(A_n) \dots \overline{h}(A_1) h(A_1) \dots h(A_n) h(B_1) \dots h(B_m) 1\langle u, 1\rangle \omega \vdash^{\circ l}$
$1\overline{h}(B_l) \dots \overline{h}(B_1)\overline{h}(A_n) \dots \overline{h}(A_1) h(A_1) \dots h(A_n) h(B_1) \dots h(B_m) h(x_1) \dots h(x_l) 1\langle p, 1\rangle \omega \vdash^{\circ}$
$1\overline{h}(B_{l+1})\overline{h}(B_l) \dots \overline{h}(B_1)\overline{h}(A_n) \dots \overline{h}(A_1) h(A_1) \dots h(A_n) h(B_1) \dots h(B_m)$
$h(x_1) \dots h(x_l) h(x_{l+1}) 1\langle q, 1\rangle \omega$ v M. Existuje pouze jediný typ pravidla v množině P, pomocí kterého lze provést derivaci $A_1 \dots A_n B_1 \dots B_l \# B_{l+1} \dots B_m x_1 \dots x_l p \Rightarrow$
$A_1 \dots A_n B_1 \dots B_l B_{l+1} \# B_{l+2} \dots B_m x_1 \dots x_l x_{l+1} q$ v G, toto pravidlo má tvar $(B_{l+1}, p, x_{l+1}, q) \in P$, kde $B_{l+1} \in (V - T)$, $p, q \in (W - F)$ a $x_{l+1} \in (V - T)^*$. Podle konstrukce bod **II** existuje pravidlo $1|1\langle p, 1\rangle \rightarrow 1\overline{h}(B_{l+1})|h(x_{l+1})1\langle q, 1\rangle$ v R, tedy
$1\overline{h}(B_l) \dots \overline{h}(B_1)\overline{h}(A_n) \dots \overline{h}(A_1) h(A_1) \dots h(A_n) h(B_1) \dots h(B_m) h(x_1) \dots h(x_l) 1\langle p, 1\rangle \omega \vdash^{\circ}$
$1\overline{h}(B_{l+1})\overline{h}(B_l) \dots \overline{h}(B_1)\overline{h}(A_n) \dots \overline{h}(A_1) h(A_1) \dots h(A_n) h(B_1) \dots h(B_m)$
$h(x_1) \dots h(x_l) h(x_{l+1}) 1\langle q, 1\rangle \omega$ také v M a tvrzení A je platné. □

Tvrzení B. Pokud $A_1 \dots A_n \# B_1 \dots B_m a_1 \dots a_k u \Rightarrow^i A_1 \dots A_n B_1 \dots B_i \# B_{i+1} \dots B_m$
$a_1 \dots a_k b_1 \dots b_i p$ v G, potom $1\overline{h}(A_n) \dots \overline{h}(A_1) h(A_1) \dots h(A_n) h(B_1) \dots h(B_m) 1\langle u, 2\rangle$
$b_1 \dots b_j \vdash^{\circ i} 1\overline{h}(B_i) \dots \overline{h}(B_1)\overline{h}(A_n) \dots \overline{h}(A_1) h(A_1) \dots h(A_n) h(B_1) \dots h(B_i) h(B_{i+1})$
$\dots h(B_m) 1\langle p, 2\rangle b_{i+1} \dots b_j$ v M, kde $A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_m \in (V - T)$, $a_1, \dots, a_k$, $b_1, \dots, b_j \in T^*$, $u, p \in (W - F)$, $0 \leq k$, $0 \leq i \leq j \leq m$.

Nechť $i = 0$. Potom $A_1 \dots A_n \# B_1 \dots B_m a_1 \dots a_k u \Rightarrow^0 A_1 \dots A_n \# B_1 \dots B_m a_1 \dots a_k u$ v G. Zajisté také platí $1\overline{h}(A_n) \dots \overline{h}(A_1) h(A_1) \dots h(A_n) h(B_1) \dots h(B_m) 1\langle u, 2\rangle b_1 \dots b_j \vdash^{\circ 0}$
$1\overline{h}(A_n) \dots \overline{h}(A_1) h(A_1) \dots h(A_n) h(B_1) \dots h(B_m) 1\langle u, 2\rangle b_1 \dots b_j$ v M.

Indukční hypotéza: Předpokládejme, že tvrzení B platí pro každé $i \leq l$, kde l je celé nezáporné číslo.

Indukční krok: Uvažujme derivaci typu $A_1 \dots A_n \# B_1 \dots B_m a_1 \dots a_k u \Rightarrow^{l+1}$
$A_1 \dots A_n B_1 \dots B_l B_{l+1} \# B_{l+2} \dots B_m a_1 \dots a_k b_1 \dots b_l b_{l+1} q$ vyjádřeme si tuto derivaci přesněji

jako $A_1 \dots A_n \# B_1 \dots B_m a_1 \dots a_k u \Rightarrow^l A_1 \dots A_n B_1 \dots B_l \# B_{l+1} \dots B_m a_1 \dots a_k b_1 \dots b_l p \Rightarrow$ $A_1 \dots A_n B_1 \dots B_l B_{l+1} \# B_{l+2} \dots B_m a_1 \dots a_k b_1 \dots b_l b_{l+1} q$ v G, kde $0 \leq k$, $0 \leq l \leq m$, $q \in (W - F)$.

Podle indukční hypotézy $1\overline{h}(A_n) \dots \overline{h}(A_1) h(A_1) \dots h(A_n) h(B_1) \dots h(B_m) 1\langle u, 2\rangle b_1 \dots b_j \vdash^{\circ l}$ $1\overline{h}(B_l) \dots \overline{h}(B_1) \overline{h}(A_n) \dots \overline{h}(A_1) h(A_1) \dots h(A_n) h(B_1) \dots h(B_m) 1\langle p, 2\rangle b_{l+1} \dots b_j \vdash^{\circ}$ $1\overline{h}(B_{l+1}) \overline{h}(B_l) \dots \overline{h}(B_1) \overline{h}(A_n) \dots \overline{h}(A_1) h(A_1) \dots h(A_n) h(B_1) \dots h(B_m) 1\langle q, 2\rangle b_{l+2} \dots b_j$ v M.

V tomto případě máme jedinou možnost jak gramatika G může provést derivaci $A_1 \dots A_n B_1 \dots B_l \# B_{l+1} \dots B_m a_1 \dots a_k b_1 \dots b_l p \Rightarrow A_1 \dots A_n B_1 \dots B_l B_{l+1}$ $\# B_{l+2} \dots B_m a_1 \dots a_k b_1 \dots b_l b_{l+1} q$. Všimněme si, že derivace byla provedena pomocí pravidla tvaru $(B_{l+1}, p, b_{l+1}, q) \in P$, kde $B_{l+1} \in (V - T)$, $p, q \in (W - F)$, $b_{l+1} \in T^*$. Podle bodu **IV** musí existovat také pravidlo $1|1\langle p, 2\rangle b_{l+1} \rightarrow 1\overline{h}(B_{l+1})|1\langle q, 2\rangle$ v R, tedy $1\overline{h}(B_l) \dots \overline{h}(B_1) \overline{h}(A_n) \dots \overline{h}(A_1) h(A_1) \dots h(A_n) h(B_1) \dots h(B_m) 1\langle p, 2\rangle b_{l+1} \dots b_j \vdash^{\circ}$ $1\overline{h}(B_{l+1}) \overline{h}(B_l) \dots \overline{h}(B_1) \overline{h}(A_n) \dots \overline{h}(A_1) h(A_1) \dots h(A_n) h(B_1) \dots h(B_m) 1\langle q, 2\rangle b_{l+2} \dots b_j$ v automatu M a tvrzení B je platné. $\square$

Tvrzení C. Pokud $A_1 \dots A_{n-1} \# A_n y q \Rightarrow A_1 \dots A_{n-1} A_n \# y z t$ v G, kde $A_1, \dots, A_n \in (V - T)$, $y, z \in T^*$, $q \in (W - F)$, $t \in F$, potom $1\overline{h}(A_{n-1}) \dots \overline{h}(A_1) h(A_1) \dots h(A_n) 1\langle q, 2\rangle z \vdash^{\circ}$ $\overline{h}(A_n) \dots \overline{h}(A_1) h(A_1) \dots h(A_n) f = \varepsilon f$ v M, kde $f \in F_M$.

Gramatika G provádí uvedené derivace pomocí pravidel typu $(A_n, q, z, t) \in P$, kde $A_n \in (V - T)$, $z \in T^*$, $q \in (W - F)$, $t \in F$. Podle bodu **V** existuje pravidlo $1|1\langle q, 2\rangle z \rightarrow \overline{h}(A_n)|\varepsilon f$ v R, tedy odpovídající výpočetní krok lze provést i v automatu M, z čehož plyne, že tvrzení C je platné. $\square$

Výše popsané tvrzení A, B a C dokazují, že $L(G) \subseteq L(M)$. Zbývá dokázat druhou inkluzi $L(M) \subseteq L(G)$, k tomuto účelu ustanovme tvrzení D, E a F.

Tvrzení D. Automat M přijímá vstup $w \in L(M)$ pouze následujícím způsobem

$11 z w_1 w_2 \dots w_r \vdash^{\circ}$
$1h(S) 1\langle q_0, 1\rangle w_1 w_2 \dots w_r \vdash^{\circ}$
$1\overline{h}(S) h(S) h(X_1^1) h(X_2^1) \dots h(X_{n_1}^1) 1\langle q_1, 1\rangle w_1 w_2 \dots w_r \vdash^{\circ}$
$1\overline{h}(X_1^1) \overline{h}(S) h(S) h(X_1^1) h(X_2^1) \dots h(X_{n_1}^1) h(X_1^2) h(X_2^2) \dots h(X_{n_2}^2) 1\langle q_2, 1\rangle w_1 w_2 \dots w_r \vdash^{\circ}$
$1\overline{h}(X_2^1) \overline{h}(X_1^1) \overline{h}(S) h(S) h(X_1^1) h(X_2^1) \dots h(X_{n_1}^1) h(X_1^2) h(X_2^2) \dots h(X_{n_2}^2) h(X_1^3) h(X_2^3) \dots$
$h(X_{n_3}^3) 1\langle q_3, 1\rangle w_1 w_2 \dots w_r \vdash^{\circ}$

...

$1\overline{h}(X_j^k) \dots \overline{h}(X_2^1) \overline{h}(X_1^1) \overline{h}(S) h(S) h(X_1^1) h(X_2^1) \dots h(X_{n_1}^1) h(X_1^2) h(X_2^2) \dots h(X_{n_2}^2)$
$h(X_1^3) h(X_2^3) \dots h(X_{n_3}^3) \dots h(X_1^m) h(X_2^m) \dots h(X_{n_m}^m) 1\langle q_m, 1\rangle w_1 w_2 \dots w_r \vdash^{\circ}$

$1\overline{h}(X_j^k) \dots \overline{h}(X_2^1) \overline{h}(X_1^1) \overline{h}(S) h(S) h(X_1^1) h(X_2^1) \dots h(X_{n_1}^1) h(X_1^2) h(X_2^2) \dots h(X_{n_2}^2)$
$h(X_1^3) h(X_2^3) \dots h(X_{n_3}^3) \dots h(X_1^m) h(X_2^m) \dots h(X_{n_m}^m) 1\langle q_m, 2\rangle w_1 w_2 \dots w_r \vdash^{\circ}$

$1\overline{h}(X_{j+1}^k) \overline{h}(X_j^k) \dots \overline{h}(X_2^1) \overline{h}(X_1^1) \overline{h}(S) h(S) h(X_1^1) h(X_2^1) \dots h(X_{n_1}^1) h(X_1^2) h(X_2^2) \dots$
$h(X_{n_2}^2) h(X_1^3) h(X_2^3) \dots h(X_{n_3}^3) \dots h(X_1^m) h(X_2^m) \dots h(X_{n_m}^m) 1\langle q_{m+1}, 2\rangle w_2 \dots w_r \vdash^{\circ}$

$1\overline{h}(X^k_{j+2})\overline{h}(X^k_{j+1})\overline{h}(X^k_j)\ldots\overline{h}(X^1_2)\overline{h}(X^1_1)\overline{h}(S)h(S)h(X^1_1)h(X^1_2)\ldots h(X^1_{n_1})h(X^2_1)h(X^2_2)$
$\ldots h(X^2_{n_2})h(X^3_1)h(X^3_2)\ldots h(X^3_{n_3})\ldots h(X^m_1)h(X^m_2)\ldots h(X^m_{n_m})1\langle q_{m+2},2\rangle w_3\ldots w_r \vdash^\circ$

$\ldots$

$1\overline{h}(X^m_{n_m-1})\ldots\overline{h}(X^k_{j+2})\overline{h}(X^k_{j+1})\overline{h}(X^k_j)\ldots\overline{h}(X^1_2)\overline{h}(X^1_1)\overline{h}(S)h(S)h(X^1_1)h(X^1_2)\ldots$
$h(X^1_{n_1})h(X^2_1)h(X^2_2)\ldots h(X^2_{n_2})h(X^3_1)h(X^3_2)\ldots h(X^3_{n_3})\ldots$
$\ldots h(X^m_1)h(X^m_2)\ldots h(X^m_{n_m})1\langle q_{m+r-1},2\rangle w_r \vdash^\circ$

$\overline{h}(X^m_{n_m})\overline{h}(X^m_{n_m-1})\ldots\overline{h}(X^k_{j+2})\overline{h}(X^k_{j+1})\overline{h}(X^k_j)\ldots\overline{h}(X^1_2)\overline{h}(X^1_1)\overline{h}(S)h(S)h(X^1_1)h(X^1_2)\ldots$
$h(X^1_{n_1})h(X^2_1)h(X^2_2)\ldots h(X^2_{n_2})h(X^3_1)h(X^3_2)\ldots h(X^3_{n_3})\ldots$
$\ldots h(X^m_1)h(X^m_2)\ldots h(X^m_{n_m})f = \varepsilon f$

kde $w = w_1w_2\ldots w_r$, $r \geq 1$, $w_1,\ldots,w_r \in T^*$, $q_0,q_1,\ldots,q_{m+r-1} \in (W-F)$,
$X^1_1,\ldots,X^1_{n_1},X^2_1,\ldots,X^2_{n_2},\ldots,X^m_1,\ldots,X^m_{n_m} \in (V-T)$, $n_1,n_2,\ldots,n_m \geq 0$, $0 \leq k \leq m$.

Důkaz tvrzení D. Prozkoumejme body konstrukce **I** až **V**.

V prvním výpočetním kroku automatu M je použito pravidlo $1|1z \to 1|h(S)1\langle q_0,1\rangle$ zavedené v bodě **I**, kde Sq_0 je startovací axiom původní gramatiky G. Toto je jediný způsob, jak automat M může přejít do další konfigurace $11zw_1w_2\ldots w_r \vdash^\circ 1h(S)1\langle q_0,1\rangle w_1w_2\ldots w_r$. Poznamenejme, že toto pravidlo je v průběhu úspěšného výpočtu automatu M použito pouze jednou. Provedením tohoto přechodu se automat M přepíná do *nonterminal-generating* módu.

Tento výpočetní krok ukládá binární kód symbolu S na pravou stranu oboustranného zásobníkového automatu a přechází se do stavu $\langle q_0,1\rangle$. Výsledná konfigurace $1h(S)1\langle q_0,1\rangle w_1w_2\ldots w_r$ automatu M odpovídá větné formě $\#Sq_0$ původní gramatiky G.

V další části výpočtu

$1h(S)1\langle q_0,1\rangle w_1w_2\ldots w_r \vdash^{\circ *}$
$1\overline{h}(X^k_j)\ldots\overline{h}(X^1_2)\overline{h}(X^1_1)\overline{h}(S)h(S)h(X^1_1)h(X^1_2)\ldots h(X^1_{n_1})h(X^2_1)h(X^2_2)\ldots h(X^2_{n_2})$
$h(X^3_1)h(X^3_2)\ldots h(X^3_{n_3})\ldots h(X^m_1)h(X^m_2)\ldots h(X^m_{n_m})1\langle q_m,1\rangle w_1w_2\ldots w_r$

automat M používá pravidla tvaru $1|1\langle q,1\rangle \to 1\overline{h}(A)|h(x)1\langle p,1\rangle$ sestavená v bodě **II**, kde $A \in (V-T)$, $x \in (V-T)^*$, $p,q \in (W-F)$. Tato část výpočtu je charakteristická, tím že se automat M nachází ve stavu tvaru $\langle q,1\rangle$, $q \in (W-F)$. Automat M simuluje aplikaci pravidel typu (A,q,x,p) z G, kde $A \in V-T$, $p,q \in W-F$, $x \in (V-T)^*$. Tyto pravidla generují větné formy $z_1\#z_2q$ v G, kde $z_1,z_2 \in (V-T)^*$, $q \in W-F$. Poznamenejme, že během této části výpočtu nejsou automatem M přečteny žádné terminální symboly. Stejně tak nejsou v původní gramatice generovány žádné terminální symboly. V gramatice G se generují pouze nonterminální symboly, ty jsou při simulaci automatem M ukládány z pravé strany do oboustranného zásobníku. Z druhé strany oboustranného zásobníku jsou vkládány inverzní protějšky binárních kódů symbolů A z pravidel (A,q,x,p). Tato část je podrobněji popsaná v tvrzení E.

V dalším výpočetním kroku

$1\overline{h}(X^k_j)\ldots\overline{h}(X^1_2)\overline{h}(X^1_1)\overline{h}(S)h(S)h(X^1_1)h(X^1_2)\ldots h(X^1_{n_1})h(X^2_1)h(X^2_2)\ldots h(X^2_{n_2})$
$h(X^3_1)h(X^3_2)\ldots h(X^3_{n_3})\ldots h(X^m_1)h(X^m_2)\ldots h(X^m_{n_m})1\langle q_m,1\rangle w_1w_2\ldots w_r \vdash^\circ$

$1\overline{h}(X_j^k)\dots\overline{h}(X_2^1)\overline{h}(X_1^1)\overline{h}(S)h(S)h(X_1^1)h(X_2^1)\dots h(X_{n_1}^1)h(X_1^2)h(X_2^2)\dots h(X_{n_2}^2)$
$h(X_1^3)h(X_2^3)\dots h(X_{n_3}^3)\dots h(X_1^m)h(X_2^m)\dots h(X_{n_m}^m)1\langle q_m,2\rangle w_1w_2\dots w_r$

se automat M přepíná do *terminal-reading* režimu a to za pomocí pravidla tvaru $1|1\langle q,1\rangle \rightarrow 1|1\langle q,2\rangle$ sestaveného v bodě **III**. Toto pravidlo je v průběhu úspěšného výpočtu použito jen a pouze jednou. Jakmile se změní stav automatu M ze stavu tvaru $\langle q,1\rangle$ na stav typu $\langle q,2\rangle$, $q\in(W-F)$ není žádná možnost jak použít pravidla automatu M sestavená v bodech **I** až **III**. Poznamenejme, že tento krok neodpovídá žádné derivaci v původní gramatice G.

V další části výpočtu

$1\overline{h}(X_j^k)\dots\overline{h}(X_2^1)\overline{h}(X_1^1)\overline{h}(S)h(S)h(X_1^1)h(X_2^1)\dots h(X_{n_1}^1)h(X_1^2)h(X_2^2)\dots h(X_{n_2}^2)$
$h(X_1^3)h(X_2^3)\dots h(X_{n_3}^3)\dots h(X_1^m)h(X_2^m)\dots h(X_{n_m}^m)1\langle q_m,2\rangle w_1w_2\dots w_r \vdash^{\circ *}$

$1\overline{h}(X_{n_m-1}^m)\dots\overline{h}(X_{j+2}^k)\overline{h}(X_{j+1}^k)\overline{h}(X_j^k)\dots\overline{h}(X_2^1)\overline{h}(X_1^1)\overline{h}(S)h(S)h(X_1^1)h(X_2^1)\dots$
$h(X_{n_1}^1)h(X_1^2)h(X_2^2)\dots h(X_{n_2}^2)h(X_1^3)h(X_2^3)\dots h(X_{n_3}^3)\dots$
$\dots h(X_1^m)h(X_2^m)\dots h(X_{n_m}^m)1\langle q_{m+r-1},2\rangle w_r$

automat M používá pravidla podle kroku **IV** a čte vstupní řetězce terminálních symbolů. Automat M simuluje použití pravidel tvaru (A,q,w,p) původní gramatiky G, kde $A\in V-T$, $p,q\in W-F$, $w\in T^*$. Automat zaznamenává kódy inverzních symbolů A na levou stranu oboustranného zásobníku a čte přitom ze vstupu řetězce w. V gramatice G jsou tyto terminální řetězce generovány. Tato část je podrobněji popsána v tvrzení F.

V posledním výpočetním kroku přechází automat M do koncového stavu. Tento přechod zajistí pravidlo tvaru $1|1\langle q,2\rangle y\rightarrow\overline{h}(A)|\varepsilon f$ definované v bodě **V**, kde $q\in(W-T)$, $y\in T^*$, $A\in(V-T)$ a $f\in F_M$. Pokud dosáhne automat tohoto koncového stavu, oboustranný zásobník je prázdný a vstupní páska je přečtená, můžeme prohlásit výpočet za úspěšný - věta je automatem M akceptována. V jiném případě automat M větu neakceptuje. Poznamenejme, že oboustranný zásobník je vyprázdněn pouze pomocí vlastností volné grupy a poslední část vstupu je přečtena výše uvedeným pravidlem, které v původní gramatice G odpovídá pravidlu (A,q,y,t), kde $A\in(V-T)$, $q\in W-F$, $y\in T^*$ a $t\in F$. □

Tvrzení E. Pokud $1\overline{h}(A_n)\dots\overline{h}(A_1)h(A_1)\dots h(A_n)h(B_1)\dots h(B_m)1\langle u,1\rangle\omega\vdash^{\circ i}$
$1\overline{h}(B_i)\dots\overline{h}(B_1)\overline{h}(A_n)\dots\overline{h}(A_1)h(A_1)\dots h(A_n)h(B_1)\dots h(B_m)h(x_1)\dots h(x_i)1\langle p,1\rangle\omega$ v M,
potom $A_1\dots A_n\#B_1\dots B_m u\Rightarrow^i A_1\dots A_nB_1\dots B_i\#B_{i+1}\dots B_mx_1\dots x_ip$ v G,
kde $A_1,\dots,A_n,B_1,\dots,B_m\in(V-T)$, $x_1,\dots,x_i\in(V-T)^*$, $u,p\in(W-F)$, $0\le i\le m$.

Nechť $i=0$. Potom $1\overline{h}(A_n)\dots\overline{h}(A_1)h(A_1)\dots h(A_n)h(B_1)\dots h(B_m)1\langle u,1\rangle\omega\vdash^{\circ 0}$
$1\overline{h}(A_n)\dots\overline{h}(A_1)h(A_1)\dots h(A_n)h(B_1)\dots h(B_m)1\langle u,1\rangle\omega$ v M. Je zřejmé, že také platí
$A_1\dots A_n\#B_1\dots B_mu\Rightarrow^0 A_1\dots A_n\#B_1\dots B_mu$ v G.

Indukční hypotéza: Předpokládejme, že tvrzení E platí pro každé $i\le l$, kde l je celé nezáporné číslo.

Indukční krok: Uvažujme výpočetní krok tvaru
$1\overline{h}(A_n)\dots\overline{h}(A_1)h(A_1)\dots h(A_n)h(B_1)\dots h(B_m)1\langle u,1\rangle\omega\vdash^{\circ l+1}$
$1\overline{h}(B_{l+1})\overline{h}(B_l)\dots\overline{h}(B_1)\overline{h}(A_n)\dots\overline{h}(A_1)h(A_1)\dots h(A_n)h(B_1)\dots h(B_m)h(x_1)\dots$
$h(x_l)h(x_{l+1})1\langle q,1\rangle\omega$ vyjádřeme si tento krok jako $1\overline{h}(A_n)\dots\overline{h}(A_1)h(A_1)\dots h(A_n)$
$h(B_1)\dots h(B_m)1\langle u,1\rangle\omega\vdash^{\circ l} 1\overline{h}(B_l)\dots\overline{h}(B_1)\overline{h}(A_n)\dots\overline{h}(A_1)h(A_1)\dots h(A_n)h(B_1)\dots$

$h(B_m)h(x_1)\dots h(x_l)1\langle p,1\rangle\omega \vdash^{\circ} 1\overline{h}(B_{l+1})\overline{h}(B_l)\dots\overline{h}(B_1)\overline{h}(A_n)\dots\overline{h}(A_1)h(A_1)\dots$
$h(A_n)h(B_1)\dots h(B_m)h(x_1)\dots h(x_l)h(x_{l+1})1\langle q,1\rangle\omega$ v M, kde $q \in (W-F)$, $0 \le l \le m$.

Podle indukční hypotézy $A_1\dots A_n\#B_1\dots B_m u \Rightarrow^l A_1\dots A_nB_1\dots B_l\#$ $B_{l+1}\dots B_m x_1\dots x_l p \Rightarrow A_1\dots A_nB_1\dots B_lB_{l+1}\#B_{l+2}\dots B_m x_1\dots x_l x_{l+1} q$ v G. Existuje pouze jediný typ pravidla v R, který zajistí výpočet $1\overline{h}(B_l)\dots\overline{h}(B_1)\overline{h}(A_n)\dots\overline{h}(A_1)h(A_1)\dots h(A_n)$ $h(B_1)\dots h(B_m)h(x_1)\dots h(x_l)1\langle p,1\rangle\omega \vdash^{\circ} 1\overline{h}(B_{l+1})\overline{h}(B_l)\dots\overline{h}(B_1)$ $\overline{h}(A_n)\dots\overline{h}(A_1)h(A_1)\dots h(A_n)h(B_1)\dots h(B_m)h(x_1)\dots h(x_l)h(x_{l+1})1\langle q,1\rangle\omega$ v M, přesněji se jedná o pravidlo $1|1\langle p,1\rangle \to 1\overline{h}(B_{l+1})|h(x_{l+1})1\langle q,1\rangle \in R$. Podle konstrukce musí existovat pravidlo (B_{l+1},p,x_{l+1},q) v P, tedy $A_1\dots A_n\#B_1\dots B_m u \Rightarrow^l$ $A_1\dots A_nB_1\dots B_l\#B_{l+1}\dots B_m x_1\dots x_l p \Rightarrow$ $A_1\dots A_nB_1\dots B_lB_{l+1}\#B_{l+2}\dots B_m x_1\dots x_l x_{l+1} q$ také v G a tvrzení E je platné. □

Tvrzení F. Pokud $1\overline{h}(A_n)\dots\overline{h}(A_1)h(A_1)\dots h(A_n)h(B_1)\dots h(B_m)1\langle u,2\rangle b_1\dots b_j \vdash^{\circ i}$ $1\overline{h}(B_i)\dots\overline{h}(B_1)\overline{h}(A_n)\dots\overline{h}(A_1)h(A_1)\dots h(A_n)h(B_1)\dots h(B_i)h(B_{i+1})\dots h(B_m)1$ $\langle p,2\rangle b_{i+1}\dots b_j$ v M, potom $A_1\dots A_n\#B_1\dots B_m a_1\dots a_k u \Rightarrow^i A_1\dots A_nB_1\dots B_i\#$ $B_{i+1}\dots B_m a_1\dots a_k b_1\dots b_i p$ v G, kde $A_1,\dots,A_n,B_1,\dots,B_m \in V-T$, $a_1,\dots,a_k$, $b_1,\dots,b_j \in T^*$ and $p,u \in W-F$, $0 \le i \le m$.

Nechť $i=0$. Potom $1\overline{h}(A_n)\dots\overline{h}(A_1)h(A_1)\dots h(A_n)h(B_1)\dots h(B_m)1\langle u,2\rangle b_1\dots b_j \vdash^{\circ 0}$ $1\overline{h}(A_n)\dots\overline{h}(A_1)h(A_1)\dots h(A_n)h(B_1)\dots h(B_m)1\langle u,2\rangle b_1\dots b_j$ v M.
Je zřejmé, že také $A_1\dots A_n\#B_1\dots B_m a_1\dots a_k u \Rightarrow^0 A_1\dots A_n\#B_1\dots B_m a_1\dots a_k u$ platí v G.

Indukční hypotéza: Předpokládejme, že tvrzení F platí pro všechna $i \le l$, kde l je celé nezáporné číslo.

Indukční krok: Uvažujme výpočetní krok tvaru
$1\overline{h}(A_n)\dots\overline{h}(A_1)h(A_1)\dots h(A_n)h(B_1)\dots h(B_m)1\langle u,2\rangle b_1\dots b_j \vdash^{\circ l+1}$
$1\overline{h}(B_{l+1})\overline{h}(B_l)\dots\overline{h}(B_1)\overline{h}(A_n)\dots\overline{h}(A_1)h(A_1)\dots h(A_n)h(B_1)\dots h(B_m)1\langle q,2\rangle b_{l+2}\dots b_j$ přesněji si vyjádříme výpočet jako $1\overline{h}(A_n)\dots\overline{h}(A_1)h(A_1)\dots h(A_n)h(B_1)\dots h(B_m)1\langle u,2\rangle b_1\dots b_j \vdash^{\circ l}$
$1\overline{h}(B_l)\dots\overline{h}(B_1)\overline{h}(A_n)\dots\overline{h}(A_1)h(A_1)\dots h(A_n)h(B_1)\dots h(B_m)1\langle p,2\rangle b_{l+1}\dots b_j \vdash^{\circ}$
$1\overline{h}(B_{l+1})\overline{h}(B_l)\dots\overline{h}(B_1)\overline{h}(A_n)\dots\overline{h}(A_1)h(A_1)\dots h(A_n)h(B_1)\dots h(B_m)1\langle q,2\rangle b_{l+2}\dots b_j$ v M, kde $0 \le l \le j \le m$, $q \in (W-F)$.

Podle indukční hypotézy $A_1\dots A_n\#B_1\dots B_m a_1\dots a_k u \Rightarrow^l$
$A_1\dots A_nB_1\dots B_l\#B_{l+1}\dots B_m a_1\dots a_k b_1\dots b_l p \Rightarrow$
$A_1\dots A_nB_1\dots B_lB_{l+1}\#B_{l+2}\dots B_m a_1\dots a_k b_1\dots b_l b_{l+1} q$ v G, kde $0 \le l \le m$.

V tomto případě existuje jediný způsob, kterým může automat M uskutečnit tento výpočet $1\overline{h}(B_l)\dots\overline{h}(B_1)\overline{h}(A_n)\dots\overline{h}(A_1)h(A_1)\dots h(A_n)h(B_1)\dots h(B_m)1\langle p,2\rangle b_{l+1}\dots b_j \vdash^{\circ}$ $1\overline{h}(B_{l+1})\overline{h}(B_l)\dots\overline{h}(B_1)\overline{h}(A_n)\dots\overline{h}(A_1)h(A_1)\dots h(A_n)h(B_1)\dots h(B_m)1\langle q,2\rangle$ $b_{l+2}\dots b_j$. Tento výpočet proběhl za použití pravidla tvaru $1|1\langle p,2\rangle b_{l+1}$ $\to 1\overline{h}(B_{l+1})|1\langle q,2\rangle \in R$. Podle bodu **IV** musí také existovat pravidlo $(B_{l+1},p,b_{l+1},q) \in P$ kde $B_{l+1} \in (V-T)$, $p,q \in (W-F)$, $b_{l+1} \in T^*$, tedy $A_1\dots A_nB_1\dots B_l\#B_{l+1}\dots B_m a_1\dots a_k b_1\dots b_l p \Rightarrow A_1\dots A_nB_1\dots B_lB_{l+1}\#$ $B_{l+2}\dots B_m a_1\dots a_k b_1\dots b_l b_{l+1} q$ v původní gramatice G a tvrzení F je platné. □

Pomocí dokázaných tvrzení D, E a F jsme potvrdili platnost inkluze $L(M) \subseteq L(G)$. Výsledkem tedy je celková platnost $L(G) = L(M)$. ■

9.1 Příklad konstrukce rozšířeného oboustranného zásobníkového automatu nad volnou grupou s redukovanou zásobníkovou abecedou

Pro lepší pochopení této kapitoly si uveďme příklad, ve kterém bude ukázána konstrukce **E2PDA°R** vycházející z zleva rozšířené frontové gramatiky G.

Uvažujme tedy zleva rozšířenou frontovou gramatiku splňující lemma 3.1,
$G = (V, T, W, F, s, P)$, kde

- $V = \{S, A, B, a, b\}$,
- $T = \{a, b\}$,
- $W = \{Q, f\}$,
- $F = \{f\}$,
- $s = SQ$,
- $P = \{$
  p_1: (S, Q, AB, Q),
  p_2: (A, Q, aa, Q),
  p_3: $(B, Q, bb, f)\}$

Tato gramatika G generuje větu $aabb$ následujícím způsobem

$$\#s = \#SQ \Rightarrow S\#ABQ[p_1] \Rightarrow SA\#BaaQ[p_2] \Rightarrow SAB\#aabbf[p_3]$$

Nyní přistoupíme ke konstrukci rozšířeného oboustranného zásobníkového automatu nad volnou grupou s redukovanou zásobníkovou abecedou $M = (Q, T, Z, R, z, 1, 1, F_M)$, kde

- $Q = \{z, f, \langle Q, 1\rangle\ \langle Q, 2\rangle\}$,
- $T = \{a, b\}$,
- $Z = \{0, \overline{0}, 1, \overline{1}\}$,
- $R = \{$
  p_1: $1|1z \rightarrow 1|h(S)1\langle Q, 1\rangle$ podle počátečního řetězce $s = SQ$,
  p_2: $1|1\langle Q, 1\rangle \rightarrow 1\overline{h}(S)|h(AB)1\langle Q, 1\rangle$ podle $(S, Q, AB, Q) \in P$,
  p_3: $1|1\langle Q, 1\rangle \rightarrow 1|1\langle Q, 2\rangle$ podle $Q \in W$,
  p_4: $1|1\langle Q, 2\rangle aa \rightarrow 1\overline{h}(A)|1\langle Q, 2\rangle$ podle $(A, Q, aa, Q) \in P$,
  p_5: $1|1\langle Q, 2\rangle bb \rightarrow \overline{h}(B)|\varepsilon f$ podle $(B, Q, bb, f) \in P\}$,
- $F_M = \{f\}$

Zavedeme kódování symbolů z $(V - T)$:

$$\begin{aligned} h(S) &= 00010, & \overline{h}(S) &= \overline{01000}, \\ h(A) &= 00110, & \overline{h}(A) &= \overline{01100}, \\ h(B) &= 01000, & \overline{h}(B) &= \overline{00010} \end{aligned}$$

Konstrukce automatu M je kompletní. Zbývá ukázat jakým způsobem automat M přijímá obsah vstupní pásky. Abychom mohli proces přijetí věty jazyka srovnat s generováním stejné věty v gramatice G, tak jako obsah vstupní pásky zvolíme $aabb$.

oboustranný zásobník	stav	vstupní páska	pravidlo
11	z	$aabb$	
$1h(S)1$	$\langle Q, 1\rangle$	$aabb$	p_1
$1\overline{h}(S)h(S)h(AB)1$	$\langle Q, 1\rangle$	$aabb$	p_2
$1h(A)h(B)1$	$\langle Q, 1\rangle$	$aabb$	redukce obsahu zásobníku
$1h(A)h(B)1$	$\langle Q, 2\rangle$	$aabb$	p_3
$1\overline{h}(A)h(A)h(B)1$	$\langle Q, 2\rangle$	bb	p_4
$1h(B)1$	$\langle Q, 2\rangle$	bb	redukce obsahu zásobníku
$\overline{h}(B)h(B)$	f	ε	p_5
ε	f	ε	redukce obsahu zásobníku

Obsah oboustranného zásobníku je prázdný, aktuální stav automatu M je f. Věta $aabb$ je automatem M korektně přijata.

Kapitola 10

Praktické využití

Přestože tato práce přináší nové výsledky na poli teoretické informatiky, pokusíme se nyní nastínit možné využití jejich výsledků i v praktické oblasti.

10.1 Překladače

Hlavní oblastí využití formálních modelů nad volnými grupami by se měla stát oblast překladačů. Většina současných překladačů je založena na bezkontextových gramatikách popisujících bezkontextový jazyk. Bezkontextová gramatika nad volnou grupou zachovává tvar bezkontextových pravidel, ale dokáže popsat o dvě třídy vyšší jazyk — rekurzivně vyčíslitelný jazyk, může se tedy stát zajímavým řešením pro syntaktický analyzátor pracující shora dolů.

Kromě gramatiky lze pro kompilátor použít také zásobníkový automat, který je vhodný pro syntaktický analyzátor pracující metodou zdola nahoru. Jednou ze studií, jak využít některý zde nově zavedený formální model nad volnou grupou, je diplomová práce [1], ve které je navržen a implementován překladač založený na zásobníkovém automatu nad volnou grupou. Navržený zásobníkový automat je ale nedeterministický a časově tedy značně náročný. Tento aspekt je jednou z nevýhod syntaktické analýzy pracující zdola nahoru, je to způsobeno tím, že prázdný řetězec může být kdekoliv a kdykoliv rozšířen na řetězec složený ze vzájemně inverzních nonterminálních symbolů. Praktické využití pro překladače založené na syntaktické analýze zdola nahoru by tedy znamenalo přidání nějaké další režie pro lepší predikci kdy a kde rozšířit prázdný řetězec.

10.2 Bezpečnostní kód

V této práci definovaný "zrcadlový kód" by mohl nalézt využití i v jiných oblastech informačních technologií. Například by se mohlo jednat o chybu-detekující kód. Jednalo by se o kód, který se dá nejlépe přirovnat k tzv. zdvojenému kódu.

Zdvojený kód využívá k detekci chyby zdvojení, což znamená, že každý bit je reprezentován dvěma stejnými bity, například pro kód $\ldots 101 \ldots$ by byl zdvojený kód $\ldots 110011 \ldots$. V případě chyby $\ldots \underline{10}0011 \ldots$ je kód detekován jako poškozený. Podobně by se pro kód $\ldots 101 \ldots$ vytvořil zrcadlový kód $\ldots 101101 \ldots$ a v případě chyby $\ldots \underline{0}0110\underline{1}$ je kód opět detekován jako chybný.

Pokud budeme uvažovat možnost, že v kódu může dojít ke ztrátě informace, jeden nebo více bitů je při přenosu ztraceno, zdvojený kód je schopen detekovat takovouto chybu pouze při ztrátě lichého počtu bitů. Například z $\ldots 110011 \ldots$ na $\ldots 11\underline{0}11 \ldots$ je chyba rozpoznána. V případě přenosu $\ldots 110011 \ldots$ na $\ldots 1100 \ldots$ došlo ke ztrátě 11, ale zdvojený kód tuto chybu nedetekuje. Zrcadlový kód dokáže zjistit chybu způsobenou ztrátou informace lépe. Kontroluje se zda je každé slovo vnitřně reverzní, tzn. že je tvaru $a_1 a_2 \ldots a_n a_n \ldots a_2 a_1$ a má definovanou délku n. Zrcadlový kód tedy v tomto případě má lepší vlastnosti než kód zdvojený.

10.3 Expertní simulace

Samotný proces zkracování řetězců pomocí volné grupy by mohl najít uplatnění ve vybraných situacích, kde při sloučení, spojení nebo nalezení určitých prvků dojde k jejich neutralizaci nebo eliminaci. Přitom nezáleží na jejich pořadí. To znamená, že pokud bude například připojen řetězec x k řetězci $\overline{x}$ v nějaké situaci popsané jako přechod z $\ldots xA \ldots$ na $\ldots x\overline{x} \cdots = \ldots \varepsilon \ldots$, tak stejný výsledek bude mít situace při přechodu z $\ldots \overline{x}A \ldots$ na $\ldots \overline{x}x \cdots = \ldots \varepsilon \ldots$.

Konkrétním příkladem může být zavedení volné grupy do speciálních L-systémů prezentovaných v [25]. V této publikaci jsou představeny nové L-systémy rozšířené o řízení pomocí zakazujících nebo povolujících podmínek. Aplikace těchto systémů pak může být v biologii, kde jsou tyto systémy schopny popisovat například situaci napadení organické buňky virem, její růst, uzdravení nebo i smrt. Logickým rozšířením těchto systémů mohou být E0L gramatiky nad volnými grupami, které by mohli lépe popsat proces léčení, kdy organická buňka získá určitou léčebnou látku, která s reakcí prvku představujícího onemocnění zmizí i s tímto prvkem. Buňka pak tedy přijde o stejný počet léčebných látek tak i stejný počet prvků představujících onemocnění, její výsledný stav bude záviset na tom, jaké prvky v buňce zbyly. Tento příklad je pouze hrubý náčrt, při praktickém využití by celý proces závisel na konkrétním organismu a možném onemocnění.

Kapitola 11

Závěr

V tomto dokumentu byly modifikovány některé vybrané více či méně známé formální modely. Tyto modifikace převážně spočívaly v zavedení relace přímé derivace nad volnými grupami místo nad volnými monoidy, jak je to v teoretické informatice běžné. Motivací pro tuto změnu je snaha o zvýšení vyjadřovací síly takto upravených formálních modelů. V případě modelů založených na gramatikách se podařilo dokázat, že touto modifikací opravdu vyjadřovací sílu zvýšíme a přitom zachováme tvar přepisovacích pravidel, který je definovaný v originálních gramatikách. Získali jsme tedy nové formální modely $\mathbf{CF}^\circ$, $\mathbf{E0L}^\circ$, $\mathbf{CF}^\circ\mathbf{R}$ a $\mathbf{E0L}^\circ\mathbf{R}$, které využívají pouze bezkontextových přepisovacích pravidel (tzn. přepisovacích pravidel, která mají na levé straně pouze jediný symbol) a popisují tak třídu rekurzivně vyčíslitelných jazyků.

Neméně významnou částí je také snaha o redukci počtu nonterminálních symbolů v těchto nově zavedených formálních modelech, přičemž samozřejmě zachováváme tvar přepisovacích pravidel i vyjadřovací sílu tohoto modelu. Tato problematika byla například velice dobře popsána v [13] a bylo zde dosaženo i velice dobrých výsledků (množina nonterminálních symbolů byla redukována pouze na dva páry závorek, ale k jejich odstranění je zapotřebí kontextových pravidel). V této práci je představena $\mathbf{E0L}^\circ\mathbf{R}$ gramatika, která k popisu rekurzivně vyčíslitelného jazyka potřebuje pouze šest nonterminálních symbolů, nebo v případě automatů byl představen $\mathbf{E2PDA}^\circ\mathbf{R}$ automat, který dokáže přijímat rekurzivně vyčíslitelný jazyk pouze za pomoci čtyř nonterminálních symbolů, které tvoří celou zásobníkovou abecedu.

Tato práce je pouze prvním krokem v oblasti formálních modelů nad volnými grupami, její pokračování by se mělo převážně zabývat studií o časové a paměťové náročnosti a porovnat ji s již známými formálními modely. Důležitou částí budoucího výzkumu se může stát i studie zaměřená na deterministické verze zde nově popsaných gramatik a automatů, zvláště otevřený problém je, zda bude zachována síla odpovídající nedeterministickým verzím. Pokud výsledky v těchto oblastech budou příznivé, měli by být velmi dobrou motivací pro nalezení praktického využití těchto nových formálních modelů, které jsou v tomto okamžiku výborným výsledkem převážně v oblasti teoretické.

Nyní si provedeme zběžnou rekapitulaci dosažených výsledků této práce. V případě gramatik byly zkoumány dva pohledy vzhledem k derivacím:

- *Sekvenční přístup:* byla definována bezkontextová gramatika nad volnou grupou, která v každém derivačním kroku přepisuje pouze jediný nonterminální symbol, derivace jsou tedy prováděny sekvenčně. Bylo dokázáno, že tento nově zavedený formální model má stejnou sílu jako Turingův stroj a popisuje tedy třídu rekurzivně vyčíslitelných jazyků, $\mathbf{CF}^\circ = \mathbf{RE}$. Požadavky na gramatiku typu 0, podle které lze $\mathbf{CF}^\circ$ gramatiku sestrojit i samotná konstrukce je ukázána na příkladě.

Dále byla zkoumána možnost redukce počtu nonterminálních symbolů a získali jsme jako výsledek, že každý rekurzivně vyčíslitelný jazyk lze popsat pomocí bezkontextové gramatiky nad volnou grupou pouze s osmi nonterminálními symboly, $\mathbf{CF}^\circ\mathbf{R} = \mathbf{RE}$, přičemž při všech možných derivačních krocích se využije pouze sedm nonterminálních symbolů, jeden z nich musí být zadefinován pouze z důvodu, aby totální abeceda této gramatiky mohla být použita jako generátor volné grupy. Konstrukce této redukované verze je opět ilustrována na příkladě.

- *Paralelní přístup:* jako další formální model vybraný k modifikaci byla zvolena E0L gramatika, její pravidla jsou podobná bezkontextové gramatice, ale derivace lze provádět paralelně, to znamená, že v každém derivačním kroku se musí přepsat všechny nonterminální symboly v dané větné formě. Připomeňme si, že pokud jeden nebo více symbolů nelze přepsat a větná forma je složena pouze z terminálů, derivace je korektně ukončena. Pokud nelze provést derivaci u jednoho nebo více symbolů a větná forma obsahuje jeden nebo více nonterminálních symbolů derivace je zablokována.

  Byla definována E0L gramatika nad volnou grupou a bylo dokázáno, že tato gramatika má stejnou vyjadřovací schopnost jako Turingův stroj, stejně jako $\mathbf{CF}^\circ$ tedy tato gramatika popisuje třídu rekurzivně vyčíslitelných jazyků, $\mathbf{E0L}^\circ = \mathbf{RE}$.

  Stejně jako u bezkontextových gramatik nad volnou grupou tak i v tomto případě se práce zabývá redukcí počtu nonterminálních symbolů. Bylo dokázáno, že každý rekurzivně vyčíslitelný jazyk lze popsat pomocí E0L gramatiky nad volnou grupou, která má pouze šest nonterminálních symbolů, $\mathbf{E0L}^\circ\mathbf{R} = \mathbf{RE}$. Obě konstrukce jsou pro lepší pochopení opět doprovázeny příklady.

Pokud uvážíme různé generativní síly tříd bezkontextových a E0L gramatik, $\mathbf{CF} \subset \mathbf{E0L}$, je také zajímavým výsledkem stejná síla gramatik bezkontextových nad volnou grupou a E0L gramatik nad volnou grupou, $\mathbf{CF}^\circ = \mathbf{E0L}^\circ$.

Tato tématika byla publikována v časopisecké publikaci [6], na několika mezinárodních konferencích [7], [3] a [8] a dále také na národních konferencích [4], [10].

Zbylá část této práce se zabývá využitím volných grup u zásobníkového automatu. Byly definovány rozšířené oboustranné zásobníkové automaty nad volnou grupou. Tato modifikace nepřináší zvýšení síly, protože už samotné rozšířené oboustranné zásobníkové automaty nad volným monoidem mají sílu Turingových strojů, což bylo dokázáno v [2].

Běžný rozšířený zásobníkový automat byl modifikován tak, aby bylo možné vkládat a odebírat symboly z obou jeho stran, tato konstrukce dovoluje i více transformací. Například pokud povolíme vkládání symbolů jen z jedné strany a odebírání ze strany druhé, získáme tak frontu. Dále pak v tomto případě záměna volného monoidu za volnou grupu přináší redukci počtu pravidel. Nejsou totiž potřeba žádná odebírací pravidla. Při správném výpočtu se oboustranný zásobník pomocí vlastností volné grupy sám zkracuje v průběhu své činnosti, je tedy dosaženo menší paměťové náročnosti v porovnání s oboustranným rozšířeným zásobníkovým automatem nad volným monoidem popsaném v [2]. Bylo tedy dokázáno, že síla rozšířeného oboustranného zásobníkového automatu nad volnou grupou zůstává rovna síle Turingova stroje, $\mathbf{E2PDA}^\circ = \mathbf{RE}$.

I v případě zásobníkových automatů se tato práce zabývala redukcí počtu nonterminálních symbolů, konkrétně se jednalo o redukci počtu nonterminálních symbolů zásobníkové abecedy. Bylo dokázáno, že k popisu každého rekurzivně vyčíslitelného jazyka postačuje oboustranný rozšířený zásobníkový automat nad volnou grupou pouze se čtyřmi symboly zásobníkové abecedy, $\mathbf{E2PDA}^\circ\mathbf{R} = \mathbf{RE}$.

Tato problematika byla publikována v časopisecké publikaci [5], na mezinárodní konferenci [7] a dále také na národní konferenci [9].

Zhodnocení výše uvedených výsledků můžeme rozdělit do dvou skupin:

- *Teoretický přínos:* je zřejmý, v případě gramatik nad volnými grupami jsme získali formální modely, které používají pouze pravidla bezkontextového tvaru, $A \rightarrow x$, ale jejich vyjadřovací síla odpovídá síle Turingova stroje, navíc je této síly u gramatik dosaženo i s redukovaným počtem nonterminálních symbolů nebo u oboustranného automatu s redukovanou zásobníkovou abecedou. Tento teoretický přínos byl také potvrzen přijetím dvou článků, které pojednávají o $\mathbf{CF}^\circ\mathbf{R}$, $\mathbf{E0L}^\circ\mathbf{R}$ a $\mathbf{E2PDA}^\circ\mathbf{R}$, do mezinárodních časopisů, konkrétně se jedná o [6] a [5].

- *Praktický přínos:* byla zkoumána možnost použit některý z navržených modelů pro syntaktický analyzátor. V diplomové práci Ing. Michala Berky, [1], byl úspěšně implementován syntaktický analyzátor založený na zásobníkovém automatu nad volnou grupou. V této práci byl zaveden pojem expanze, který na libovolném místě rozšiřuje ε na $x\overline{x}$ nebo $\overline{x}x$, kde x může být terminální symbol, nonterminální symbol nebo i řetězec.

Literatura

[1] Berka, M.: Zásobníkový automat nad volnou grupou, *Diplomová práce*, Vysoké učení technické v Brně, Fakulta informačních technologií, 2005.

[2] Bidlo, R.: O síle některých modifikovaných formálních modelů, *Disertační práce*, Vysoké učení technické v Brně, Fakulta informačních technologií, 2007, (poddáno k oponentuře).

[3] Bidlo, R.: Context-Free Grammars over Free Groups, *Proceedings of 8th International Conference* ISIM'05, 2005, p. 95-100.

[4] Bidlo, R., Blatný, P. How to Generate Recursively Enumerable Languages Using Only Context-free Productions and Eight Nonterminals, *Proceedings of 11th Conference and Competition Student* EEICT 2005, Vol. *3*, 2005, p. 536-541.

[5] Bidlo, R., Blatný, P., Meduna, A.: Automata with Two-Sided Pushdowns Defined over Free Groups Generated by Reduced Alphabets, Kybernetika, Vol. *2007*, No. 1, 2007, p. 21-35.

[6] Bidlo, R., Blatný, P., Meduna, A.: Context-Free and E0L Derivations over Free Groups, Schedae Informaticae, Krakov, 2007, p. 14-24.

[7] Bidlo, R., Blatný, P., Meduna, A.: Formal Models over Free Groups. *PRE-PROCEEDINGS of the 1st Doctoral Workshop on Mathematical and Engineering Methods in Computer Science*, 2005, p. 193-199.

[8] Blatný, P.: E0L Grammars on Free Groups, *Proceedings of 8th International Conference* ISIM'05, 2005, p. 81-86.

[9] Blatný, P., Bidlo, R.: Two-Sided Pushdown Automata Over Free Groups, *Proceedings of 12th Conference and Competition Student* EEICT 2006, Vol. *3*, 2006.

[10] Blatný, P., Bidlo, R.: The Parallel Generation of Recursively Enumerable Languages Using Only Context-free Productions and Six Nonterminals, *Proceedings of 11th Conference and Competition Student* EEICT 2005, Vol. *3*, 2005, p. 541-546.

[11] Dassow, J., Mitrana, V.: Finite Automata Over Free Groups. *Int. Journalof Algebra and Computation* Vol. *10*, No. *6*, 2000, p. 725-737.

[12] Drápal, A.: Teorie grup - základní aspekty. Karolinum, Praha, 2000.

[13] Geffert, V.: How to generate languages using only two pairs of parentheses. *J. Inform. Process. Cybernet*, (EIK), 27, 303-15, 1991.

[14] Jacobson, N.: Basic Algebra, 2nd ed., W.H. Freeman, New York, 1989.

[15] Kleijn, H. C. M., Rozemberg, G.: On the Generative Power of Regular Pattern Grammars. *Acta Informatica 20*, 1983, p. 391-411.

[16] Kuroda, S.Y.: Classes of Languages and Linear Bounded Automata, *Inform. Control 7*, 1964, p. 207-223.

[17] Kuroš, A., G.: Kapitoly z obecné algebry. Academia, Praha, 1977.

[18] Lindenmayer, A.: Mathematical models of cellular interaction in development I and II, *J. Theoret. Biol. 54*, 1975, p. 3-22.

[19] Meduna A.: Automata and Languages: Theory and Applications, London, GB, Springer, 2005, p. 892.

[20] Meduna, A.: Symbiotic E0L systems, *Artificial Life: Gramatical Models*, Bucharest, 1995, p. 122-129.

[21] Meduna, A.: Simultaneosly One-Turn Two-Pushdown Automata. *International Journal of Computer Mathematics 82*, Taylor & Francis Informa plc, 2003, p. 1-9.

[22] Meduna, A., Kolář, D.: Homogenous Grammars with a Reduced Number of Non-Context-Free Productions. *Information Processing Letters 81*, Amsterdam, 2002, p. 253-257.

[23] Meduna, A., Kolář, D.: Regulated Pushdown Automata. *Acta Cybernetica 14*, 2000, p. 653-664.

[24] Meduna, A.: Context Free Derivations on Word Monoids. *Acta Informatica 27*, Springer-Verlag, 1990, p. 781-786.

[25] Meduna, A., Švec, M.: Grammars with Context Conditions and Their Applications, Wiley, Hoboken, New Jersey, 2005.

[26] Mitrana, V., Stiebe, R.: The Accepting Power of Finite Automata Over Groups. *TUCS Technical report 70*, 1996.

[27] Penttonen, M.: One-Sided and Two-Sided Context in Formal Grammars. Inf. Control 25, pp. 371-392, 1974.

[28] EDs.: Rozenberg, G., Saloma, A.: Hangbook of Formal Languages, Vol. *1*, Springer, 1997.

[29] Sarkar, P.: Pushdown Automaton with Ability to Flip its Stack. *ECCC*, No. *81*, 2001, p. 1-6.

Seznam symbolů a zkratek

$\square$	konec části důkazu
$\blacksquare$	konec důkazu
$\emptyset$	prázdná množina
$\cup$	sjednocení množin
$\cap$	průnik množin
$\times$	kartézský součin
$\in$	náležející; je prvkem množiny
$\notin$	nenáležející; není prvkem množiny
$\subset$	je vlastní podmnožinou
$\subseteq$	je podmnožinou
ε	řecké písmeno ε, symbol prázdného řetězce
$\Rightarrow$	symbol relace přímé derivace; derivuje
$\Rightarrow^n$	reflexivní a tranzitivní uzávěr relace $\Rightarrow$; derivuje přesně v n krocích
$\Rightarrow^*$	reflexivní a tranzitivní uzávěr relace $\Rightarrow$; derivuje v nula nebo více krocích
$\Rightarrow^+$	tranzitivní uzávěr relace $\Rightarrow$; derivuje v jednom nebo více krocích
$\Rightarrow^\circ$	symbol relace přímé derivace nad volnou grupou; derivuje nad volnou grupou
$\Rightarrow^{\circ n}$	reflexivní a tranzitivní uzávěr relace $\Rightarrow^\circ$; derivuje přesně v n krocích
$\Rightarrow^{\circ *}$	reflexivní a tranzitivní uzávěr relace $\Rightarrow^\circ$; derivuje v nula nebo více krocích nad volnou grupou
$\Rightarrow^{\circ +}$	tranzitivní uzávěr relace $\Rightarrow^\circ$; derivuje v jednom nebo více krocích nad volnou grupou
$\vdash$	symbol relace přechodu; přechází do
$\vdash^n$	reflexivní a tranzitivní uzávěr relace $\vdash$; přechází přesně v n krocích
$\vdash^*$	reflexivní a tranzitivní uzávěr relace $\vdash$; přechází v nula nebo více krocích do
$\vdash^+$	tranzitivní uzávěr relace $\vdash$; přechází v jednom nebo více krocích do
$\vdash \circ$	symbol relace přechodu v automatu nad volnou grupou; přechází do
$\vdash^{\circ n}$	reflexivní a tranzitivní uzávěr relace $\vdash$ v automatu nad volnou grupou; přechází přesně v n krocích
$\vdash^{\circ *}$	reflexivní a tranzitivní uzávěr relace $\vdash$ v automatu nad volnou grupou; přechází v nula nebo více krocích do
$\vdash^{\circ +}$	tranzitivní uzávěr relace $\vdash$ v automatu nad volnou grupou; přechází v jednom nebo více krocích do
$\rightarrow$	symbol přepsání/přechodu; přepiš na/přejdi do

$=$	symbol rovnosti; je rovno
$\leq$	menší nebo rovno
$\geq$	větší nebo rovno
$\cdot$	spojení, konkatenace
$-$	minus; záporné znaménko; operátor opačné hodnoty
$\overline{x}$	nad volnou grupou značí inverzní symbol k symbolu x
$\lceil n \rceil$	n zaokrouhleno na nejbližší vyšší číslo
$\mid$	oddělovač
$\lvert w \rvert$	délka řetězce w
Σ	řecké písmeno Sigma; označení abecedy
$^\circ$	symbol volné grupy, není-li v kontextu uvedeno jinak
*	symbol volného monoidu, není-li v kontextu uvedeno jinak; iterace
$^+$	pozitivní iterace, není-li v kontextu uvedeno jinak
$\sim$	symbol ekvivalence; je ekvivalentní s

E2PDA	třída jazyků přijímaných rozšířenými oboustrannými zásobníkovými automaty
E2PDA$^\circ$	třída jazyků přijímaných oboustrannými zásobníkovými automaty nad volnou grupou; zkratka pro označení těchto automatů
E2PDA$^\circ$**R**	třída jazyků přijímaných rozšířenými oboustrannými zásobníkovými automaty nad volnou grupou s redukovaným počtem symbolů zásobníkové abecedy; zkratka pro označení těchto automatů
CF	třída bezkontextových jazyků
CF$^\circ$	třída jazyků generovaných bezkontextovými gramatikami nad volnými grupami; zkratka pro označení těchto gramatik
CF$^\circ$**R**	třída jazyků generovaných bezkontextovými gramatikami nad volnými grupami s redukovaným počtem nonterminálů; zkratka pro označení těchto gramatik
D0L	třída jazyků generovaných pomocí D0L gramatik (systémů); zkratka pro označení těchto gramatik (systémů)
P0L	třída jazyků generovaných pomocí P0L gramatik (systémů); zkratka pro označení těchto gramatik (systémů)
E0L	třída jazyků generovaných pomocí E0L gramatik; zkratka pro označení těchto gramatik
E0L$^\circ$	třída jazyků generovaných pomocí E0L gramatik nad volnou grupou; zkratka pro označení těchto gramatik
E0L$^\circ$**R**	třída jazyků generovaných pomocí E0L gramatik nad volnou grupou s redukovaným počtem nonterminálů; zkratka pro označení těchto gramatik
CS	třída kontextových jazyků
QG	třída jazyků generovaných frontovými gramatikami
RE	třída rekurzívně vyčíslitelných jazyků
REG	třída regulárních jazyků