VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA INFORMAČNÍCH TECHNOLOGIÍ
ÚSTAV INFORMAČNÍCH SYSTÉMŮ

FACULTY OF INFORMATION TECHNOLOGY
DEPARTMENT OF INFORMATION SYSTEMS


# VÝPOČETNÍCH HISTORIE TURINGOVÝCH STROJŮ A JEJICH GENEROVÁNÍ GRAMATIKAMI S ROZPTÝLENÝM KONTEXTEM

DIPLOMOVÁ PRÁCE
MASTER'S THESIS


AUTOR PRÁCE — Bc. DUŠAN KAJAN
AUTHOR



BRNO 2015

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA INFORMAČNÍCH TECHNOLOGIÍ
ÚSTAV INFORMAČNÍCH SYSTÉMŮ

FACULTY OF INFORMATION TECHNOLOGY
DEPARTMENT OF INFORMATION SYSTEMS

# VÝPOČETNÍCH HISTORIE TURINGOVÝCH STROJŮ A JEJICH GENEROVÁNÍ GRAMATIKAMI S ROZPTÝLENÝM KONTEXTEM

COMPUTATIONAL HISTORIES OF TURING MACHINES AND THEIR GENERATION BY SCATTERED CONTEXT GRAMMARS

DIPLOMOVÁ PRÁCE
MASTER'S THESIS

AUTOR PRÁCE — Bc. DUŠAN KAJAN
AUTHOR

VEDOUCÍ PRÁCE — Prof.RNDr. ALEXANDER MEDUNA, CSc.
SUPERVISOR

BRNO 2015

## Abstrakt

Cílem této diplomové práce je navrhnout metodu, která by na vstupu očekávala Turingův stroj a na výstupu by byla propagujucí gramatika s roptýleným kontextem. Jazyk výstupní gramatiky by byl tvořený množinou řetězců reprezentující všechny validní výpočetní historie stroje na vstupu. Následně se tato práce zabývá otázkami, které z existence takového algoritmu vystávají, zejména ve vztahu k předpokladům, které dosud o výpočetní síle propagujících gramatik s rozptýleným kontextem existují. Názorné ukázky práce s těmito gramatikami a implementace představeného algoritmu v jazyce Haskell jsou také součástí této diplomové práce.



## Abstract

The purpose of this thesis is to show a method, that would transform given Turing machine into propagating scattered context grammar, which language contains all valid computational histories of that particular Turing machine. Afterwards this thesis deals with questions arising from existence of such algorithm, especially in regards to the current knowledge about power of propagating scattered context grammars. Practical examples and implementation of proposed algorithm is also part of this thesis.



## Klíčová slova

gramatiky s rozptýleným kontextem, Turingův stroj, algoritmus, Haskell, propagujíci gramatiky s rozptýleným kontextem, teoretická informatika, výpočetní historie, výpočetní síla

## Keywords

scattered context grammars, propagating scattered context grammars, theory of computation, Turing machine, algorithm, Haskell, computational history, generative power

## Citace

Dušan Kajan: Výpočetních historie Turingových strojů a jejich generování gramatikami s rozptýleným kontextem, diplomová práce, Brno, FIT VUT v Brně, 2015

# Výpočetních historie Turingových strojů a jejich generování gramatikami s rozptýleným kontextem

## Prohlášení

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval samostatně pod vedením pana profesora Alexandra Meduny

........................
Dušan Kajan
26. května 2015

## Poděkování

Rád by som sa poďakoval pánovi profesorovi za odborné vedenie práce a pripomienky.

# Obsah

# Kapitola 1

# Úvod

Otázky limitov počítačov siahajú až do 30-tych rokov 19. storočia, kedy sa matematici a logici začali venovať spôsobom ako skúmať možnosti toho čo je vypočítateľné. Turingove stroje sú jedným zo základných modelov s ktorými teoretická informatika pracuje a boli predstavené Alanom Turingom ako jedno z odpovedí na túto otázku. Naše chápanie súčasnej informatiky stojí na predpoklade, že všetky predstaviteľné algoritmy pomocou ktorých je možné niečo vypočítať sú prevediteľné na ekvivalentný Turingov stroj a naopak, každý Turingov stroj predstavuje nejaký algoritmus. Inak povedané Turingove stroje definujú svojou výpočetnou silou to, čo intuitívne považujeme za efektívne vyčísliteľné [8]. Toto tvrdenie sa nazýva Church-Turingova hypotéza. Môžeme teda vidieť, že Turingov stroj je významným pojmom a o jeho vlastnostiach bolo už napísaných veľa prác. Taktiež bolo zavedených veľa iných formálnych modelov, ktoré sa rôznia svojou vyjadrovacou silou. Napriek tomu všetky relevantné formálne modely sú svojou výpočetnou silou zhora ohraničené práve Turingovými strojmi (existujú samozrejme aj niektoré teoretické modely, ktoré svojou výpočetnou silou Turingove stroje presahujú, avšak tieto nepovažujeme za efektívne vyčísliteľné). Otázky limitov počítačov siahajú až do 30-tych rokov 19. storočia, kedy sa matematici a logici začali venovať spôsobom ako skúmať možnosti toho čo je vypočítateľné

V tejto práci sa budem detailnejšie venovať jednému z takýchto modelov a to propagujúcim gramatikám s rozptýleným kontextom. Ukážem, že napriek tomu, že je ich výpočetná sila považovaná za menšiu ako je sila Turingových strojov, je možné pomocou týchto gramatík simulovať beh Turingovho stroja a získať všetky kroky ktoré v rámci výpočtu spravil.

Táto práca si kladie za cieľ ukázať túto skutočnosť predstavením algoritmu, ktorý na vstupe očakáva Turingov stroj a na jeho výstupe následne vznikne propagujúcu gramatiku s rozptýleným kontextom pričom jazyk prijímaný touto gramatikou bude množina korektných výpočetných histórií daného Turingovho stroja. Ukážeme si, že takto vytvorené gramatiky majú veľmi podobné vlastnosti ako *univerzálny Turingov stroj*, čo značne prekračuje všetky predpoklady o ich výpočetnej sile. Ako si ukážeme, tak napriek jednoduchej myšlienke, je samotný algoritmus pomerne zložitý a počet pravidiel, ktoré bude výsledná gramatika obsahovať je veľmi vysoký. Z tohoto dôvodu, je súčasťou práce aj implementačná časť, ktorá implementuje tento algoritmus a snaží sa poskytnúť jednoduché a rýchlo pochopiteľné rozhranie.

## 1.1 Štruktúra práce

Práca je rozčlenená do piatich kapitol. Úvodná kapitola pojednáva o motivácií voľby témy diplomovej práce, v kapitole 2 sú zopakované základné definície z teórie formálnych jazykov a matematiky, ktoré sú nevyhnutné na pochopenie tejto práce. Tretia kapitola je venovaná teoretickej časti samotnej práce. Zavádza samotný algoritmus (3.1) najprv formálne a následne ponúka aj jeho neformálne vysvetlenie (3.1.1). V jej závere je uvedený matematický dôkaz správnosti mnou predstaveného algoritmu. Kapitola 4 je venovaná praktickému príkladu tvorby gramatiky pomocou mnou prezentovaného algoritmu. V záujme čo najväčšej ilustrácie vytvoreného algoritmu, sú vytvorené dva rôzne príklady, ktoré by mali uľahčiť jeho pochopenie a ukázať aj následnú prácu s výslednou gramatikou. V piatej kapitole sa venujem spôsobu implementácie predstaveného algoritmu v jazyku Haskell. V záverečnej kapitole sú zhrnuté dosiahnuté výsledky, uvedené otvorené problémy, možnosti ďalšieho rozšírenia a zasadenie problému do širších súvislostí.

# Kapitola 2

# Definície

Táto kapitola obsahuje základné definície. Sekcia 2.3 preberá definíciu Turingovho stroja a opakuje tak pojmy, ktoré sú využité v samotnej práci. Sekcia 2.2 obsahuje základné pojmy z teórie formálnych jazykov. Všetky definície v tejto kapitole sú prevzaté z kníh pána profesora Meduny [6] a [7]. Slovenský preklad niektorých častí pochádza z [2].

## 2.1 Matematické definície

V tejto sekcii sú zhrnuté základné pojmy týkajúce sa množín, postupností a relácií, ktorých pochopenie je potrebné v zvyšku práce.

### 2.1.1 Množina

Množina je kolekcia prvkov zobratých z nejakého špecifikovaného univerza, pričom jedinou štruktúrou je členstvo v množine. Skutočnosť, že prvok $a$ je členom množiny $Q$, píšeme $a \in Q$. Skutočnosť, že $a$ sa v množine nenachádza, značíme ako $a \notin Q$. Ak má $Q$ konečný počet prvkov, tak hovoríme o *konečnej množine*. V opačnom prípade sa jedná o *nekonečnú množinu*. Množina, ktorá neobsahuje žiadne prvky sa nazýva *prázdna množina*, značíme ju $\emptyset$. *Kardinalita* množiny $Q$, značená ako $\mathrm{card}(Q)$, je pre konečné množiny rovná počtu prvkov $Q$. Ak je množina $Q$ nekonečná, predpokladáme, že $\mathrm{card}(Q) > k$, pre každé celé číslo $k$[1]. Konečná množina je väčšinou špecifikovaná vymenovaním jej prvkov, zatiaľ čo nekonečné množiny sa väčšinou špecifikujú vlastnosťou $V$, tak že množina obsahuje všetky prvky majúce vlastnosť $V$; symbolicky zapísané ako $Q = \{a : V(a)\}$.

Nech $A$ a $B$ sú dve množiny. Množina $A$ je podmnožinou množiny $B$, symbolicky zapísané $A \subseteq B$, práve vtedy ak každý prvok množiny $A$ zároveň patrí do množiny $B$. $A$ je vlastnou podmnožinou množiny $B$, zapísané $A \subset B$, ak $A \subseteq B$ a zároveň $B$ obsahuje aspoň jeden prvok, ktorý nepatrí do množiny $A$. Ak $A \subseteq B$ a $B \subseteq A$, potom sa A rovná B, zapísané ako $A = B$. *Potenčná množina* $A$, značené $2^A$, je množina všetkých podmnožín $A$. Pre množiny $A$ a $B$ sú operácie zjednotenia, prieniku a rozdielu, značené $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$, definované ako

$$A \cup B = \{a : a \in A \text{ alebo } a \in B\},$$

$$A \cap B = \{a : a \in A \text{ a zároveň } a \in B\},$$

$$A - B = \{a : a \in A \text{ a zároveň } a \notin B\}.$$

[1] $\mathrm{card}(\emptyset) = 0$

Pre vlastnosť $V$, je zjednotenie všetkých prvkov množiny $Q$ splňujúcich túto vlastnosť definované ako

$$\bigcup_V Q = \{a : a \in Q \text{ a zároveň } V(a)\}.$$

*Komplement* alebo *doplnok* množiny $A$ z univerza $U$ je množina $U - A$.

*Postupnosť* je zoznam prvkov z nejakého univerza $U$. Postupnosť je konečná, pokiaľ reprezentuje konečný zoznam prvkov; v opačnom prípade hovoríme o nekonečnej postupnosti. *Dĺžka* konečnej postupnosti $x$, značená $|x|$[2], je počet prvkov v $x$. *Prázdna postupnosť*, značená $\varepsilon$, je postupnosť neobsahujúca žiaden element – takže $|\varepsilon| = 0$. Konečná postupnosť je zvyčajne daná výčtom jej prvkov. Pre $V \subseteq U$, $|x|_V$ značí počet výskytov prvkov z množiny $V$ v postupnosti $x$. Napríklad, nech $x = 0, 1, 0, 0$ je konečná postupnosť, potom $|x| = 4$ a $|x|_{\{0\}} = 3$.

### 2.1.2 Relácie

Pre dva objekty $a$ a $b$, $(a, b)$ znamená usporiadaný pár pozostávajúci z $a$ a $b$ v tomto poradí. Analogicky, usporiadaná $n$-tica, značená $(a_1, \ldots, a_n)$, pre objekty $a_1, \ldots, a_n$. Nech $A$ a $B$ sú dve množiny. *Karteziánsky súčin* $A$ a $B$, značený $A \times B$, je definovaný ako

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}.$$

*Binárna relácia*, alebo skrátene *relácia*, $\rho$ z $A$ do $B$, je ľubovoľná podmnožina $A \times B$; a teda $\rho \subseteq A \times B$. *Definičný obor* $\rho$, značený domain$(\rho)$ a *obor hodnôt* $\rho$, značený range$(\rho)$ sú definované ako

$$\text{domain}(\rho) = \{a : (a, b) \in \rho, \text{pre nejaké } b \in B\}, a$$

$$\text{range}(\rho) = \{b : (a, b) \in \rho, \text{pre nejaké } a \in A\}.$$

Ak $A = B$, potom nazveme $\rho$ reláciou na množine $A$. Ďalej značíme $\Delta X = \{(x, x) | x \in X\}$ a nazveme *diagonálnou reláciou* na X.

**Definícia 2.1.** [3] Nech je $f \subseteq X \times Y$ relácia z $X$ do $Y$ taká, že ku každému $x$ z domain$(f) \subseteq X$ existuje práve jeden prvok $y \in Y$, že $(x, y) \in f$. V tomto prípade nazveme $f$ zobrazením množiny domain$(f)$ do $Y$ resp. z $X$ do $Y$ , pokiaľ nechceme bližšie špecifikovať domain$(f)$ , prípadne zobrazení $X$ do $Y$ , pokiaľ domain$(f) = X$. Namiesto $(x, y) \in f$ píšeme $f(x) = y$ a tiež $f : X \to Y$ namiesto toho aby sme písali $f \subseteq X \times Y$ ako v terminológií binárnych relácií. Zobrazenie $f : X \to Y$ sa nazýva

1. *prosté* alebo *injektívne*, keď pre každé $x_1, x_2 \in X$ platí $f(x1) = f(x2) \Rightarrow x_1 = x_2$ (každý prvok v Y má najviac jeden vzor);
2. *na* alebo *surjektívne*, ak ku každému $y \in Y$ existuje $x \in X$, že $f(x) = y$ (každý prvok v $Y$ má nejaký vzor v $X$);
3. *vzájomne jednoznačné* alebo *1 — 1-značné* inak povedané *bijektívne*, ak domain$(f) = X$ a je zároveň prosté aj na (prvky oboru množín $X$ a $Y$ si vzájomne odpovedajú).

Zobrazenie $\text{id}_X : X \to X$ dané predpisom $\text{id}_X(x) = x$ nazývame *identitou* na X. Je zrejmé, že identita je vlastne iba inak pomenovaná diagonálna relácia.

[2]Symbolom || sa môže označovať aj kardinalita množiny, avšak v tejto práci bude tento symbol použitý výhradne na označenie dĺžky postupnosti.

**Definícia 2.2.** Nech $R \subseteq X \times Y$ je relácia. *Inverznou reláciou* k relácií $R$ nazývame reláciu $R^{-1} = \{(y,x)|\exists(x,y) \in R\}$. Očividne $R^{-1} \subseteq Y \times X$. Ak sú naviac $R$ a $R^{-1}$ zobrazenia, nazýva sa $R^{-1}$ *inverzným zobrazením* k zobrazeniu $R$.

Množinu $A$ nazveme *uzavretou voči binárnej operácií* $\circ$ ak pre každé $a, b \in A$, $a \circ b \in A$. Uzáver voči $n$-árnej operácií je definovaný analogicky. Nech $\rho$ je relácia na množine $A$. Pre $k \geq 0$, $k$-áty produkt $\rho$, $\rho^k$, je rekurzívne definovaný ako

1. $a\rho^0 b$ vtedy a len vtedy ak $a = b$
2. $a\rho^k b$ vtedy a len vtedy ak $a\rho c$ a $c\rho^{k-1}b$ pre nejaké $c$ a $k \geq 1$.

*Tranzitívny uzáver* $\rho$, značený $\rho^+$, je definovaný ako $a\rho^+ b$ vtedy a len vtedy ak $a\rho^k b$ pre nejaké $k \geq 1$, a emphReflexívny a tranzitívny uzáver $\rho$, značený $\rho^*$, je definovaný ako $a\rho^* b$ vtedy a len vtedy ak $a\rho^k b$ pre nejaké $k \geq 0$.

## 2.2 Základy teórie formálnych jazykov

V tejto sekcii sú zhrnuté základné pojmi a koncepty formálnej teórie jazykov.

### 2.2.1 Reťazce

*Abeceda*, $\Sigma$, je konečná, neprázdna množina, ktorej prvky sa nazývajú *symboly*. *Reťazec* (*slovo*) nad abecedou $\Sigma$ je konečná postupnosť symbolov zo $\Sigma$. Vynechávame všetky čiarky, ktoré slúžia ako oddeľovače; a teda pre reťazec $a_1$,$a_2$,... $a_n$, pre nejaké $n \geq 1$, píšeme $a_1 a_2 \ldots a_n$. *Prázdny reťazec*, značený $\varepsilon$, je reťazec, ktorý nie je tvorený žiadnymi symbolmi, čiže prázdna postupnosť. Pomocou $\Sigma^*$, značíme množinu všetkých reťazcov nad abecedou $\Sigma$ (včetne $\varepsilon$). $\Sigma^+$ je potom definovaná ako $\Sigma^* - \{\varepsilon\}$.

Nech $x$ je reťazec nad abecedou $\Sigma$ a je vyjadrený ako $a_1 a_2 \ldots a_n$, kde $a_i \in \Sigma$, pre každé $i = 1\ldots$,n, pre ľubovoľné $n \geq 0$ (pre $n = 0$ sa $x = \varepsilon$). *Dĺžka* $x$, značená $|x|$, je definovaná ako $|x| = n$. *Obrátenie* $x$, značené $reversal(x)$, je definované ako $\mathrm{reversal}(x) = a_n a_{n-1} \ldots a_1$. *Abeceda* x, značená $\mathrm{alph}(x)$, je definovaná ako $\mathrm{alph}(x) = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Neformálne povedané, je to množina všetkých znakov vyskytujúcich sa v $x$. *Najpravejší symbol* $x$, značený $\mathrm{rms}(x)$[3], je definovaný ako $\mathrm{rms}(x) = a_n$, ak $n \geq 1$ alebo $\mathrm{rms}(x) = \varepsilon$ v ostatných prípadoch. Pokiaľ $n \geq 1$, potom pre každé $i = 1,\ldots,n$, nech $\mathrm{sym}(x,i)$ značí -tý symbol v reťazci $x$. Všimnite si, že $|\varepsilon| = 0$, $\mathrm{reversal}(\varepsilon) = \varepsilon$, a $\mathrm{alph}(\varepsilon) = \emptyset$.

Nech $x$ a $y$ sú dva reťazce nad $\Sigma$. Potom, $xy$ je *konkatenácia* $x$ a $y$. Všimnite si, že $x\varepsilon = \varepsilon x = x$. Ak môžeme zapísať $x$ v tvare $x = uv$, pre nejaké $u$,$v \in \Sigma^*$, potom $u$ je prefix reťazca $x$ a $v$ je suffix reťazca $x$. Ak $0 < |u| < |x|$, potom $u$ je vlastný prefix $x$ a pokiaľ $0 < |v| < |x|$, potom $v$ je vlastný suffix $xs$

### 2.2.2 Jazyky

*Jazyk* $L$, nad abecedou $\Sigma$ je ľubovoľná množina reťazcov nad $\Sigma$. $\Sigma^*$ sa nazýva *univerzálny jazyk*, pretože obsahuje všetky reťazce nad $\Sigma$. Ak $L$ je konečná množina, potom je $L$ konečný jazyk, v opačnom prípade ide o *nekonečný jazyk*. *Prázdny jazyk* sa značí $\emptyset$. *Abeceda* jazyka $L$, značená $\mathrm{alph}(L)$, je definovaná ako

$$\mathrm{alph}(L) = \bigcup_{x \in L} \mathrm{alph}(x)$$

[3] Z anglického *Rightmost symbol*

Pre každý jazyk $L$, kde $\{\varepsilon\} \subseteq L \subseteq \Sigma^*$ a zároveň $x \in \Sigma^*$, max-prefix$(x, L)$ značí najdlhší prefix reťazca $x$, ktorý patrí do jazyka $L$, obdobne, max-suffix$(x)$ značí najdlhší sufix, ktorý patrí do jazyka $L$. Nech $L_1$ a $L_2$ sú dva jazyky nad abecedou $\Sigma$. Ak $L_1 \cup \{\varepsilon\} = L_2 \cup \{\varepsilon\}$, potom sa oba jazyky rovnajú, čo značíme $L_1 = L_2$. Nakoľko jazyky sú množiny, môžeme nad nimi prevádzať všetky množinové operácie. A teda

$$L_1 \cup L_2 = \{x|x \in L_1 \text{ alebo } x \in L_2\},$$

$$L_1 \cap L_2 = \{x|x \in L_1 \text{ a zároveň } x \in L_2\},$$

$$L_1 - L_2 = \{x|x \in L_1 \text{ a zároveň } x \notin L_2\}.$$

*Komplement* jazyka $L$, značíme ako $\overline{L}$, je definovaný ako

$$\overline{L} = \{x|x \in \Sigma^*, x \notin L\}.$$

Existujú aj špeciálne operácie, ktoré platia iba pre jazyky. *Konkatenácia* jazykov $L_1$ a $L_2$, značená$L_1L_2$, je definovaná ako

$$L_1L_2 = \{x_1x_2|x1 \in L_1, x_2 \in L_2\}.$$

Všimnite si, že $L\{\varepsilon\} = \{\varepsilon\}L = L$. Pre $n \geq 0$, *n-tá mocnina* $L$, značená $L^n$, je rekurzívne definovaná ako

$$(1)L^0 = \{\varepsilon\}$$
$$(2)L^n = L^{n-1}L.$$

*Iterácia* jazyka $L$, značená $L^*$ je daná ako

$$L^* = \bigcup_{i \geq 0} L^i$$

*Kladná iterácia* jazyka $L$, značená $L^+$ je daná ako

$$L^+ = \bigcup_{i \geq 1} L^i$$

*Reverziu* jazyka $L$, značenú rev$(L)$, definujeme ako

$$\text{rev}(L) = \{\text{rev}(x) : x \in L\}.$$

### 2.2.3 Rodiny jazykov

Analogicky s teóriou množín, množiny ktorých prvkami sú jazyky sa nazývajú *rodiny jazykov*. Rodina jazykov, $\mathscr{L}$, je *$\varepsilon$-free* ak pre každé $L \in \mathscr{L}$, $\varepsilon \notin L$. Rodina konečných jazykov je značená **FIN**.

Rovnako ako aj pri jazykoch, dve rodiny jazykov, $\mathscr{L}_1$ a $\mathscr{L}_2$, považujeme za navzájom sa rovnajúce práve vtedy a len vtedy, ak

$$\bigcup_{L \in \mathscr{L}_1} L \cup \{\varepsilon\} = \bigcup_{L \in \mathscr{L}_2} L \cup \{\varepsilon\}$$

Pokiaľ sú si $\mathscr{L}_1$ a $\mathscr{L}_2$ rovné, značíme $\mathscr{L}_1 = \mathscr{L}_2$. Inklúzia jazykových rodín je chápaná rovnakým spôsobom.

Uzavretosť rodiny jazykov vzhľadom na určitú operáciu, je definovaná analogicky s uzavretosťou množiny.

**Definícia 2.3.** Rodina jazykov $\mathscr{L}$, je uzavretá voči lineárnemu vymazávaniu[4] práve vtedy a len vtedy ak pre každé $L \in \mathscr{L}$, $\lambda(L)$ je takisto prvkom $\mathscr{L}$, kde $\lambda$ je $k$-lineárne vymazanie vzhľadom ku $L$, pre nejaké $k \geq 1$.

### 2.2.4 Gramatiky

**Definícia 2.4.** *Frázová* gramatika je usporiadaná štvorica

$$G = (V, T, P, S),$$

kde

1. $V$ je celková abeceda;
2. $T \subset V$ je abeceda *terminálov*;
3. $P \subset V^*(V - T)V^*xV^*$ je konečné zobrazenie;
4. $S \in V - T$ je *počiatočný symbol*.

Symboly v $V - T$ sa nazývajú neterminály. Dvojice $(u, v) \in P$ sa nazývajú *pravidlá* alebo produkcie, a sú zapisované ako $u \to v$. Pravidlo $u \to v \in P$, pričom $v = \varepsilon$ sa nazýva *vymazávacie pravidlo*. Pokiaľ gramatika neobsahuje žiadne vymazávacie pravidlo, tak ju nazývame *gramatika bez vymazávajúcich pravidiel*.

*Priama derivácia* indukovaná $G$, je zobrazenie medzi reťazcami nad $V$, značené $\Rightarrow_G$, definované ako

$$x \Rightarrow_G y$$

práve vtedy a len vtedy ak, $x_1ux_2$,$y_1vy_2$, a $u \to v \in P$, kde $x_1$,$x_2$,$y_1$,$y_2 \in V^*$.

Nakoľko $\Rightarrow_G$ je zobrazenie, $\Rightarrow_G^k$ je $k$-ta mocnina $\Rightarrow_G$, pre $k \geq 1$, $\Rightarrow_G^+$ je tranzitívny uzáver $\Rightarrow_G$ a $\Rightarrow_G^*$ je reflexívny a tranzitívny uzáver $\Rightarrow_G$. Ďalej rozšírime $\Rightarrow_G^k$ aj na $k = 0$ vtedy a len vtedy ak $x = y$.

Nech D: $S \Rightarrow_G x$ je *derivácia*, pre nejaké $x \in V^*$. $x$ je *vetná forma*. Pokiaľ $x \in T^*$, potom je $x$ *veta*. Ak je $x$ vetou, tak D nazývame *ukončujúcou deriváciou*.

*Jazyk generovaný gramatikou* $G$, značené $L(G)$, je množina všetkých viet, definovaný ako

$$L(G) = \{w \in T^* | S \Rightarrow_G^* w\}.$$

*Rekurzívne spočetný jazyk*, je jazyk generovaný pomocou frázovej gramatiky. Rodina rekurzívne spočetných jazykov sa značí $\mathscr{L}$(RE).

**Definícia 2.5.** *Bezkontextová gramatika* je frázová gramatika

$$G = (V, T, P, S),$$

tak, že každé pravidlo z $P$ má tvar

$$A \to x;$$

kde $A \in V - T$ a $x, y \in T^*$. *Bezkontextový jazyk* je jazyk generovaný bezkontextovou gramatikou. Rodina bezkontextových jazykov je značená $\mathscr{L}$(CF).

[4] anglicky *linear erasing*

**Definícia 2.6.** *Kontextová gramatika* je frázová gramatika

$$G = (V, T, P, S),$$

tak, že každé pravidlo $x \to y \in P$ splňuje podmienku

$$|x| \leq |y|.$$

kde $A \in V - T$ a $x, y \in T^*$. *Bezkontextový jazyk* je jazyk generovaný bezkontextovou gramatikou. Rodina bezkontextových jazykov je značená $\mathscr{L}$(CS).

**Definícia 2.7.** *Maticová gramatika* $H$ je bezkontextová gramatika $G$ rozšírená o konečnú množinu postupností pravidiel, ktoré nazývame matice. V podstate, $H$ vykonáva deriváciu tak, že zvolí maticu a po jej zvolení vykoná postupne všetky pravidlá až kým nedosiahne posledné pravidlo. Potom buď ukončí vykonávanie derivácií, alebo zvolí ďalšiu sekvenciu a pokračuje vykonávaním jej pravidiel.

### Gramatika s rozptýleným kontextom

Táto sekcia je venovaná gramatikám s rozptýleným kontextom, ktoré boli prvý krát skúmané v [1]. Gramatika s rozptýleným kontextom na rozdiel od prechádzajúcich gramatík, ktoré v každom kroku umožnili použiť iba jedno pravidlo, umožňuje v jednom kroku aplikovať viacero pravidiel. Pravidlá majú tvar pravidiel bezkontextovej gramatiky, akurát ich môžeme reťaziť za sebou a tak prepísať viac neterminálov v jednom kroku.

**Definícia 2.8.** *Gramatika s rozptýleným kontextom* je štvorica

$$G = (V, T, P, S),$$

1. $V$ je kompletná abeceda;
2. $T \subset V$ je abeceda *terminálov*;
3. $P$ je konečná množina pravidiel v tvare:

   $$(A_1, \ldots, A_n) \to (x_1, \ldots, x_n),$$

   kde $n \geq 1$, $A_i \in V - T$, a $x_i \in V^*$, pre všetky $i$, $1 \leq i \leq n$;
4. $S \in N$ je *počiatočný symbol* gramatiky $G$.

Ak

$$u = u_1 A_1 \ldots u_n A_n un + 1,$$

$$v = u_1 x_1 \ldots u_n x_n un + 1,$$

a $p = (A_1, \ldots, A_n) \to (x_1, \ldots, x_n) \in P$, kde $u_i \in V^*$, pre každé $1 \leq i \leq n + v1$, potom $G$ vykoná derivačný krok z $u$ do $v$ podľa $p$, značené $u \Rightarrow_G v[p]$, alebo zjednodušene $u \Rightarrow_G v$. Pokiaľ navyše $A_i \notin \text{alph}(u_i)$ pre všetky $1 \leq i \leq n$, potom ide o *najľavejší* derivačný krok, značené

$$u_{lm} \Rightarrow_G v[p];$$

alebo jednoducho, $u \Rightarrow_G v$.

Nech

$$\text{lhs}(p) = A_1 \dots A_n,$$

$$\text{rhs}(p) = x_1 \dots x_n,$$

a

$$\text{len}(p) = n.$$

Pokiaľ je $\text{len}(p) \geq 2$ vravíme ,že $p$ je kontextové pravidlo, zatiaľ čo v prípade, že $\text{len}(p) = 1$, $p$ je bezkontextové. Nech $\Rightarrow_G^k$, $\Rightarrow_G^*$, a $\Rightarrow_G^+$ sú $k$-tá mocnina $\Rightarrow$, pre nejaké $k \geq 0$, reflexívny a tranzitívny uzáver $\Rightarrow$ a tranzitívny uzáver $\Rightarrow$ v tomto poradí. Jazyk generovaný $G$ je značený $L(G)$ a definovaný ako

$$L(G) = \{w \in T^* | S \Rightarrow_G^* w\}.$$

Jazyk $L$ je *jazyk s rozptýleným kontextom* pokiaľ existuje taká gramatika s rozptýleným kontextom $G$, že $L = L(G)$. Rodina jazykov generovaných gramatikami s rozptýleným kontextom je značená $\mathscr{L}(\text{SC})$.

**Propagujúca gramatika s rozptýleným kontextom**

**Definícia 2.9.** *Propagujúca gramatika s rozptýleným*[5] kontextom je gramatika s rozptýleným kontextom

$$G = (V, T, P, S) \tag{2.1}$$

v ktorej každé pravidlo $(A_1, \dots, A_n) \to (x_1, \dots, x_n) \in P$ splňuje podmienku $x_i \in V^+$, pre všetky $i$, $1 \leq i \leq n$. Jazyk je *propagačný jazyk s rozptýleným kontextom* pokiaľ je generovaný propagujúcou gramatikou s rozptýleným kontextom. Rodina jazykov generovaných propagujúcimi gramatikami s rozptýleným kontextom je značená $\mathscr{L}(SC^{-\varepsilon})$.

**Teorém 2.10** (viď [6])**.** *$\mathscr{L}(CF) \subseteq \mathscr{L}(SC^{-\varepsilon}) \subseteq \mathscr{L}(CS) \subseteq \mathscr{L}(SC) = \mathscr{L}(RE)$.*

**Otvorený problém 2.11.** Zatiaľ zostáva ale otvoreným problémom či inklúzia $\mathscr{L}(SC^{-\varepsilon}) \subseteq \mathscr{L}(CS)$ nie je v skutočnosti identita.

## 2.3 Turingov stroj

V tejto práci budem vychádzať z definície Turingovho stroju tak, ako bol predstavený v [9].

**Definícia 2.12.** *Turingov stroj* je sedmica, ($Q$, $\Sigma$, $\Gamma$, $\delta$, $q_0$, $q_{accept}$, $q_{reject}$), kde $Q$, $\Sigma$, $\Gamma$ sú konečné množiny a

1. $Q$ je množina stavov,
2. $\Sigma$ je vstupná abeceda neobsahujúca prázdny symbol $\sqcup$,
3. $\Gamma$ je pásková abeceda, kde $\sqcup \in \Gamma$ a zároveň $\Sigma \subseteq \Gamma$,
4. $\delta$: $Q \times \Gamma \longrightarrow Q \times \Gamma \times \{L, R\}$ je prechodová funkcia,
5. $q_0 \in Q$ je počiatočný stav,
6. $q_{accept} \in Q$ je akceptujúci stav, a

[5] Z anglického originálu *propagating scattered context grammar*

7. $q_{reject} \in Q$ je zamietajúcu stav, pričom $q_{reject} \neq q_{accept}$.

**Konfigurácia** je nastavenie Turingovho stroja, ktoré pozostáva zo súčasného stavu, aktuálneho obsahu na páske a aktuálnej polohe hlavy.**Počiatočná konfigurácia** je nastavenie Turingovho stroja na začiatku výpočtu v tvare $q_0w$, čo indikuje, že stroj začína v stave $q_0$, s polohou hlavy na najľavejšej pozícií na páske. V **prijímajúcej konfigurácií** je stroj v stave $q_{accept}$, naopak v **zamietajúcej konfigurácií** je stroj v stave $q_{reject}$. Akceptujúca a zamietajúca konfigurácia sú **ukončovacie konfigurácie** a žiadne ďalšie už nie sú produkované.

Vravíme, že konfigurácia $C_1$ produkuje konfiguráciu $C_2$ práve vtedy a len vtedy pokiaľ sa Turingov stroj vie dostať z $C_1$ do $C_2$ v jednom výpočetnom kroku. Tento pohyb formálne definujeme nasledovne:

Predpokladajme, že máme $a$, $b$ a $c \in \Gamma$, taktiež majme $u$ a $v \in \Gamma^*$ a stavy $q_i$ a $q_j \in Q$. V tom prípade $uaq_ibv$ a $uq_jacv$ sú dve konfigurácie. Vravíme že:

$$uaq_ibv \text{ produkuje } uq_jacv$$

vtedy pokiaľ $\delta(q_i, b) = (q_j, c, L)$. V tomto prípade sa jedná o prípad, kedy stroj spraví krok doľava. Pre krok doprava platí, že

$$uaq_ibv \text{ produkuje } uacq_jv$$

vtedy ak $\delta(q_i, b) = (q_j, c, R)$

Turingov stroj $M$ *prijíma* (akceptuje) vstup $w$ pokiaľ existuje postupnosť konfigurácií $C_1, C_2, \ldots, C_k$, kde

1. $C_1$ je počiatočná konfigurácia $M$ na vstupe $w$,
2. každá konfigurácia $C_i$ produkuje konfiguráciu $C_{i+1}$ a
3. $C_k$ je akceptujúca konfigurácia.

Množina reťazcov, ktoré stroj $M$ prijíma je jazykom stroja $M$, značené $L(M)$.

**Definícia 2.13.** Jazyk nazývame **rekurzívne spočetný** pokiaľ existuje Turingov stroj, ktorý akceptuje tento jazyk.

Keď začneme výpočet na Turingovom stroji, tak existujú tri možné výsledky. Stroj môže reťazec *prijať*, *odmietnuť*, alebo sa môže *zacykliť*. Zacyklením rozumieme skutočnosť, že stroj proste nikdy nezastaví. Zacyklenie môže obsahovať ľubovoľné jednoduché alebo komplexné správania, ktoré ale nikdy nevedie ku koncovému stavu.

Turingov stroje $M$ môže odmietnuť reťazec buď prechodom do stavu $q_{reject}$ alebo zacyklením sa. Niekedy je náročné rozpoznať, kedy je stroj zacyklený a kedy iba výpočet trvá dlhú dobu. Z tohoto dôvodu preferujeme Turingove stroje, ktoré zastavia na všetkých vstupoch, a teda sa nikdy nezacyklia. Pokiaľ takýto Turingov stroj akceptuje nejaký jazyk, vravíme že daný jazyk zároveň *rozhoduje*

**Definícia 2.14.** Jazyk nazývame **rekurzívny** pokiaľ existuje Turingov stroj, ktorý rozhoduje tento jazyk.

Platí, že každý rekurzívny jazyk je zároveň rekurzívne spočetný jazyk, čiže

$$\mathscr{L}(R) \subseteq \mathscr{L}(RE)$$

.

Majme jazyk $A_{TM}$, ktorý je definovaný nasledovne

$$A_{TM} = \{\langle M, w\rangle | M \text{ je Turingov stroj a } M \text{ prijíma } w\}$$

**Teorém 2.15** (viď [9]). *$A_{TM}$ je nerozhodnuteľný. Ale je rekurzívne vyčísliteľný.*

Ukážme, že $A_{TM}$ je rekurzívne vyčísliteľný. Majme teda Turingov stroj $U$, ktorý prijíma jazyk $A_{TM}$ a vyzerá nasledovne.

$U =$ "Na vstupe $\langle M, w\rangle$, kde $M$ je Turingov stroj a $w$ je reťazec:

1. Simuluj $M$ na vstupe $w$
2. Pokiaľ $M$ niekedy vstúpi do prijímajúceho stavu, *akceptuj*; pokiaľ $M$ niekedy vstúpi do odmietajúceho stavu, *odmietni.*"

Stroj cyklí na vstupe $\langle M, w\rangle$ pokiaľ $M$ cyklí na $w$, čo je dôvod prečo stroj $U$ nerozhoduje jazyk $A_{TM}$. Tento jazyk sa niekedy označuje aj ako *problém zastavenia*[6].

Stroj $U$ je zároveň zaujímavý sám o sebe. Jedná sa o príklad *univerzálneho Turingovho stroja*, ktorý bol navrhnutý Alanom Turingom. Hovoríme o univerzálnom Turingovom stroji, pretože je schopný simulovať ľubovoľný iný Turingov stroj na základe popisu daného stroja.

## 2.4 Zoznam dôležitých pojmov v rámci tejto práce

V tejto časti, by som chcel zdôrazniť, poprípade neformálne zaviesť, niektoré významné pojmy definované v rámci tejto kapitoly, ktoré sa vyskytujú v tejto práci často a ich pochopenie, poprípade rozlišovanie medzi nimi je esenciálne pre pochopenie zápisu a dôkazu algoritmu predstaveného v neskorších kapitolách.

- **veta** - pojem využívaný pri gramatikách, predstavuje postupnosť terminálov nejakej gramatiky, množina všetkých viet generovateľných danou gramatikou $N$ je jazyk prijímaný gramatikou $N$
- **vetná forma** - postupnosť terminálov a neterminálov
- **neukončujúca vetná forma** - postupnosť terminálov a neterminálov z gramatiky $G$, z ktorej už ale žiadnou postupnosťou aplikovaných pravidiel danej gramatiky nie je možné vytvoriť *vetu*
- **konfigurácia** - nastavenie Turingovho stroja pozostávajúce zo stavu, miesta hlavy a obsahu pásky (poloha hlavy je vyjadrená pomocou miesta na ktoré napíšeme stav)
- **aplikovateľné pravidlo** - v kontexte gramatík s rozptýleným kontextom. Povieme, že pravidlo je aplikovateľné na danú vetnú formu, pokiaľ sa vo vetnej forme nachádzajú všetky neterminály ktoré sa nachádzajú na ľavej strane pravidla, pričom je dodržané aj poradie ich výskytu vo vetnej forme, ktoré musí korešpondovať s ich poradím v pravidle

[6] Z anglického *Halting problem*

- **aplikácia pravidla** - vykonanie derivácie z vetnej formy do inej, prepísaním neterminálov vyskytujúcich sa na ľavej strane pravidla terminálmi a neterminálmi ktoré sú na prislúchajúcom mieste na pravej strane pravidla.

- **výpočetná história Turingovho stroja** - postupnosť konfigurácií Turingovho stroja, pričom platí, že konfigurácia $i$ produkuje konfiguráciu $i + 1$, pre všetky $i$ ¡ $n$, kde n je počet konfigurácií.

# Kapitola 3

# Teória

V tejto kapitole je uvedený základný algoritmus, ktorému sa venujem v rámci tejto práce. Súčasťou tejto kapitoly je návrh algoritmu, jeho neformálne vysvetlenie a dôkaz jeho správnosti. Základnou myšlienkou algoritmu je fakt, že môžeme v každej vetnej forme udržovať všetky informácie potrebné pre určenie ďalšieho kroku Turingovho stroja, a zároveň zabezpečiť, že nebude existovať možnosť ako vytvoriť vetnú formu, ktorá by reprezentovala nesprávny krok a zároveň by sa z nej bolo možné vytvoriť vetu. Toto sa deje pomocou indexovania jednotlivých symbolov a využitia toho, že poradie v ktorom musia byť jednotlivé neterminály prítomné vo vetnej forme je pevne dané, takže vieme napríklad zabezpečiť, že celá derivácia bude prebiehať napravo od konkrétneho symbolu, poprípade medzi dvoma špecifickými miestami vo vetnej forme.

## 3.1 Algoritmus

**Algoritmus 1** Prevod Turingovho stroja na gramatiku s rozptýleným kontextom prijímajúcu jeho výpočetnú históriu

**Vstup:** Turingov stroj $M = (Q_{TM},\Sigma_1,\Gamma,\delta,Q_0,Q_{acc},Q_{rej})$

**Výstup:** Gramatika s rozptýleným kontextom $G = (N,T,P,S_0)$, kde $L(G) = \{x|\ x$ je výpočetná história Turingovho stroja $M$ pre vstup $w$ na ktorom $M$ zastaví$\}$

1: Bez ujmy na obecnosti predpokladajme že $\Gamma \cap \{S, S_0, S_1, \#, \overline{\#}, \overline{\#^1}, \$, R, L\} \cap \{\overline{A}, \overline{A_{RM}}, \overline{A_{LLM}}, \overline{A_{RLM}} : \forall A \in \Gamma\} \cap \{\overline{Q}, \overline{Q_M} : \forall Q \in Q_{TM}\} \cap Q_{TM} \cap \overline{\Gamma^1} \cap Q_0^1 = \emptyset$

2: $N = \{\overline{Q} : Q \in \Gamma\} \cup \overline{\Gamma} \cup \{S\overline{\#}, \overline{\#^1}, \$, R, L\} \cup \{\overline{A}, \overline{A_{RM}}, \overline{A_{LLM}}, \overline{A_{RLM}} : A \in \Gamma\} \cup \{\overline{A^1}, \overline{A^1_{RM}}, \overline{A^1_{LLM}} : A \in \Gamma\}$

3: $T = Q_{TM} \cup \Gamma \cup \{\#\}$

4: $\forall Q_1, Q_2 \in Q_{TM}, \forall A, B \in \Gamma : (\$, \overline{Q_1}, \overline{A}, \overline{\#}, S) \rightarrow (\$, \overline{Q_{1_{LLM}}}, \overline{A_{RM}}, \overline{\#}, \overline{B_{RLM}}\ \overline{Q_2}\ R) \in P \Leftrightarrow \delta(Q_1, A) = (Q_2, B, R)$

5: $Q_1 \in Q_{TM} \forall A, B \in \Gamma : (\overline{Q_0^1}, \overline{A^1}, \overline{\#^1}, S) \rightarrow (Q_0, \overline{A^1_{RM}}, \overline{\#^1}, \overline{B}\ \overline{Q_1}\ R) \in P \Leftrightarrow \delta(Q_0, A) = (Q_1, B, R)$

6: $\forall A, B \in \Gamma : (\$, \overline{A_{RM}}, \overline{B}, \overline{\#}, R) \rightarrow (\$, A, \overline{B_{RM}}, \overline{\#}, \overline{B}R) \in P$

7: $\forall A, B \in \Gamma : (\overline{A^1_{RM}}, \overline{B^1}, \overline{\#^1}, R) \rightarrow (\$, A, \overline{B^1_{RM}}, \overline{\#^1}, \overline{B}R) \in P$

8: $\forall Q \in Q_{TM}, \forall A, B \in \Gamma : (\$, \overline{A}, \overline{Q_{LLM}}, \overline{\#}, \overline{B_{RLM}}) \rightarrow (\$, \overline{A_{LLM}}, Q, \overline{\#}, \overline{A_{RLM}}\ \overline{B}) \in P$

9: $\forall Q \in Q_{TM} - \{Q_{REJ}, Q_{ACC}\} : (\$, \overline{Q_{LLM}}, \overline{\#}) \rightarrow (\$, Q, \overline{\#}) \in P$

10: $\forall A \in \Gamma : (\$, \overline{A_{LLM}}, \overline{\#}) \rightarrow (\$, A, \overline{\#}) \in P$

11: $\forall A, B \in \Gamma : (\$, \overline{A}, \overline{B_{LLM}}, \overline{\#}, \overline{B_{RLM}}) \rightarrow (\$, \overline{A_{LLM}}, B, \overline{\#}, \overline{A_{RLM}}\ \overline{B}) \in P$

12: $\forall A, B \in \Gamma : (\overline{A^1}, \overline{B^1_{LLM}}, \overline{\#^1}, \overline{B_{RLM}}) \rightarrow (\overline{A_{LLM}}^1, B, \overline{\#^1}, \overline{A_{RLM}}\ \overline{B}) \in P$

13: $\forall A \in \Gamma : (\$, \overline{A_{RM}}, \overline{\#}, R) \rightarrow (\$, A, \overline{\#}, R) \in P$

14: $\forall A \in \Gamma : (\overline{A^1_{RM}}, \overline{\#^1}, R) \rightarrow (A, \overline{\#^1}, R) \in P$

15: $\forall A \in \Gamma : (\$, \overline{\#}, \overline{A_{RLM}}) \rightarrow (\$, \overline{\#}, \overline{A}) \in P$

16: $\forall Q_1, Q_2 \in Q_{TM}\ \forall A, B, C \in \Gamma : (\$, \overline{C}, \overline{Q_1}, \overline{A}, \overline{\#}, S) \rightarrow (\$, \overline{C_{LLM}}, Q_1, \overline{A_{RM}}, \overline{\#}, \overline{Q_{2_{RLM}}}\ \overline{C}\ \overline{B}R) \in P \Leftrightarrow \delta(Q_1, A) = (Q_2, B, L)$

17: $\forall Q \in Q_{TM}, \forall A, B \in \Gamma : (\$, \overline{A}, \overline{B_{LLM}}, \overline{\#}, \overline{Q_{RLM}}) \rightarrow (\$, \overline{A_{LLM}}, B, \overline{\#}, \overline{A_{RLM}}\ \overline{B}\ \overline{Q}) \in P$

18: $\forall Q \in Q_{TM}, \forall A, B \in \Gamma : (\overline{A^1}, \overline{B^1_{LLM}}, \overline{\#^1}, \overline{Q_{RLM}}) \rightarrow (\overline{A^1_{LLM}}, B, \overline{\#^1}, \overline{A_{RLM}}\ \overline{B}\ \overline{Q}) \in P$

19: $\forall Q_1, Q_2 \in Q_{TM}, \forall A, B \in \Gamma : (\$, \overline{Q_1}, \overline{A}, \overline{\#}, S) \rightarrow (\$, Q_1, \overline{A_{RM}}, \overline{\#},\ \overline{Q_2}\ \overline{B}R) \in P \Leftrightarrow \delta(Q_1, A) = (Q_2, B, L)$

20: $Q_1 \in Q_{TM}, \forall A, B \in \Gamma : (\overline{Q^1_0}, \overline{A^1}, \overline{\#^1}, S) \rightarrow (Q_0, \overline{A^1_{RM}}, \overline{\#^1},\ \overline{Q_1}\ \overline{B}R) \in P \Leftrightarrow \delta(Q_0, A) = (Q_1, B, L)$

21: $(\overline{\#}) \rightarrow (\overline{\sqcup}\ \overline{\#}) \in P \wedge (\overline{\#^1}) \rightarrow (\overline{\sqcup^1}\ \overline{\#^1}) \in P$

22: $(\$, \overline{\#}, \overline{Q_{REJ}}, R) \rightarrow (\#, \#, Q_{REJ}, \#) \in P$

23: $(\$, \overline{\#}, \overline{Q_{ACC}}, R) \rightarrow (\#, \#, Q_{ACC}, \#) \in P$

24: $(\$, \overline{\#}, R) \rightarrow (\#, \$, \overline{\#}S) \in P$

25: $(\overline{\#^1}, R) \rightarrow (\$, \overline{\#}S) \in P$

26: $\forall A \in \Gamma : (\$, \overline{\#}, \overline{A}, \overline{Q_{REJ}}) \rightarrow (\$, \overline{\#}, A, \overline{Q_{REJ}}) \in P$

27: $\forall A \in \Gamma : (\$, \overline{\#}, \overline{A}, \overline{Q_{ACC}}) \rightarrow (\$, \overline{\#}, A, \overline{Q_{ACC}}) \in P$

28: $\forall A \in \Gamma : (\$, \overline{\#}, \overline{Q_{REJ}}, \overline{A}) \rightarrow (\$, \overline{\#}, \overline{Q_{REJ}}, A) \in P$

29: $\forall A \in \Gamma : (\$, \overline{\#}, \overline{Q_{ACC}}, \overline{A}) \rightarrow (\$, \overline{\#}, \overline{Q_{ACC}}, A) \in P$

30: $\forall A \in \Sigma_1 : (S_1) \rightarrow (\overline{A^1}S_1)$

31: $(S_1) \rightarrow (\overline{\#^1}S)$

32: $(S_0) \rightarrow (\overline{Q^1_0}S_1)$

### 3.1.1 Neformálne vysvetlenie

1. V tomto bode určíme, že pomocou premenovania neterminálov, vždy môžeme pridať naše kontrolné neterminály

2. Do množiny neterminálov gramatiky $G$ patria špeciálne riadiace znaky :

- $\overline{\#}$ - slúži ako oddeľovač súčasného stavu pásky od nasledujúceho ktorý sa práve tvorí $M$
- \$ - vždy je na začiatku aktuálne meneného stavu pásky. Vyskytuje sa vo všetkých pravidlách na prvom mieste (okrem prvotného generovania počiatočného stavu) a jeho úlohou je zabezpečiť, aby nebolo možné meniť žiaden neterminál nachádzajúci sa vo vetnej forme naľavo od neho
- R - neterminál pomocou, ktorého generujeme nový stav pásky pre budúci stav (časť napravo od polohy hlavy stroja)
- L - analogicky s neterminálom R, akurát pre ľavú časť stavu
- $\overline{A}$ - Pre každý prvok zo zásobníkovej abecedy stroja $M$ vytvoríme neterminál s čiarou nad ním, tieto slúžia na rozlíšenie terminálov od neterminálov (samotné písmeno abecedy je využité ako neterminál)
- $\overline{A^1}$ - Podobne ako v predchádzajúcom kroku, akurát tieto neterminály sú využité iba v prvom kroku (aby nemuselo každé slovo v jazyku začínať terminálom #, tým pádom bude možné iba odseknúť všetky časti za prvým terminálom # a dostaneme počiatočnú konfiguráciu daného Turingovho stroja, kde sa nachádza reťazec nad ktorým sme pracovali). Toto vysvetlenie platí pre všetky neterminály s horným indexom 1. Viac o dôvode prečo to chceme, bude uvedené v časti 3.2.
- $\overline{Q}$ - Vytvorenie neterminálu pre každý stav stroja $M$
- $\overline{A_{RM}}$ - slúži na posúvanie sa doprava po aktuálnom stave tak, aby sme prepísali všetky neterminály na terminály a žiaden nevynechali
- $\overline{A^1_{RM}}$ - analogicky s $\overline{A_{RM}}$, využité iba na začiatku
- $\overline{A_{LLM}}$ - slúži na posúvanie sa doľava po aktuálnom stave tak, aby sme prepísali všetky neterminály na terminály a žiaden nevynechali
- $\overline{A^1_{LLM}}$ - analogicky s $\overline{A_{LLM}}$, využité iba na začiatku
- $\overline{A_{RLM}}$ - slúži na posúvanie sa doľava v budúcom stave, pri posune hlavy doprava

3. Ako terminály slúžia všetky názvy stavov, prvky zásobníkovej abecedy a oddeľovač #

4. Na základe tohoto bodu je vytvorené pravidlo pre každú dvojicu stavov, medzi ktorými je možné vykonať prechod s pohybom hlavy doprava a prepísaním znaku A na znak B. Pri aplikácií tohoto pravidla pokiaľ by sa zvolil neterminál A, ktorý sa nachádza inde ako vedľa neterminálu stavu Q, tak potom je pomocou indexov RM a LLM zabezpečené, že nebude ho možné nikdy prepísať na terminál. Neterminál s indexom RLM je nutný preto, aby bolo možné generovať ďalšie neterminály, ktoré sa môžu nachádzať naľavo od aktuálnej pozície hlavy

5. Podobne ako predchádzajúci bod, akurát uvažuje ako aktuálny stav pásky jej prvý stav (tvorený neterminálmi s horným indexom 1). Taktiež nevyberá všetky možné dvojice stavov ale iba tie v kombinácií s počiatočným stavom stroja $M$.

6. prepisovacie pravidlá, keď neterminál napravo od aktuálneho neterminálu s indexom RM získa tento index a doterajší neterminál sa prepíše na odpovedajúci terminál. Zároveň je do budúceho stavu pridaný nový neterminál pred neterminál $R$.

7. Rovnako ako predchádzajúci bod, ale pre neterminály s horným indexom 1

8. Prepisovacie pravidlá smerom doľava, posúva sa index LLM a do nového stavu sa generuje odpovedajúci neterminál
9. Pokiaľ sa naľavo od neterminálu pre stav nenachádzajú žiadne neterminály (ak sa nachádzajú, tak už ich nebude možné prepísať na terminál) tak sa použije toto pravidlo
10. Rovnako ako predchádzajúci bod, akurát pre neterminál reprezentujúci symbol zásobníkovej abecedy
11. Prepisovacie pravidlá, obdobne s pravidlom 8, akurát pre neterminál reprezentujúci symbol zásobníkovej abecedy
12. Variant predchádzajúceho bodu pre neterminály s horným indexom 1
13. Pokiaľ sme prepísali všetky neterminály napravo od polohy hlavy v aktuálnom stave použijeme pravidlo vytvorené na základe tohoto bodu. Pokiaľ ho použijeme predčasne tak neterminály medzi $\overline{\#}$ a neterminálom s indexom LLM sa nebudú dať prepísať na terminály
14. Variant predchádzajúceho bodu pre neterminály s horným indexom 1
15. Odstránenie indexu RLM v budúcom stave, nebude možné už naľavo od jeho umiestnenia generovať žiadne neterminály
16. Na základe tohoto bodu je vytvorené pravidlo pre každú dvojicu stavov (s výnimkou zamietajúceho a prijímajúceho), medzi ktorými je možné vykonať prechod s pohybom hlavy doľava a prepísaním znaku A na znak B. Zároveň pravidlá z tohoto bodu nepostihujú situácie, keď sa nachádzame na ľavom okraji pásky, pre tento prípad bude vytvorené pravidlo v bode 19
17. V tomto bode sa vytvorí množina pravidiel, ktoré zabezpečujú posun indexu RLM z neterminálu reprezentujúceho stav (ten vzniká pri posune hlavy doľava)
18. Variant predchádzajúceho bodu pre neterminály s horným indexom 1
19. Na základe tohoto bodu je vytvorené pravidlo pre každú dvojicu stavov (s výnimkou zamietajúceho a prijímajúceho), medzi ktorými je možné vykonať prechod s pohybom hlavy doľava a prepísaním znaku A na znak B. Toto pravidlo postihuje situácie, keď sa pri pohybe doľava nachádzame na ľavom okraji pásky a teda iba prepíše najľavejší znak a ostane na tom istom mieste, čo je ošetrené tak, že sa nevygeneruje žiaden neterminál s indexom RLM.
20. Variant predchádzajúceho bodu pre neterminály s horným indexom 1
21. Toto pravidlo nám umožní vždy rozšíriť pásku o prázdne miesto (nakoľko páska Turingovho stroja je nekonečná, a vždy je napravo od posledného znaku prázdne miesto)
22. Posledné pravidlo, ktoré v prípade, že stroj $M$ sa dostal do odmietajúceho stavu, prepíše všetky riadiace neterminály na terminály
23. Variant prechádzajúceho pravidla pre prijímajúci stav
24. Pravidlo zabezpečujúce zmenu aktuálneho stavu (vždy sa pracuje napravo od neterminálu \$)

25. Variant predchádzajúceho bodu pre neterminál s horným indexom 1
26. Na základe tohoto bodu sa vytvorí séria pravidiel, ktoré prepíšu všetky neterminály ktoré sú na páske medzi \$ a odmietajúcim stavom
27. Na základe tohoto bodu sa vytvorí séria pravidiel, ktoré prepíšu všetky neterminály ktoré sú na páske medzi \$ a prijímajúcim stavom
28. Na základe tohoto bodu sa vytvorí séria pravidiel, ktoré prepíšu všetky neterminály ktoré sú na páske napravo od odmietajúceho stavu
29. Na základe tohoto bodu sa vytvorí séria pravidiel, ktoré prepíšu všetky neterminály ktoré sú na páske napravo od prijímajúceho stavu
30. Na základe tohoto bodu sa vytvorí množina pravidiel na generovanie vstupného reťazca na páske
31. Pravidlo sa použije po ukončení generovania vstupného reťazca
32. Počiatočné pravidlo, ktoré vygeneruje počiatočný stav a neterminál $S_1$ pomocou ktorého sa generuje vstupný reťazec na páske

*Důkaz.* Samotný dôkaz správnosti algoritmu rozdelím na tri časti. V prvej časti ukážem niektoré vlastnosti gramatiky, na ktoré sa budem neskôr v ostatných častiach odvolávať

V druhej ukážem, že z počiatočného stavu je možné vygenerovať iba validnu počiatočnú konfiguráciu a následne pomocou matematickej indukcie ukážem, že pokiaľ máme na konci reťazca neterminály predstavujúce validnú konfiguráciu Turingovho stroja, tak je možné na koniec pridať zasa iba validnú konfiguráciu produkovanú tou aktuálnou (a zároveň nahradiť neterminály v aktuálnej konfigurácií za terminály k nim prislúchajúce), alebo pokiaľ by sme pridali konfiguráciu, ktorá validna nie je, alebo nie je produkovaná konfiguráciou aktuálnou, tak derivovaním tejto vetnej formy už nebude možné žiadnou kombináciou použitých pravidiel vyprodukovať vetu.

V tretej časti ukážem, že pokiaľ na konci reťazca sa objaví postupnosť neterminálov reprezentujúcich prijímajúcu alebo zamietajúcu konfiguráciu, tak je možné z tejto vetnej formy (za predpokladu, že pred ňou nasleduje iba séria validnych konfigurácií, tvorená terminálnymi symbolmi) vygenerovať vetu.

Ukážme si teda najprv sedem vlastností gramatiky vyprodukovanej naším algoritmom gramatiky, ktoré neskôr využijeme:

1. V žiadnej vetnej forme sa nemôžu zároveň vyskytovať symboly R a S - jediným spôsobom akým sa oba neterminály generujú je, že jeden sa prepíše na druhý. Jedinou výnimkou je pravidlo $(S_1) \rightarrow (\overline{\#}S)$, ktoré generuje S, avšak toto pravidlo je možné uplatniť iba raz (v čase na začiatku, predtým ako sa v konfigurácií objaví neterminál R).
2. V žiadnej vetnej forme sa nemôžu symboly $\$, \overline{\#}, R, S$ vyskytovať viac ako raz:
    - S - S je možné priamo derivovať z R a $S_1$. $S_1$ je očividne nutné vygenerovať v prvom kroku z $S_0$, ktoré sa nenachádza na pravej strane žiadneho pravidla. Následne môžeme generovať neterminály, ktoré nie sú S, avšak pokiaľ z $S_1$ zderivujeme S, $S_1$ už nie je možné dostať žiadnym spôsobom do vetnej formy, a

teda jediný spôsob akým by sa mohlo objaviť druhé S, je z R. Avšak nakoľko sa tieto dva neterminály nemôžu nachádzať v jednej vetnej forme, vždy môžeme mať nanajvýš jedno S.

- R - očividne jediná možnosť ako dostať, je možné priamo derivovať iba z S, avšak nakoľko sme dokázali, že S a R sa nemôžu nachádzať spolu vo vetnej forme, a S sa nemôže vyskytovať viac ako raz, potom aj R sa môže vyskytovať iba raz
- \$ - očividne jediným spôsobom ako sa môže symbol \$ ocitnúť vo vetnej forme bez toho aby tam predtým bol, je deriváciou z $S_0$, avšak toto pravidlo sa musí použiť práve raz, hneď ako prvé. Všetky ostatné pravidlá \$ iba prepisujú na rovnaký symbol alebo menia jeho umiestnenie vo vetnej forme smerom doprava
- # - analogicky s \$

3. Nie je možné v žiadnom pravidle použiť neterminál nachádzajúci sa naľavo od \$ - nakoľko všetky pravidlá (s výnimkou tých, ktoré slúžia na generovanie počiatočnej konfigurácie, a nie je možné ich použiť potom ako sa v nejakej vetnej forme vyskytne S) všetky pravidlá vyžadujú ako prvý neterminál, ktorý sa použije \$ a ten sa nachádza v každej vetnej forme s výnimkou počiatočnej a koncovej práve raz.

4. Napravo od neterminálu \$ sa môže vyskytovať iba jeden neterminál s indexom RM - majme konfiguráciu na ktorej konci je $\overline{\#}S$, spôsob akým sa do konfigurácie dostane neterminál s indexom RM je jeden z nasledujúcich:

   (a) skupina pravidiel z bodov 4 a 5 - V tomto prípade sa na ľavej strane pravidla vyskytuje neterminál $S$, ktorý sa napravo od \$ môže vyskytovať v konfigurácií iba raz. Zároveň sa vždy pri jeho generovaní vždy posunie \$ na miesto $\overline{\#}$. Avšak neterminál s indexom RM sa vždy tvorí medzi \$ a $\overline{\#}$. Tým pádom po použití pravidla, ktoré má na pravej strane neterminál S, nemôže byť napravo od \$ žiaden neterminál s indexom RM

   (b) skupina pravidiel z bodov 6 a 7 - v týchto prípadoch sa neterminál s indexom RM vyskytuje na oboch stranách pravidla, pričom očividne z pôvodného neterminálu s indexom RM sa stane terminál a teda po uplatnení pravidla vytvoreného na základe týchto bodov je počet neterminálov s indexom RM nezmenený.

   (c) skupina pravidiel z bodov 16, 19 a 20 - analogicky s bodom 4a tohoto výčtu.

5. Napravo od neterminálu \$ sa môže vyskytovať iba jeden neterminál s indexom LLM - majme konfiguráciu na ktorej konci je $\overline{\#}S$, spôsob akým sa do konfigurácie dostane neterminál s indexom LLM je jeden z nasledujúcich:

   (a) skupina pravidiel z bodov 4, 5 a 16 - analogicky s 4a

   (b) skupina pravidiel z bodov 8, 11, 12, 17, 18 - v týchto prípadoch sa neterminál s indexom LLM vyskytuje na oboch stranách pravidla, pričom očividne z pôvodného neterminálu s indexom LLM sa stane terminál a teda po uplatnení pravidla vytvoreného na základe týchto bodov je počet neterminálov s indexom LLM nezmenený.

6. Napravo od neterminálu $\overline{\#}$ sa môže vyskytovať iba jeden neterminál s indexom RLM - majme konfiguráciu na ktorej konci je $\overline{\#}S$, spôsob akým sa do konfigurácie dostane neterminál s indexom RLM je jeden z nasledujúcich:

(a) skupina pravidiel z bodov 4, 5 a 16 - V tomto prípade sa neterminál s indexom RML generuje priamo z neterminálu S. Vieme, že tento neterminál sa môže v konfigurácií vyskytovať maximálne jeden krát a zároveň pri jeho pridaní do konfigurácie (pomocou pravidla z bodu ) sa medzi ním a $\overline{\#}$ nenachádza žiaden iný neterminál. A teda pomocou tohoto pravidla nie je možné nikdy dosiahnuť stavu, že by sa napravo od neterminálu $\overline{\#}$ nachádzal viac ako jeden neterminál s indexom RLM

(b) skupina pravidiel z bodov 8, 11, 12, 17 a 18 - v týchto prípadoch sa neterminál s indexom RLM vyskytuje na oboch stranách pravidla na rovnakom mieste, čiže sa prepíše sám na seba a teda po uplatnení pravidla vytvoreného na základe týchto bodov je počet neterminálov s indexom RLM nezmenený.

7. Neterminály reprezentujúce stav alebo symbol zásobníkovej abecedy nachádzajúce sa medzi indexami RM a LLM nie je a nikdy nebude možné použiť v nejakom pravidle - Vzhľadom nato, že nemusíme uvažovať neterminály nachádzajúce sa naľavo od symbolu \$ a vieme, že oba indexy sa nachádzajú napravo od neho maximálne raz. Potom vidíme, že všetky pravidlá pracujúce s neterminálmi reprezentujúcimi stav automatu alebo symbol zo zásobníkovej abecedy sú ohraničené aspoň jedným z týchto indexov (v prípade RM musia byť napravo od neho, v prípade LLM zasa naľavo). Výnimku tvoria pravidlá 16, 19 a 4 (respektíve ich ekvivalenty pre verziu s horným indexom 1). Ale ako sme ukázali v 4a tak v tom prípade sa v konfigurácií napravo od \$ nevyskytujú žiadne neterminály s predmetnými indexami. Ostáva nám teda ukázať, že index RM sa vždy nachádza vpravo od indexu LLM. Ako je možné vidieť, tak tieto indexy do aktuálnej konfigurácie vnášajú pravidlá 16, 19 a 4. Vo všetkých týchto prípadoch je pôvodné umiestnenie správne. A nakoľko sa obe indexy šíria iba jedným smerom a to od seba (vždy pokiaľ sa mení jeho poradie tak index RM je na ľavej strane skôr ako následne vznikne na pravej strane pravidla) tak je zrejmé, že indexy nikdy svoje poradie v konfigurácií nezmenia. Pre väčšiu obraznosť, to ešte presne ukážem na jednotlivých pravidlách pracujúcimi s danými indexmi vzhľadom k neterminálu $A_i$, pričom vetná forma vyzerá nasledovne:

$$\$\overline{A_1}\ \overline{A_2}\dots\overline{A_k}\ \overline{Q_{LLM}}\ \overline{B_1}\ \dots\overline{B_i}\ \overline{B_{i+1}}_{RM},\dots\overline{B_l}\ \overline{\#X_{RLM}}\ \overline{Q_2}\ \overline{B_{i+1}}\ R,$$
$$0<k,l\wedge 1<i<l.$$

- pravidlo na základe bodu číslo 6 $((\$,\overline{A_{RM}},\overline{B},\overline{\#},R)\to(\$,A,\overline{B_{RM}},\overline{\#},\overline{B}R))$ - toto pravidlo posúva index doprava, nikdy nie doľava a teda nie je možné aby sa vyskytol naľavo od $B_1$ ak predtým nebol
- pravidlo na základe bodu číslo 13 $((\$,\overline{A_{RM}},\overline{\#},R)\to(\$,A,\overline{\#},R))$ -index mizne, a teda sa logicky neposunie vľavo
- pravidlo na základe bodu číslo 4 $((\$,\overline{Q_1},\overline{A},S)\to(\$,\overline{Q_1}_{LLM},\overline{A_{RM}},\overline{B_{RLM}}\ \overline{Q_2}\ \overline{A}\ R))$ -toto pravidlo vyžaduje, aby vetná forma obsahovala neterminál S. Avšak tento neterminál je možné vygenerovať jediným spôsobom, ktorý v sebe zahrňuje posunutie symbolu \$ na miesto kde sa predtým nachádzal $\overline{\#}$. Avšak vzhľadom na skutočnosť, že neterminál $\overline{\#}$ nie je možné derivovať zo symbolov reprezentujúcich stav alebo zásobníkovú abecedu, najľavejší možný výskyt je ten, ktorý už je vo vetnej forme. Avšak aj tento výskyt sa nachádza napravo od $B_1$ a teda nie je možné splniť prvú časť podmienky aby bolo možné využiť $B_1$ v nejakom pravidle.

- pravidlo na základe bodu číslo 16 $((\$, \overline{C}, \overline{Q_1}, \overline{A}, S) \rightarrow (\$, \overline{C_{LLM}}, Q_1, \overline{A_{RM}}, \overline{Q_{2_M}}\ \overline{C}\ \overline{B}R))$ - analogicky s predchádzajúcim prípadom
- pravidlo na základe bodu číslo 19 $((\$, \overline{Q_1}, \overline{A}, S) \rightarrow (\$, Q_1, \overline{A_{RM}}\,\overline{Q_2}\ \overline{B}R))$ - analogicky s predchádzajúcimi dvoma bodmi

Očividne teda nie sme schopný použiť index RM nato aby sme mohli použiť pravidlo ktoré by využilo neterminál $B_i$. Pozrime sa teda na index LLM. S ním sa pracuje v nasledujúcich typoch pravidiel:

- pravidlo na základe bodu číslo 8 $((\$, \overline{A}, \overline{Q_{LLM}}, \overline{\#}, \overline{B_{RLM}}) \rightarrow (\$, \overline{A_{LLM}}, Q, \overline{\#}, \overline{A_{RLM}}\ \overline{B}))$ - v tomto prípade sa posúva index doľava a nemôže sa teda dostať napravo od $B_1$ ak predtým nebol
- pravidlo na základe bodu číslo 17 $((\$, \overline{A}, \overline{B_{LLM}}, \overline{\#}, \overline{Q_{RLM}}) \rightarrow (\$, \overline{A_{LLM}}, B, \overline{\#}, \overline{A_{RLM}}\ \overline{B}\ \overline{Q}))$ - analogicky s predchádzajúcim bodom, sa posúva iba doľava
- pravidlo na základe bodu číslo 11 $((\$, \overline{A}, \overline{B_{LLM}}, \overline{B_{RLM}}) \rightarrow (\$, \overline{A_{LLM}}, B, \overline{A_{RLM}}\ \overline{B})$ ) - analogicky s predchádzajúcimi bodmi.
- pravidlo na základe bodu číslo 9 $((\$, \overline{Q_{LLM}}, \overline{\#}) \rightarrow (\$, Q, \overline{\#}))$ - v tomto prípade index mizne úplne
- pravidlo na základe bodu číslo 4 $((\$, \overline{Q_1}, \overline{A}, S) \rightarrow (\$, \overline{Q_{1_{LLM}}}, \overline{A_{RM}}, \overline{B_{RLM}}\ \overline{Q_2}\ \overline{A}\ R))$ - pravidlo obsahuje S, analogicky s vysvetlením pre index RM
- pravidlo na základe bodu číslo 19 $((\$, \overline{C}, \overline{Q_1}, \overline{A}, S) \rightarrow (\$, \overline{C_{LLM}}, Q_1, \overline{A_{RM}}, \overline{Q_{2_M}}\ \overline{C}\ \overline{B}R))$ - pravidlo obsahuje S, analogicky s vysvetlením pre index RM

Je očividné, že na začiatku môžeme využiť jedine pravidlo z bodu 32 $((S_0) \rightarrow (\overline{Q_0^1}S_1))$. Po aplikácií tohoto pravidla musíme pokračovať v generovaní reťazca neterminálov reprezentujúcich symboly vstupnej abecedy $\Sigma$, s využitím niektorého z pravidiel vytvorených na základe bodu algoritmu číslo 30$(\forall A \in \Sigma_1 : (S_1) \rightarrow (\overline{A^1}S_1))$. Týmto spôsobom môžeme vygenerovať ľubovoľný reťazec zo vstupnej abecedy (reprezentovaný neterminálmi s horným indexom 1) a pred nimi bude vo vetnej forme neterminál reprezentujúci počiatočný stav Turingovho stroja. Po vygenerovaní reťazca je nutné použiť pravidlo číslo 31 $((S_1) \rightarrow (\overline{\#^1}S))$ čím na koniec vetnej formy pridáme dvojicu symbolov $\overline{\#^1}$ a $S$. Takže naša vetná forma bude v tvare:

$$\overline{Q_0^1}\ \overline{B_1^1}\ \overline{B_2^1} \ldots \overline{B_l^1}\ \overline{\#^1}\ S, \text{ kde } B_i^1 \in \overline{\Sigma}\ \forall 0 \leq i \leq l$$

Táto vetná forma je tvorená z neterminálov s horným indexom 1, čo je tak z dôvodu, aby sme sa mohli vyhnúť tomu, že každé slovo jazyka prijímaného vytvorenou gramatikou by začínalo znakom # (takto bude začínať počiatočným stavom). Ukážeme si teda, že môžeme derivovať vetnú formu tak, že sa dostane do tvaru požadovaného ďalším krokom indukcie. Spolu s tým si ukážeme, že neterminály s horným indexom 1 sa môžu vyskytovať iba v tejto počiatočnej konfigurácií a ďalej ich nebudeme musieť uvažovať. Všimnime si najprv, že všetky nové neterminály s horným indexom 1, vznikajú vo vetnej forme naľavo od aktuálnej polohy symbolu $\overline{\#^1}$. Tá sa ale v ďalšom priebehu už nebude meniť, nakoľko jediný spôsob ako ho pridať do vetnej formy je deriváciou z neterminálu $S_1$ a ten máme vo vetnej forme iba na počiatku a zmizne z nej práve pravidlom číslo 31, ktoré vnáša do vetnej formy aj neterminál $\overline{\#^1}$. Ten sa následne ako si ukážeme neskôr nutne zmení na neterminál \$. Avšak to znamená, že naľavo od neterminálu \$ sa žiaden neterminál s horným indexom 1 nemôže vyskytovať. Ide teda očividne o počiatočnú konfiguráciu reprezentovanú pomocou neterminálov, pred ktorou sa nachádza symbol \$ a je ukončená dvojicou symbolov $\overline{\#^1} S$. Pričom $\overline{Q^1}$ reprezentuje počiatočný stav a $\overline{B_1^1}\ \overline{B_2^1} \dots \overline{B_l^1}$ počiatočný reťazec.

Vezmime si teda pravidlo z gramatiky, ktoré simuluje krok z počiatočného stavu so znakom, ktorý je na začiatku pásky (vysvetlenie, prečo nemôžeme voliť iné pravidlo bude neskôr ukázané v rámci ďalšieho kroku indukcie). Našim cieľom bude dostať vetnú formu v tvare:

$$Q_0\ B_1 \dots B_l\ \$\ \overline{X}\ \overline{Q_1}\ \overline{B_2} \dots \overline{B_l}\ \overline{\#}\ S \tag{3.1}$$

Toto pravidlo môže simulovať

**(a)** krok doprava: Využijeme teda nejaké pravidlo, ktoré vzniklo na základe bodu 5 (predpokladajme že $\delta(Q_0, B_1) = (Q_1, X, R)$) a po jeho použití vznikne vetná forma v tvare:

$$Q_0\ \overline{B_{1_{RM}}^1} \dots \overline{B_l^1}\ \overline{\#^1}\ \overline{X}\ \overline{Q_1}\ R, 0 < l$$

Našim cieľom je teraz dostať vetnú formu v 3.1. Začnime teda postupne prepisovať jednotlivé neterminály. Skúsime aplikovať ľubovoľné pravidlo obsahujúce neterminál $\overline{B_{1_{RM}}^1}$ na ľavej strane (nemôžeme zvoliť žiadne iné pravidlo, jediné ktoré je aplikovateľné bez indexu RM je pravidlo číslo 25 avšak to by nám odstránilo z vetnej formy neterminál $\overline{\#^1}$ a už by nebolo možné ďalej pracovať s neterminálmi naľavo od \$). Môžeme teda zvoliť iba niektoré z pravidiel, ktoré vzniklo na základe bodu 7. Zároveň musíme zvoliť neterminál hneď vedľa neterminálu s indexom RM, nakoľko v opačnom prípade by index RM preskočil nejaké neterminály a tie by už nebolo možné nikdy využiť v žiadnom pravidle. Aplikujme teda toto pravidlo a dostaneme vetnú formu v tvare:

$$Q_0\ B_1\overline{B_{2_{RM}}^1} \dots \overline{B_l^1}\ \overline{\#^1}\ \overline{X}\ \overline{Q_1}\ \overline{B_2}\ R, 0 < l$$

Dostávame sa teda do podobnej situácie ako predtým a musíme ďalej aplikovať pravidlá z tohoto bodu algoritmu (ešte celkom $l-2$ krát), až napokon dostaneme vetnú formu v tvare:

$$Q_0\ B_1 B_2 \dots B_{l-1}\overline{B_{l_{RM}}^1}\ \overline{\#^1}\ \overline{X}\ \overline{Q_1}\ \overline{B_2} \dots \overline{B_l}\ R, 0 < l$$

V tomto momente sú aplikovateľné pravidlá vytvorené na základe bodu číslo 14 a pravidlo číslo 25, ktoré avšak nemôžeme použiť z rovnakého dôvodu ako predtým. Zvoľme teda prvé z menovaných a po jeho aplikácií dostávame vetnú formu v tvare:

$$Q_0\ B_1 B_2 \dots B_l\ \overline{\#^1}\ \overline{X}\ \overline{Q_1}\ \overline{B_2} \dots \overline{B_l}\ R, 0 < l$$

Teraz sa už konečne vo vetnej forme nenachádzajú žiadne neterminály naľavo od $\overline{\#^1}$ a môžeme teda využiť pravidlo číslo 25, ktoré nás dostane do nami želanej vetnej formy zobrazenej v 3.1.

**(b)** krok doľava: analogicky s krokom doprava, akurát sa použije pravidlo vytvorené na základe bodu 20, vetná forma ktorá vznikne je až na vymenenú pozíciu stavu a prepisovaného znaku totožná ako po aplikácií pravidla 5.

Majme postupnosť správnych konfigurácií (a teda takých, že sú tvorené terminálnymi symbolmi, a oddelené terminálom # a zároveň z i-tej konfigurácie sa TS môže v jednom kroku dostať do i+1-tej konfigurácie $\forall i, 0 < i < n$, kde $n$ je počet konfigurácií), zakončených postupnosťou neterminálnych symbolov v tvare $\$\overline{A_1}\ \overline{A_2}\dots\overline{A_k}\ \overline{Q}\ \overline{B_1}\ \overline{B_2}\dots\overline{B_l}\ \overline{\#}S$. Pričom $\$\overline{A_1}\ \overline{A_2}\dots\overline{A_k}\ \overline{Q}\ \overline{B_1}\ \overline{B_2}\dots\overline{B_l}$ predstavuje správnu konfiguráciu avšak tvorenú výhradne neterminálnymi symbolmi. Potom je jediný možný spôsob pokračovania využiť pravidlo, ktoré obsahuje $S$ (vzhľadom na skutočnosť, že v reťazci nemáme žiadny zo symbolov s indexom LLM, RLM alebo RM a zároveň postupnosť neobsahuje neterminál R a ani $S_1$ alebo $S_0$). Druhou možnosťou by bolo použiť pravidlo 21 ($(\overline{\#}) \rightarrow (\overline{\sqcup}\ \overline{\#})$). Avšak týmto by sme iba na koniec konfigurácie tvorenej neterminálnymi symbolmi pridali postupnosť prázdnych symbolov a správnosť by nebola porušená (obecne predpokladáme, že na konci postupnosti sa môže vyskytovať ľubovoľný počet prázdnych znakov). A teda máme nasledujúce možnosti ako môže vyzerať vetná forma (zanedbajme teraz symboly nachádzajúce sa pred neterminálom \$, nakoľko tie z nášho pohľadu nie sú zaujímavé - sú to buď terminálne symboly, alebo neterminálne symboly, ktoré už nebude možné využiť v žiadnom pravidle):

1. $|\overline{A_1}\overline{A_2}\dots\overline{A_k}| > 0 \wedge |\overline{B_1}\ \overline{B_2}\dots\overline{B_l}| > 0$, hlava stroja sa teda nenachádza na žiadnom kraji pásky a môžeme voliť z nasledujúcich krokov:

   - Vyberieme pravidlo reprezentujúce nesprávny krok (pod nesprávnym krokom rozumieme krok, ktorý nepoužije neterminál $\overline{B_1}$):

     **(a)** doprava. A teda využijeme pravidlo ktoré vzniklo na základe bodu 4 a prepisuje neterminál $B_i$, pre nejaké $i, 2 \leq i \leq l$ na $X$ a stav stroja sa mení z $Q_1$ na $Q_2$ čiže dané pravidlo vyzerá takto

     $$(\$, \overline{Q_1}, \overline{B_i}, \overline{\#}, S) \rightarrow (\$, \overline{Q_{1LLM}}, \overline{B_{iRM}}, \overline{\#}, \overline{X_{RLM}}\ \overline{Q_2}\ R).$$

     Vznikla nám teda vetná forma v tvare

     $$\$\overline{A_1}\ \overline{A_2}\dots\overline{A_k}\ \overline{Q_{LLM}}\ \overline{B_1}\ \dots\overline{B_{i-1}}\ \overline{B_{iRM}},\dots\overline{B_l}\ \overline{\#X_{RLM}}\ \overline{Q_2}\ \overline{B_{i+1}}\ R,$$
     $$0 < k, l \wedge 1 < i < l.$$

     Z aplikovateľných pravidiel je jasné, že pokiaľ chceme teraz pokračovať, musíme využiť nejaké z pravidiel, ktoré začne prepisovať neterminály reprezentujúce zásobníkovú abecedu (zanedbajme pravidlo číslo 21 z dôvodu uvedeného vyššie). Aby sme to mohli urobiť, musíme mať naľavo od daného pravidla neterminál \$ a zároveň neterminál s indexom RM, alebo neterminál \$ naľavo a zároveň napravo neterminál s indexom LLM. Očividne teda neterminály $\overline{B_1}$ až $\overline{B_i}$ nie je momentálne možné použiť v žiadnom pravidle (ako sme už vysvetlili v bode 7). Z uvedeného je jasné, že pokiaľ by sme zvolili zlé pravidlo simulujúce krok doprava, tak sa nikdy nedostaneme k reťazcu obsahujúcemu iba terminály.

     **(b)** doľava. A teda použijeme jedno z pravidiel vytvorené na základe bodu:
     - 19 ($(\$, \overline{Q_1}, \overline{A}, \overline{\#}, S) \rightarrow (\$, Q_1, \overline{A_{RM}}, \overline{\#},\ \overline{Q_2}\ \overline{B}R)$). V tomto prípade dostávame vetnú formu v tvare:

       $$\$\overline{A_1}\ \overline{A_2}\dots\overline{A_k}\ Q\ \overline{B_1}\ \dots\overline{B_i}\ \overline{B_{i+1_{RM}}},\dots\overline{B_l}\ \overline{\#X_{RLM}}\ \overline{Q_2}\ \overline{B_{i+1}}\ R,$$
       $$0 < k, i, l \wedge 1 < i < l$$

       Tento príklad je analogický s nesprávnym krokom doprava. Znova nám zostal neterminál medzi indexom LLM a indexom RM.

- 16 $((\$, \overline{C}, \overline{Q_1}, \overline{A}, S) \rightarrow (\$, \overline{C_{LLM}}, Q_1, \overline{A_{RM}}, \overline{Q_{2_M}}\ \overline{C}\ \overline{B}R))$ - dostávame vetnú formu v tvare

  $\$\overline{A_1}\ \ldots \overline{A_{j_{LLM}}} \ldots \overline{A_k}\ Q\ \overline{B_1}\ \ldots \overline{B_i}\ \overline{B_{i+1_{RM}}}, \ldots \overline{B_l}\ \overline{\#}\ \overline{Q_{2_M}}\ \overline{A_j}\ \overline{X}R,$
  $0 < k, i, l, j \wedge 1 < i < l \wedge 0j \leq k$

  Analogicky s predchádzajúcimi príkladmi, nikdy nie je možné pokračovať v derivácií s neterminálom $B_1$

- Vyberieme pravidlo reprezentujúce správny krok (vyberie sa pravidlo, ktoré využije neterminál $B_1$ a stav Q, avšak nakoľko pracujeme s deterministickými Turingovými strojmi, takéto pravidlo môže byť nanajvýš jedno pri kroku doprava, alebo dve pre posun hlavy doľava, nikdy nie obe možnosti):

  **(a)** doprava - a teda po jeho použití vznikne vetná forma v tvare:

  $$\$\overline{A_1}\ \overline{A_2} \ldots \overline{A_k}\ \overline{Q_{LLM}}\ \overline{B_{1_{RM}}} \ldots \overline{B_l}\ \overline{\#}\ \overline{X_{RLM}}\ \overline{Q_2}\ R, 0 < k, l$$

  Túto vetnú formu je nutné prepísať na tvar

  $$\#A_1A_2 \ldots A_kQB_1 \ldots B_l\ \$\ \overline{A_1}\ \overline{A_2} \ldots \overline{A_k}\ \overline{X}\ \overline{Q_2}\ \overline{B_2} \ldots \overline{B_l}\overline{\#}S, \tag{3.2}$$

  pričom predpokladáme, že ak $\delta$ je prechodová funkcia Turingovho stroja, ktorého prevod prevádzame, potom $\delta(Q, B_1) = (Q_2, X, R)$. Začneme teda postupne prepisovať jednotlivé neterminály:

  - Pokiaľ sa pokúsime prepísať neterminál $\overline{A_1}$, zistíme že jediné pravidlo, ktoré je možné použiť je to ktoré vzniklo na základe bodu 8 $((\$, \overline{C}, \overline{Q_1}, \overline{A}, \overline{\#}, S) \rightarrow (\$, \overline{C_{LLM}}, Q_1, \overline{A_{RM}}, \overline{\#}, \overline{Q_{2_{RLM}}}\ \overline{C}\ \overline{B}R))$. Avšak v tomto prípade by sme znova dostali neterminály, ktoré sa nachádzajú vľavo od indexu RM a vpravo od LLM, čo už sme ukázali, že nie je možné ich použiť v žiadnom pravidle.
  - Analogicky pre neterminály $\overline{A_2}$ až $\overline{A_{k-1}}$
  - Zoberme teda neterminál $\overline{A_k}$. V tomto prípade dostávame aplikáciou pravidla vetnú formu v tvare

    $$\$\overline{A_1A_2} \ldots \overline{A_{k_{LLM}}}Q\overline{B_{1_{RM}}} \ldots \overline{B_l\#}\ \overline{A_{k_{RLM}}XQ_2}R, 0 < k, l.$$

    Postupne teda budeme brať vždy ten neterminál $A_i$, ktorý je priamo predchádza neterminálu s indexom LLM. Po $k$ aplikáciách jedného z pravidiel tohoto typu, dostávame vetnú formu

    $$\$\overline{A_{1_{LLM}}}\ A_2 \ldots A_kQ\overline{B_{1_{RM}}} \ldots \overline{B_l}\ \overline{\#A_{1_{RLM}}} \ldots \overline{A_k}\ \overline{X}\ \overline{Q_2}\ R, 0 < k, l.$$

    Aplikujeme pravidlá, ktoré vznikli na základe bodov 10 a 15 $(\$, \overline{A_{1_{LLM}}}) \rightarrow (\$, A_1)$ a $(\$, \overline{\#}, \overline{A_{1_{RLM}}}) \rightarrow (\$, \overline{\#}, \overline{A_1})$. Na poradí nezávisí a očividne sú to jediné pravidlá, ktoré môžeme aplikovať na neterminály s indexom LLM resp. RLM v danej vetnej forme. Následnými deriváciami teda dostávame vetnú formu

    $$\$A_1A_2 \ldots A_kQ\overline{B_{1_{RM}}} \ldots \overline{B_l}\ \overline{\#}\ \overline{A_1} \ldots \overline{A_k}\ \overline{X}\ \overline{Q_2}\ R, 0 < k, l.$$

    A teda sme v aktuálne aj budúcej konfigurácií dostali správne terminály respektíve neterminály na pozíciách, ktoré sa vo vetnej forme nachádzajú naľavo od symbolu reprezentujúceho stav v danej konfigurácií.

– Predpokladajme aplikáciu pravidiel z predchádzajúceho bodu (aj keď na poradí aplikácie nezáleží ako uvidíme v tomto bode, nakoľko sa vždy budeme držať naľavo respektíve napravo od symbolu reprezentujúceho stav). Majme teda vetnú formu

$$\$A_1 A_2 \dots A_k Q \overline{B_{1_{RM}}} \dots \overline{B_l}\ \overline{\#}\ \overline{A_1} \dots \overline{A_k}\ \overline{X}\ \overline{Q_2}\ R, 0 < k, l.$$

Bez straty objektivity predpokladajme, že $l \geq 3$. Skúsme aplikovať ľubovoľné pravidlo obsahujúce neterminál $\overline{B_l}$ na pravej strane. Jediné aplikovateľné pravidlo obsahujúce $\overline{B_l}$ je to, ktoré vzniklo na základe bodu 6 a má teda tvar $(\$, \overline{B1_{RM}}, \overline{B_l}, \overline{\#}, R) \rightarrow (\$, B_1, \overline{Bl_{RM}}, \overline{\#}, \overline{B_l}R)$. Avšak týmto spôsobom sa nám ostávajú neterminály vyskytujúce sa medzi indexami RM a LLM a teda sa nikdy nebudeme schopný, žiadnou postupnosťou derivácií dostať k vete. Očividne musíme teda použiť pravidlo , ktoré vzniklo na základe bodu 6 a zároveň obsahuje na pravej strane neterminál $B_2$. Pravidlo spĺňujúce tieto podmienky má tvar $(\$, \overline{B1_{RM}}, \overline{B_2}, \overline{\#}, R) \rightarrow (\$, B_1, \overline{B2_{RM}}, \overline{\#}, \overline{B_2}R)$. Po jeho aplikácií dostávame vetnú formu

$$\$A_1 A_2 \dots A_k Q B_1 \overline{B_{2_{RM}}} \dots \overline{B_l}\ \overline{\#}\ \overline{A_1} \dots \overline{A_k}\ \overline{X}\ \overline{Q_2}\ \overline{B_2}R, 0 < k, l.$$

Vždy teda zvolíme pravidlo tohoto typu, obsahujúce neterminál, ktorý priamo nasleduje neterminál s indexom RM. Postupnými deriváciami nám vznikne vetná forma v tvare

$$\$A_1 A_2 \dots A_k Q B_1 B_2 \dots \overline{B_{l_{RM}}}\ \overline{\#}\ \overline{A_1} \dots \overline{A_k}\ \overline{X}\ \overline{Q_2}\ \overline{B_2} \dots \overline{B_l}R, 0 < k, l.$$

Na posledný zostávajúci neterminál $\overline{B_l}$ reprezentujúci symbol zásobníkovej abecedy $B_l$ môžeme aplikovať iba pravidlo, ktoré vzniklo na základe bodu 13 a jeho aplikáciou dostaneme vetnú formu

$$\$A_1 A_2 \dots A_k Q B_1 B_2 \dots B_l\ \overline{\#}\ \overline{A_1} \dots \overline{A_k}\ \overline{X}\ \overline{Q_2}\ \overline{B_2} \dots \overline{B_l}R, 0 < k, l$$

Pri tejto vetnej forme môžeme aplikovať jediné pravidlo (okrem pravidla na generovanie prázdnych symbolov na konci konfigurácie, čo by nás ale doviedlo do vetnej formy, z ktorej nie je možné vytvoriť vetu). Tým pravidlom je pravidlo z bodu 24 $((\$, \overline{\#}, R) \rightarrow (\#, \$, \overline{\#}S))$, čím dostávame znova správnu konfiguráciu v tvare ako sme uviedli v rovnici 3.2, ku ktorej sme sa snažili dopracovať postupnou aplikáciou pravidiel a ktorá predstavuje novú konfiguráciu, správne nasledujúcu tú predchádzajúcu.

**(b)** doľava a teda použijeme pravidlo, ktoré vzniklo na základe bodu 16 $((\$, \overline{C}, \overline{Q_1}, \overline{A}, \overline{\#}, S) \rightarrow (\$, \overline{C_{LLM}}, Q_1, \overline{A_{RM}}, \overline{\#}, \overline{Q_{2_{RLM}}}\ \overline{C}\ \overline{B}R) \in P)$. V tom prípade dostávame vetnú formu v tvare (pamätajte, že sme vylúčili pravidlá, ktoré zvolia neterminál, na ktorom sa nenachádza aktuálne hlava) :

$$\$\overline{A_1}\ \overline{A_2} \dots \overline{A_{k-1}}\ \overline{A_{k_{LLM}}}Q\ \overline{B_{1_{RM}}B_2} \dots \overline{B_l}\ \overline{\#}\ \overline{Q_{2_{RLM}}}\ \overline{A_k}\ \overline{X}\ R, 0 < k, l$$

V predchádzajúcich bodoch sme si ukázali, že postupne musíme posúvať oba indexy o jedno miesto doľava (v prípade indexu LLM) resp. doprava (index RM) a teda sa dostaneme k vetnej forme, ktorá má tvar:

$$\$A_{1LLM}\ A_2 \dots A_{k-1}\ A_k Q\ B_1 B_2 \dots B_{lRM}\ \overline{\#}$$
$$\overline{A_1}_{RLM}\ \overline{A_2} \dots \overline{A_{k-1}Q_2}\ \overline{A_k}\ \overline{X}\ \overline{B_2} \dots \overline{B_l}\ R, 0 < k, l$$

Vidíme, že medzi znakom \$ a $\overline{\#}$ sa nachádzajú už iba terminály. Zároveň medzi znakmi $\overline{\#}$ a R sa nachádzajú iba neterminálne symboly, ktoré korektne reprezentujú konfiguráciu automatu, ktorá vznikla aplikáciou pravidla $\delta(Q, B_1) = (Q_2, X, L)$ z pôvodného Turingovho stroja. Následne aplikujeme pravidlo z bodu 24 a posunieme aktuálny stav, a znova sa dostávame do valídnej konfigurácie tvorenej neterminálmi a ukončenej neterminálmi $\overline{\#}\ S$

2. $|\overline{A_1}\ \overline{A_2} \dots \overline{A_k}| = 0 \wedge |\overline{B_1}\ \overline{B_2} \dots \overline{B_l}| > 0$ hlava sa teda nachádza na ľavom okraji pásky a vetná forma vyzerá nasledovne:

$$\$\overline{Q}\ \overline{B_1 B_2} \dots \overline{B_k}\ \overline{\#}\ S, 0 < k$$

. Nakoľko uvažujeme Turingov stroj bez abnormálneho zakončenia, pri prípadnom kroku doľava hlava nevypadne, ale ostane na mieste. Uvažujme teda krok:

   **(a)** doprava : V tomto prípade je jediný rozdiel oproti stavu, keď sa hlava nachádza uprostred pásky ten, že na odstránenie indexu LLM sa použije pravidlo vytvorené na základe bodu 9 $(\$, \overline{Q_{LLM}}, \overline{\#}) \rightarrow (\$, Q, \overline{\#}))$ namiesto pravidla vytvoreného na základe bodu 10. Všetky ostatné vlastnosti vetnej formy, ktoré sme dokázali v bode **(a)** stále platia.

   **(b)** doľava : V tomto prípade je správny krok reprezentovaný pravidlom vytvoreným na základe bodu 19 $((\$, \overline{Q_1}, \overline{A}, S) \rightarrow (\$, Q_1, \overline{A_{RM}}\ \overline{Q_2}\ \overline{B}R))$ pre nasledovné pravidlo pôvodného Turingovho stroja $\delta(Q_1, B) = (Q_2, X, L)$. Všimnime si, že v tomto prípade by pravidlo z bodu 16 nebolo možné použiť, nakoľko naľavo od neterminálu reprezentujúceho stav sa nachádza už iba neterminál \$. A teda aplikáciou pravidla vytvoreného na základe bodu 19 dostávame vetnú formu v tvare:

$$\$Q\ \overline{B_{1_{RM}} B_2} \dots \overline{B_k}\ \overline{\#}\ \overline{Q_2}\ \overline{X}\ R, 0 < k$$

   Vidíme, že časť konfigurácie naľavo od terminálu reprezentujúceho stav (či už v aktuálne alebo budúcej konfigurácií) je vyriešená a ostáva prepísať iba pravú stranu, čo sme ukázali v bode **(b)**.

3. $|\overline{B_1}\ \overline{B_2} \dots \overline{B_l}| = 0$ - v tomto prípade využijeme pravidlo $(\overline{\#}) \rightarrow (\overline{\sqcup}\ \overline{\#})$ a medzi neterminál reprezentujúci stav a neterminál $\overline{\#}$ vložíme ľubovoľný počet symbolov reprezentujúcich prázdne políčko na páske a teda po aplikácií tohoto pravidla je očividne $|\overline{B_1}\ \overline{B_2} \dots \overline{B_l}| > 0$ a môžeme uvažovať predchádzajúce prípady.

V poslednej časti dôkazu sa budem venovať situácií, keď sa do aktuálnej konfigurácie dostane neterminál $\overline{Q_{acc}}$ alebo $\overline{Q_{rej}}$. Nakoľko toto sa stane po aplikácií pravidla simulujúci nejaký krok máme vetnú formu v tvare:

$$(\$, \overline{Q_1}, \overline{B_i}, \overline{\#}, S) \rightarrow (\$, \overline{Q_{1LLM}}, \overline{B_{iRM}}, \overline{\#}, \overline{X_{RLM}}\ \overline{Q_{rej/acc}}\ R).$$

Nakoľko všetky pravidlá majúce na ľavej strane $\overline{Q_{rej/acc}}$ pracujú iba s neterminálmi naľavo od $\overline{\#}$, musíme klasicky tak ako v prechádzajúcich prípadoch prepísať najprv stav. Rozdiel nastáva až predtým ako by sme chceli posunúť aktívnu konfiguráciu smerom doprava. Pokiaľ by sme to spravili (s použitím pravidla z bodu 24), tak vzhľadom na skutočnosť, že z koncových stavov už neexistuje žiadne pravidlo, ostali by sme zaseknutí. Musíme teda v tomto prípade všetky neterminály reprezentujúce symboly zásobníkovej abecedy napravo od # prepísať na terminály pomocou pravidiel 26 až 29. V tomto prípade nezáleží na poradí, chceme prepísať všetky neterminály napravo od #. Následne prepíšeme aj neterminály reprezentujúce stav, resp. riadiace symboly \$, $\overline{\#}$, a $R$ (s využitím pravidla číslo 22 respektíve 23). Týmto dostávame vetu, ktorá reprezentuje výpočetnú históriu Turingovho stroja, kde sú jednotlivé konfigurácie oddelené znakom #. □

## 3.2 Vyjadrovacia sila propagujúcich gramatík s rozptýleným kontextom

V kapitole 2 sme si uviedli teorém 2.10 a otvorený problém 2.11, v ktorých sme si povedali, že rodina jazykov prijímaných propagujúcimi gramatikami s rozptýleným kontextom ($\mathscr{L}(SC^{-\varepsilon})$) je podmnožinou rodiny jazykov generovaných kontextovými gramatikami ($\mathscr{L}(CS)$), ale je zatiaľ stále otvoreným problémom, či táto inklúzia nie je v skutočnosti identita.

Avšak pomocou algoritmu, ktorý bol predstavený v tejto kapitole, pomocou propagujúcich gramatík s rozptýleným kontextom je možné prijať celú výpočetnú históriu Turingových strojov, ktoré ako vieme definujú rodinu rekurzívne vyčísliteľných jazykov. Ich jazykom je množina postupností, pri ktorých nejaký Turingov stroj zastaví, čo je samo o sebe známy rekurzívne vyčísliteľný jazyk [9]. Uvažujme drobnú úpravu k algoritmu 1.

---

**Algoritmus 2** Prevod Turingovho stroja na gramatiku s rozptýleným kontextom prijímajúcu množinu jeho akceptujúcich výpočetných histórií

---

**Vstup:** Turingov stroj $M = (Q_{TM}, \Sigma_1, \Gamma, \delta, Q_0, Q_{acc}, Q_{rej})$

**Výstup:** Gramatika s rozptýleným kontextom $G = (N, T, P, S_0)$, kde $L(G) = \{x|\ x$ je výpočetná história Turingovho stroja $M$ pre vstup $w$ na ktorom $M$ zastaví$\}$

1: Vytvoríme gramatiku $G_1 = (N_1, T_1, P_1, S_0)$ na základe algoritmu 1.

2: Vytvoríme $G = (N, T, P, S_0)$, pričom

3: $N = N_1$,

4: $T = T_1$,

5: $P = P_1 - \{(\$, \overline{\#}, \overline{Q_{REJ}}, R) \rightarrow (\#, \#, Q_{REJ}, \#)\}$ (jedná sa o pravidlo na základe bodu 22 pôvodného algoritmu).

---

V tomto prípade už jazykom gramatiky je iba množina prijímajúcich konfigurácií, zatiaľ čo pri ostatných sa buď zasekne a nebude možné pokračovať, alebo bude generovať donekonečna stále nové konfigurácie (čo je ekvivalentné cykleniu Turingovho stroja). Toto správanie je veľmi podobné univerzálnemu Turingovmu stroju, o ktorom sme sa zmienili v časti 2.3.

Pokiaľ ale dokážeme vytvoriť propagujúcu gramatiku s rozptýleným kontextom, ktorá simuluje činnosť univerzálneho Turingovho stroja, potom sme **dosiahli na výpočetnú silu ekvivalentnú Turingovým strojom** a dostali sme sa do oblasti rekurzívne vyčísliteľných jazykov. Nie sme síce schopní generovať presne priamo tieto jazyky, ale zato vieme vygenerovať výpočetné histórie Turingovho stroja, ktorý tieto jazyky prijíma. Z toho vystávajú nejaké otázky, na ktoré táto práca nedáva odpoveď

**Otvorený problém 3.1.** Je možné prijať jazyk simulujúci prácu univerzálneho Turingovho stroja aj pomocou iného typu gramatík, o ktorých vyjadrovacej sile sa predpokladá, že je podobná výpočetnej sile propagujúcich gramatík s rozptýleným kontextom?

**Otvorený problém 3.2.** Aká je výpočetná sila propagujúcich gramatík s rozptýleným kontextom vzhľadom ku kontextovým gramatikám?

**Otvorený problém 3.3.** Je možné zavedením nejakých obmedzení na výber pravidiel celý proces zdeterminovať?

Nakoľko algoritmus je vystavaný tak, aby nemusel začínať symbolom # (to bol hlavný dôvod toho, že sme pridávali do gramatiky neterminály s horným indexom 1), tak je jednoducho možné odseknúť všetky neterminály za prvým výskytom znaku # a dostaneme počiatočnú konfiguráciu Turingovho stroja, obsahujúcu stav a prijatý reťazec. Je samozrejme možná aj verzia algoritmu neobsahujúca pravidlá s horným indexom 1 pričom ale každá veta z jazyka prijímaného takouto gramatikou začína symbolom # (táto verzia je bez dôkazu uvedená v prílohe C). Jedná sa ale iba o kozmetickú vadu a hlavná myšlienka, ktorú chce táto práca ukázať ostáva zachovaná. Rovnako je ale možné drobnými úpravami, ktoré by pred počiatočnú konfiguráciu nagenerovali iba reťazec a tak by každá veta začínala priamo prijímaným reťazcom oddeleným od zvyšku vety.

Táto verzia by značne zredukovala počet pravidiel výslednej gramatiky. Avšak celkový počet pravidiel by stále ostal značne veľký. Takisto je patrný rapídny nárast počtu pravidiel pre obe verzie s rastúcou veľkosťou abecedy a počtu stavov Turingovho stroja.

# Kapitola 4

# Ukážka práce navrhnutého algoritmu

V rámci tejto kapitoly ukážem dve gramatiky, ktoré vznikli na základe algoritmu 1. V prvom prípade ide o veľmi malý a jednoduchý stroj, ktorý slúži iba na ukážku tvorby, v druhom prípade som zvolil o niečo zložitejší stroj, na ktorom aj detailne ukážem postup generovania vety.

## 4.1 Turingov stroj rozhodujúci jazyk a*

**Príklad 4.1.** Majme Turingov stroj

$$M_1 = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_1, q_{accept}, q_{reject}) :$$

- $Q = \{q_1, q_{accept}, q_{reject}\}$,
- $\Sigma = \{a\}$, a
- $\Gamma = \{a, \sqcup\}$.
- $\delta$ je popísaná pomocou stavového diagramu (viď obrázok 4.1).
- počiatočný, prijímajúci a koncový stav sú $q_1$, $q_{accept}$ a $q_{reject}$.

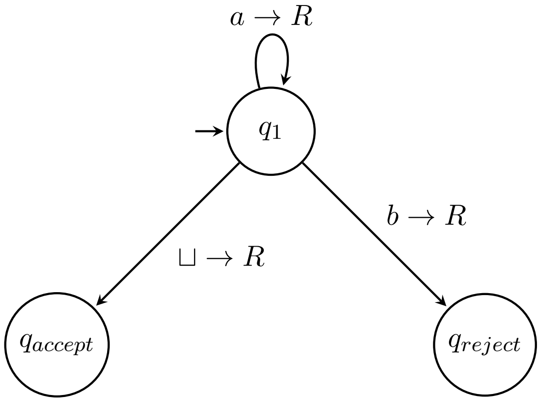
Vidíme, že sa jedná o veľmi jednoduchý stroj, ktorý rozhoduje primitívny jazyk, ktorý patrí do triedy regulárnych jazykov. Aplikujme teda postupne jednotlivé body algoritmu 1 a vytvorme tak propagujúcu gramatiku s rozptýleným kontextom, ktorá bude prijímať výpočetné histórie Turingovho stroja $M_1$. Napokon dostávame nasledujúcu gramatiku

$$G = (N, T, P, S_0) :$$

- $N = \{\overline{\#^1}, \overline{\#}, \$, L, R, S, \overline{\sqcup^1}, \overline{\sqcup^1_{LLM}}, \overline{\sqcup^1_{RM}}, \overline{\sqcup}, \overline{\sqcup_{LLM}}, \overline{\sqcup_{RLM}}, \overline{\sqcup_{RM}}, \overline{a^1}, \overline{a^1_{LLM}}, \overline{a^1_{RM}}, \overline{a}, \overline{a_{LLM}}, \overline{a_{RLM}}, \overline{a_{RM}}, \overline{b^1}, \overline{b^1_{LLM}}, \overline{b^1_{RM}}, \overline{b}, \overline{b_{LLM}}, \overline{b_{RLM}}, \overline{b_{RM}}, \overline{Q1}, \overline{Q1_{LLM}}, \overline{Q_{acc}}, \overline{Q_{accLLM}}, \overline{Q_{rej}}, \overline{Q_{rej\,LLM}}\}$
- $T = \{\#, \sqcup, a, b, Q1, Q_{acc}, Q_{rej}\}$
- Množina pravidiel $P$ je z dôvodu ich vysokého počtu priložená v prílohe B.

Ako môžeme vidieť, množina pravidiel je značne rozsiahla (obsahuje 104 pravidiel). A to napriek skutočnosti, že sa jedná o Turingov stroj s minimálnym možným počtom stavov a abecedou obsahujúcou iba dva znaky.

Obrázek 4.1: Stavový automat pre Turingov stroj $M_1$.




## 4.2 Turingov stroj rozhodujúci jazyk $0^{2^n}$

V tejto časti sa budem detailne venovať ukážkovej gramatike, ktorú som vytvoril. Na ukážku fungovania algoritmu som zvolil Turingov stroj z knihy Introduction to the Theory of Computation [9], ktorý rozhoduje jazyk $A = \{0^{2^n} | n \geq 0\}$

**Príklad 4.2.** Turingov stroj, ktorý som si zobral ako základ vyzerá nasledovne:

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_1, q_{accept}, q_{reject}) :$$

- $Q = \{q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_{accept}, q_{reject}\}$,
- $\Sigma = \{0\}$, a
- $\Gamma = \{0, x, \sqcup\}$.
- $\delta$ je popísaná pomocou stavového diagramu (viď obrázok 4.2).
- počiatočný, prijímajúci a koncový stav sú $q_1$, $q_{accept}$ a $q_{reject}$.

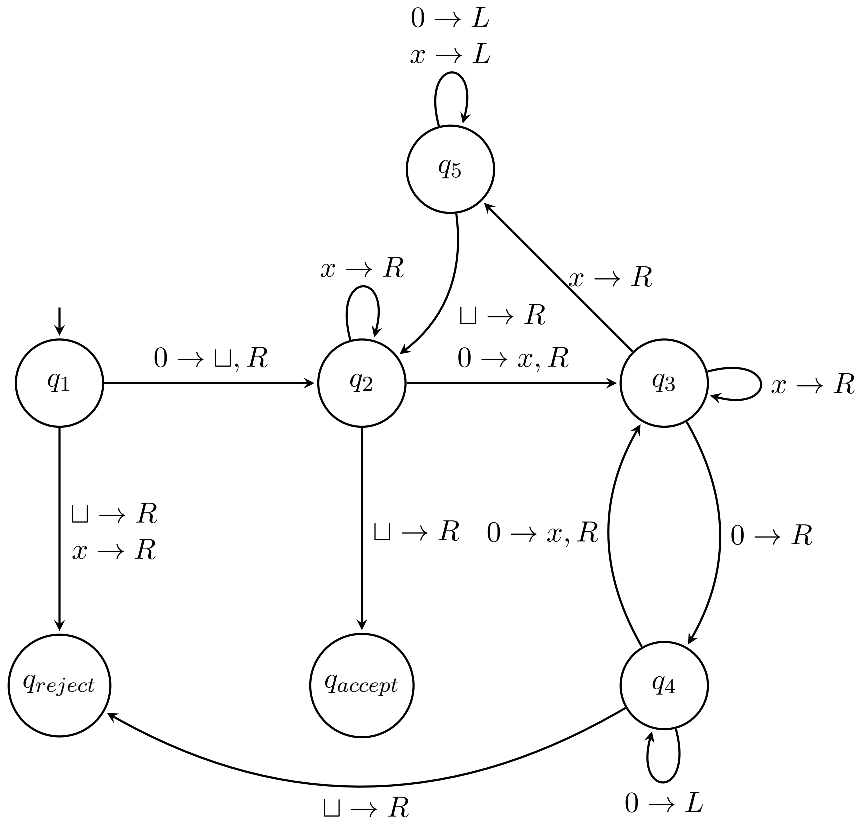
Výsledná gramatika vyzerá nasledovne:

$$G = (N, T, P, S_0) :$$

- $N = \{S_0, S, R, \overline{Q_{ACC}}, \overline{Q_{REJ}}, \overline{Q_1}, \overline{Q_2}, \overline{Q_3}, \overline{Q_4}, \overline{Q_5}, \overline{Q1_M}, \overline{Q2_M}, \overline{Q3_M}, \overline{Q4_M}, \overline{Q5_M}, \overline{0}, \overline{0_{LLM}}, \overline{0_{RLM}}, \overline{0_{RM}}, \overline{X}, \overline{X_{LLM}}, \overline{X_{RLM}}, \overline{X_{RM}}, \overline{\sqcup}, \overline{\sqcup_{LLM}}, \overline{\sqcup_{RLM}}, \overline{\sqcup_{RM}}\}$,
- $T = \{0, X, \sqcup, Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, Q_{ACC}, Q_{REJ}\}$
- Množina pravidiel $P$ je z dôvodu ich veľkého počtu uvedená v prílohe A

Povedzme, že chceme vygenerovať reťazec $w = 0000$ a prijať reťazec, ktorý predstavuje sériu konfigurácií Turingovho stroja $M$ s reťazcom $w$ na vstupe. Konfigurácie Turingovho stroja pre reťazec $w$ sú nasledovné

Obrázek 4.2: Stavový automat pre Turingov stroj $M$.




| | | |
|---|---|---|
| $q_1 0000$ | $\sqcup q_5 X0X\sqcup$ | $\sqcup Xq_5XX\sqcup$ |
| $\sqcup q_2 000$ | $q_5 \sqcup X0X\sqcup$ | $\sqcup q_5XXX\sqcup$ |
| $\sqcup Xq_3 00$ | $\sqcup q_2X0X\sqcup$ | $q_5 \sqcup XXX\sqcup$ |
| $\sqcup X0q_4 0$ | $\sqcup Xq_2 0X\sqcup$ | $\sqcup q_2XXX\sqcup$ |
| $\sqcup X0Xq_3\sqcup$ | $\sqcup XXq_3X\sqcup$ | $\sqcup Xq_2XX\sqcup$ |
| $\sqcup X0q_5X\sqcup$ | $\sqcup XXXq_3\sqcup$ | $\sqcup XXq_2X\sqcup$ |
| $\sqcup Xq_5 0X\sqcup$ | $\sqcup XXq_5X\sqcup$ | $\sqcup XXXq_2\sqcup$ |
| | | $\sqcup XXX \sqcup q_{accept}$ |

Začnime teda postupne prepisovať počiatočný symbol $S_0$ tak, aby sme dostali počiatočnú konfiguráciu.

$$
\begin{aligned}
S_0 &\Rightarrow_G \overline{Q_1{}^1}S1 && [236\ (S0) \to (\overline{Q_1{}^1}S1)] \\
&\Rightarrow_G \overline{Q_1{}^1}\,\overline{0^1}S1 && [234\ (S1) \to (\overline{0^1}S1)] \\
&\Rightarrow_G^3 \overline{Q_1{}^1}\,\overline{0^1 0^1 0^1 0^1}S1 && [234\ (S1) \to (\overline{0^1}S1)] \\
&\Rightarrow_G \overline{Q_1{}^1}\,\overline{0^1 0^1 0^1 0^1 \#^1}S && [235\ (S1) \to (\overline{\#^1}S]
\end{aligned}
$$

Teraz máme neterminály reprezentujúce počiatočnú konfiguráciu ukončenú mriežkou. Zoberme teda pravidlo, reprezentujúce prechod $\delta(Q_1, 0) = (Q_2, \sqcup, R)$. A následne budeme pokračovať prepisovaním indexu RM smerom doprava

$$
\begin{aligned}
\overline{Q_1}^{1}\overline{0^1}\,\overline{0^1}\,\overline{0^1}\,\overline{0^1}\,\overline{\#^1}S &\Rightarrow_G Q_1\overline{0^1_{RM}}\,\overline{0^1}\,\overline{0^1}\,\overline{0^1}\,\overline{\#^1}\square\overline{Q_2}R &&[1\ (\overline{Q_1}^{1}, \overline{0^1}, \overline{\#^1}, S) \to (Q_1, \overline{0^1_{RM}}, \overline{\#^1}, \square\overline{Q_2}R)]\\
&\Rightarrow_G Q_1 0\overline{0^1_{RM}}\,\overline{0^1}\,\overline{0^1}\,\overline{\#^1}\square\overline{Q_2}\,\overline{0}R &&[25\ (\overline{0^1_{RM}}, \overline{0^1}, \overline{\#^1}, R) \to (0, \overline{0^1_{RM}}, \overline{\#^1}, \overline{0}R)]\\
&\Rightarrow_G^2 Q_1 000\overline{0^1_{RM}}\,\overline{\#^1}\square\overline{Q_2}\,\overline{000}R &&[25\ (\overline{0^1_{RM}}, \overline{0^1}, \overline{\#^1}, R) \to (0, \overline{0^1_{RM}}, \overline{\#^1}, \overline{0}R)]
\end{aligned}
$$

Odstránime index RM a presunieme aktuálnu konfiguráciu doprava

$$
\begin{aligned}
Q_1 000\overline{0^1_{RM}}\,\overline{\#^1}\square\overline{Q_2}\,\overline{000}R &\Rightarrow_G Q_1 0000\overline{\#^1}\square\overline{Q_2}\,\overline{000}R &&[108\ (\overline{0^1_{RM}}, \overline{\#^1}, R) \to (0, \overline{\#^1}, R)]\\
&\Rightarrow_G Q_1 0000\$\square\overline{Q_2}\,\overline{000}\,\overline{\#}S &&[221\ (\overline{\#^1}, R) \to (\$, \overline{\#}S)]
\end{aligned}
$$

Odstránili sme všetky neterminály s horným indexom 1, takže už budeme používať iba pravidlá, ktoré začínajú neterminálom \$. V záujme šetrenia miestom, budem vetné formy písať v tvare $\ldots\$\square\overline{Q_2}\,\overline{000}\,\overline{\#}S$. Sme teda v konfigurácií $\sqcup q_2 000$ a volíme pravidlo reprezentujúce prechod $\delta(Q_2, 0) = (Q_3, X, R)$. Následne pracujeme s indexami LLM a RM.

$$
\begin{aligned}
\ldots\$\square\overline{Q_2}\,\overline{000}\,\overline{\#}S &\Rightarrow_G \ldots\$\square\overline{{Q_2}_{LLM}}\,\overline{0_{RM}00}\,\overline{\#X_{RLM}Q_3}R &&[4]\\
&\Rightarrow_G^2 \ldots\$\square\overline{{Q_2}_{LLM}}\,00\overline{0_{RM}}\,\overline{\#X_{RLM}Q_3}\,\overline{00}R &&[16]\\
&\Rightarrow_G^2 \ldots\$\overline{\sqcup_{LLM}}Q_2 00\overline{0_{RM}}\,\overline{\#}\,\overline{\sqcup_{RLM}}\,\overline{XQ_3}\,\overline{00}R &&[68]
\end{aligned}
$$

Keď už nám neostanú, žiadne neterminály, ktoré by sme mohli prepísať, pomocou týchto indexov, prepíšeme samotné indexy

$$
\begin{aligned}
\ldots\$\overline{\sqcup_{LLM}}Q_2 00\overline{0_{RM}}\,\overline{\#}\,\overline{\sqcup_{RLM}}\,\overline{XQ_3}\,\overline{00}R &\Rightarrow_G \ldots\$\overline{\sqcup_{LLM}}Q_2 000\overline{\#}\,\overline{\sqcup_{RLM}}\,\overline{XQ_3}\,\overline{00}R &&[105]\\
&\Rightarrow_G \ldots\$\sqcup Q_2 000\overline{\#}\,\overline{\sqcup_{RLM}}\,\overline{XQ_3}\,\overline{00}R &&[86]\\
&\Rightarrow_G \ldots\$\sqcup Q_2 000\overline{\#}\square\overline{XQ_3}\,\overline{00}R &&[113]
\end{aligned}
$$

Napokon znova posunieme aktuálnu konfiguráciu doprava

$$
\ldots\$\sqcup Q_2 000\overline{\#}\square\overline{XQ_3}\,\overline{00}R \Rightarrow_G \ldots\#\square Q_2 000\$\square\overline{XQ_3}\,\overline{00}\,\overline{\#}S \quad [220]
$$

$$
\vdots
$$

Týmto spôsobom pokračujeme cez jednotlivé konfigurácie až sa dostaneme k vetnej forme reprezentujúcej konfiguráciu $\sqcup X0Xq_3\sqcup$, ktorá teda vyzerá nasledovne

$$
\ldots\$\square\overline{X}\,\overline{0}\,\overline{XQ_3}\,\overline{\#}S
$$

Zjavne napravo od neterminálu reprezentujúceho stav nemáme už žiadne neterminály, ktoré by reprezentovali stav zásobníkovej abecedy. Musíme teda použiť pravidlo číslo 217

$$
\ldots\$\square\overline{X}\,\overline{0}\,\overline{XQ_3}\,\overline{\#}S \Rightarrow_G \ldots\$\square\overline{X}\,\overline{0}\,\overline{XQ_3}\square\overline{\#}S
$$

Následne už môžeme ďalej pokračovať pravidlom číslo 120 a simulovať krok doľava

$$\begin{aligned}
\dots\$\square\overline{X}\overline{0}\overline{XQ_3}\square\overline{\#}S &\Rightarrow_G \dots\$\square\overline{X}\overline{0}\overline{X_{LLM}}Q_3\overline{\square_{RM}}\overline{\#}\overline{Q5_{RLM}X}\square R && [120]\\
&\Rightarrow_G \dots\$\square\overline{X}\overline{0_{LLM}}0Q_3\overline{\square_{RM}}\overline{\#}\overline{0_{LLM}}\overline{XQ5X}\square R && [137]\\
&\Rightarrow_G \dots\$\square\overline{X_{LLM}}00Q_3\overline{\square_{RM}}\overline{\#}\overline{X_{RLM}}\overline{0}\overline{XQ5X}\square R && [93]\\
&\Rightarrow_G \dots\$\overline{\square_{LLM}}X00Q_3\overline{\square_{RM}}\overline{\#}\overline{\square_{RLM}}\overline{X}\overline{0}\overline{XQ5X}\square R && [92]\\
&\Rightarrow_G \dots\$\overline{\square_{LLM}}X00Q_3\sqcup\overline{\#}\overline{\square_{RLM}}\overline{X}\overline{0}\overline{XQ5X}\square R && [106]\\
&\Rightarrow_G \dots\$\sqcup X00Q_3\sqcup\overline{\#}\overline{\square_{RLM}}\overline{X}\overline{0}\overline{XQ5X}\square R && [85]\\
&\Rightarrow_G \dots\$\sqcup X00Q_3\sqcup\overline{\#}\square\overline{X}\overline{0}\overline{XQ5X}\square R && [112]\\
&\Rightarrow_G \dots\#\sqcup X00Q_3\sqcup\$\square\overline{X}\overline{0}\overline{XQ5X}\square\overline{\#}S && [220]
\end{aligned}$$

Postupnou aplikáciou vhodných pravidiel a následným prepisovaním neterminálov sa napokon dostávame k vetnej forme, ktorá reprezentuje konfiguráciu $\sqcup XXXq_2\sqcup$, z ktorej už nasledujúci krok vedie do prijímajúceho stavu. Vyberme teda odpovedajúce pravidlo a pokračujme

$$\begin{aligned}
\dots\$\square\overline{XXXQ_2}\square\overline{\#}S &\Rightarrow_G \dots\$\square\overline{XXXQ2_{LLM}}\overline{\square_{RM}}\overline{\#}\overline{\square_{RLM}}\overline{Q_{acc}}R && [5]\\
&\Rightarrow_G \dots\$\square\overline{XXX_{LLM}}Q2\overline{\square_{RM}}\overline{\#}\overline{x_{RLM}}\square\overline{Q_{acc}}R && [68]\\
&\Rightarrow_G^2 \dots\$\square\overline{X_{LLM}}XXQ2\overline{\square_{RM}}\overline{\#}\overline{X_{RLM}XX}\square\overline{Q_{acc}}R && [95]\\
&\Rightarrow_G \dots\$\overline{\square_{LLM}}XXXQ2\overline{\square_{RM}}\overline{\#}\overline{\square_{RLM}}\overline{XXX}\square\overline{Q_{acc}}R && [92]\\
&\Rightarrow_G \dots\$\sqcup XXXQ2\overline{\square_{RM}}\overline{\#}\overline{\square_{RLM}}\overline{XXX}\square\overline{Q_{acc}}R && [85]\\
&\Rightarrow_G \dots\$\sqcup XXXQ2\sqcup\overline{\#}\overline{\square_{RLM}}\overline{XXX}\square\overline{Q_{acc}}R && [106]\\
&\Rightarrow_G \dots\$\sqcup XXXQ2\sqcup\overline{\#}\square\overline{XXX}\square\overline{Q_{acc}}R && [112]
\end{aligned}$$

V tomto momente by sme mohli využiť pravidlo 220 a znova posunúť konfiguráciu smerom doprava, avšak nakoľko neexistujú pravidlá, ktorými by sa Turingov stroj dostal z prijímajúceho stavu, nemali by sme použiť aké pravidlo na ďalšiu deriváciu vetnej formy a zasekli by sme sa. Musíme preto využiť množinu pravidiel určených na prepísanie neterminálov na terminály, pomocou pravidiel 218 až 229.

$$\begin{aligned}
\dots\$\sqcup XXXQ2\sqcup\overline{\#}\square\overline{XXX}\square\overline{Q_{acc}}R &\Rightarrow_G^2 \dots\$\sqcup XXXQ2\sqcup\overline{\#}\sqcup\overline{XXX}\sqcup\overline{Q_{acc}}R && [223]\\
&\Rightarrow_G^3 \dots\$\sqcup XXXQ2\sqcup\overline{\#}\sqcup XXX\sqcup\overline{Q_{acc}}R && [229]\\
&\Rightarrow_G \dots\#\sqcup XXXQ2\sqcup\#\sqcup XXX\sqcup Q_{acc}\# && [218]
\end{aligned}$$

Tým sa dostávame k vete, ktorú tvoria výpočetné histórie Turingovho stroja v správnom poradí tak akoby prebiehal výpočet na samotnom Turingovom stroji.

# Kapitola 5

# Implementácia

## 5.1 Jazyk Haskell

Haskell je čisto funkcionálny programovací jazyk. Je pomenovaný po Haskell Brooks Curry, ktorého práca v obore matematickej logiky slúži ako základ pre funkcionálne jazyky. Haskell je založený na lambda kalkuluse, a teda $\lambda$ slúži aj ako logo. Programátorovi ponúka nasledovné vlastnosti [10]:

**(a)** Čistota [1] - Haskell nepovoľuje žiadne vedľajšie efekty, ide o jednu z najdôležitejších vlastností Haskellu.

**(b)** Lenivosť [2] - To znamená, že nič nie je vyčíslené dokiaľ to naozaj nie je nutné. Je teda možné napríklad definovať nekonečný zoznam prvočísiel, bez toho aby program skončil v nekonečnej rekurzii. Reálne vyčíslené budú iba tie prvky, ktoré sa naozaj použijú vo výpočte.

**(c)** Silná typovanosť - Tak ako mnohé deklaratívne jazyky je Haskell silno typovaný jazyk a je teda nemožné mimovoľne uložiť do premennej ktorá je označená ako *int* hodnotu, ktorá je typu *double*. To vedie k menšiemu počtu chýb. Na rozdiel od mnohých iných jazykov sú typy v Haskelly zisťované automaticky a teda nie je nutné ich explicitne špecifikovať (možno pre dokumentačné účely).

Taktiež je v jazyku Haskell intuitívne poňatie matematických funkcií, ktoré je možné skladať tak ako sme zvyknutí z hodín matematiky. Z týchto dôvodov, som sa rozhodol implementovať svoju diplomovú prácu práve v tomto jazyku.

## 5.2 Popis implementácie

Implementačná časť mojej práce sa skladá zo štyroch modulov. (*Structures*, *Transformation*, *Main* a *Input*). Každý z týchto modulov je definovaný vo vlastnom súbore. Vďaka skutočnosti, že som ako implementačný jazyk zvolil Haskell, sa jedná o pomerne krátky program, ktorý by bolo omnoho prácnejšie napísať pomocou imperatívnej paradigmy.

- V module *Structures* sú definované použité štruktúry. Najdôležitejšie sú štruktúry definujúce podobu Turingovho stroja (viď výpis 5.2) a gramatiky s rozptýleným kontextom.

[1] z anglického *Purity*
[2] z anglického *Laziness*

- V module s názvom *Transformation* sú definované jednotlivé funkcie využité pri transformácií Turingovho stroja na gramatiku s rozptýleným kontextom. Samotná transformácia prebieha najprv vytvorením množiny neterminálov a terminálov. Následne sa vytvoria množiny reprezentujúce pravidlá, ktoré vznikli na základe jednotlivých bodov algoritmu 1. Tieto množiny sa následne zlúčia (je využitá vlastnosť štruktúry z *Data.Set*, ktorá sa správa ako reálna matematická množina a prípadné rovnaké pravidlá ponechá vo výslednej množine iba raz). Všetky tieto množiny sú uložené do štruktúry, ktorá reprezentuje gramatiku s rozptýleným kontextom a následne prevedené na reťazec, ktorý sa vypíše.

- Modul *Input* slúži ako súbor, v ktorom je možné definovať vlastný Turingov stroj nad ktorým následne výpočet prebieha (pri každej zmene je nutné znova preložiť celý program). Vo výpise kódu 5.1 je vzorová štruktúra tohoto súboru. Súbor je možné jednoducho zmeniť tak aby predstavoval nejaký iný Turingov stroj. Stačí ak do jednotlivých funkcií vložíme nové hodnoty a znova preložíme program. Pri ďalšom behu sa už vezme do úvahy novo definovaný stroj.

- Modul *Main* obsahuje iba hlavnú funkciu, ktorá prepája všetky ostatné moduly a vypisuje výslednú gramatiku do výstupného súboru.

Samotný program pracuje nasledovne. V čase prekladu je preložený vstupný Turingov stroj. Následne sa pri spustení zadá pomocou argumentov na príkazovom riadku mód výpisu a názov súboru, kam sa bude zapisovať. Mód výpisu môže byť buď *normal* alebo *latex*. Prvý vypíše výslednú gramatiku, ktorá vznikla transformáciou Turingovho stroja, ktorý je v súbore *input.hs*, v internej reprezentácií. Pokiaľ je zvolený mód *latex*, tak program transformuje názvy stavov do reprezentácie v jazyku LaTeX.

Program využíva základné knižnice jazyka Haskell na prácu s množinami a zoznamami (*Data.List* a *Data.Set*). Okrem týchto knižníc sú využité už iba základné vstavané funkcie jazyka Haskell.

Výpis kódu 5.1: "Príklad vstupného súboru (jedná sa o Turingov stroj z príkladu 4.2)"

```
module Input (tm) where

import Structures
import qualified Data.Set as Set

tm :: TuringMachine
tm = (TuringMachine (Set.fromList tmStates) (Set.fromList tmAlphabet) (
    Set.fromList tmTapeAlphabet) (Set.fromList tmTrans) Input.
    tmStartState tmRejectState tmAcceptState)

tmTrans :: [Transition]
tmTrans =  [
             (("Q1","0"),("Q2","\\sqcup",R)),
             (("Q1","\\sqcup"),("Q_{rej}","\\sqcup",R)),
             (("Q1","x"),("Q_{rej}","x",R)),
             (("Q2","0"),("Q3","x",R)),
             (("Q2","\\sqcup"),("Q_{acc}","\\sqcup",R)),
             (("Q2","x"),("Q2","x",R)),
             (("Q3","0"),("Q4","0",R)),
             (("Q3","\\sqcup"),("Q5","\\sqcup",L)),
             (("Q3","x"),("Q3","x",R)),
             (("Q4","0"),("Q3","x",R)),
```

```
              (("Q4","\\sqcup"),("Q_{rej}","\\sqcup",R)),
              (("Q4","x"),("Q4","x",R)),
              (("Q5","0"),("Q5","0",L)),
              (("Q5","\\sqcup"),("Q2","\\sqcup",R)),
              (("Q5","x"),("Q5","x",L))
              ]

tmStates :: [State]
tmStates = ["Q1","Q2","Q3","Q4","Q5","Q_{acc}","Q_{rej}"]

tmAlphabet :: [State]
tmAlphabet = ["0"]

tmTapeAlphabet :: [State]
tmTapeAlphabet = ["0","x","\\sqcup"]

tmStartState :: State
tmStartState = "Q1"

tmRejectState :: State
tmRejectState = "Q_{rej}"

tmAcceptState :: State
tmAcceptState = "Q_{acc}"
```

Výpis kódu 5.2: "Štruktúra pre Turingov stroj"

```
{data TuringMachine = TuringMachine {
        states :: Set.Set State,
        input_alphabet :: Set.Set Letter,
        tape_alphabet :: Set.Set Letter,
        transitions :: Set.Set Transition,
        tmStartState :: State,
        accState :: State,
        rejState :: State
    } deriving (Eq,Show)}
```

## 5.3 Práca s programom

V tejto časti práce uvediem vzorové spôsoby použitia programu, ktorý je súčasťou tejto práce. Program bol testovaný a prekladaný pomocou *GHC* (*The Glasgow Haskell Compiler*) vo verzii *7.8.3* na operačnom systéme **Windows 8.1**.

Najprv je potrebné vytvoriť konfiguračný súbor spôsobom aký je uvedený vo výpise 5.1. Dôležité je dodržať meno súboru a názov modulu, v opačnom prípade nepôjde program preložiť. Následne preložíme program buď pomocou priloženého *Makefile* alebo pomocou nasledujúceho príkazu

*ghc -o transform transformation.hs structures.hs input.hs main.hs*

Týmto sa nám vytvorí spustiteľný súbor, ktorý môžeme spustiť z konzoly systému ako

transform [latex | normal] filename.

To dáva na výber máme nasledujúce možnosti spustenia:

- *transform latex output.txt* - v tomto prípade sa do súboru *output.txt* zapíše výsledná gramatika ako zdrojový kód v LaTeX-e
- *transform normal output.txt* - v tomto prípade sa do súboru *output.txt* zapíše výsledná gramatika v internej reprezentácií programu, ktorá je na pohľad čitateľnejšia ako ekvivalentná gramatika v LaTeX-e

Na výsledok sa môžeme pozrieť v súbore *output.txt*, alebo môžeme využiť predpripravenú šablónu v priečinku *LatexTemplate*, ktorý je podadresárom v archíve so zdrojovými kódmi. V tom prípade stačí nahradiť obsah súboru *output.txt* ktorý sa tam nachádza, výstupom ktorý vznikol ako výsledok behu programu v móde latex.

# Kapitola 6

# Záver

V tejto kapitole sú stručne zhrnuté dosiahnuté výsledky z hľadiska tvorby algoritmu a jeho implementácie. Ďalej sa v nej pojednáva o možnostiach využitia práce a možných rozšíreniach.

## 6.1 Záverečné zhrnutie

### Dosiahnuté výsledky

V rámci diplomovej práce boli zhrnuté poznatky, ktoré boli známe o propagujúcich gramatikách s rozptýleným kontextom a ich vzťahu k ostatným jazykom. Následne bol predstavený algoritmus, ktorý ukazuje, že vyjadrovacia sila nielen týchto gramatík, môže byť niekde inde ako sme doteraz predpokladali. Skutočnosť, že pomocou týchto gramatík sme schopní simulovať činnosť *univerzálneho Turingovho stroja* ukazuje, že by sme na základe tomto základe mohli postaviť riešenie niektorých otvorených problémov teoretickej informatiky (napríklad otvorený problém vzťahu rodiny jazykov generovaných propagujúcimi gramatikami s rozptýleným kontextom a rodiny jazykov generovaných kontextovými gramatikami). Existencia tohoto algoritmu, ale taktiež priniesla viaceré otázky, ktoré som formuloval v časti 3.2.

Ďalším prínosom tejto práce je program, ktorý implementuje daný algoritmus. Umožňuje jednoducho zapísať Turingov stroj do súboru a následne po preklade a spustení je jeho výsledkom gramatika v čitateľnej internej reprezentácií, alebo zdrojový kód jazyku LaTeX, ktorý je možné preložiť pomocou priloženej šablóny, a získať tak okamžite výslednú gramatiku vo formáte PDF.

V rámci tejto práce sa takisto nachádzajú dva príklady na použitie predstaveného algoritmu, u príkladu 4.2 včetne následnej práce s výslednou gramatikou. Tieto príklady spolu s neformálnym vysvetlením algoritmu, by mali poslúžiť na zvýšenie zrozumiteľnosti, ktorá môže byť iba z formálneho zápisu nedostačujúca.

### Bibliografické poznámky

V práci som využíval cudzie zdroje hlavne v kapitole 2. V tejto kapitole som vychádzal z prác a kníh pána profesora Meduny [5] a [7] v oblasti základných definícii a popisu gramatík a z [9] pri popise Turingových strojov. Informácie o vlastnostiach rodiny jazykov definovaných gramatikami s rozptýleným kontextom a ich vzťahy k ostatným jazykovým rodinám som čerpal z [6].

V kapitole venujúcej sa implementácií som vychádzal z voľného prekladu na stránkach venujúcich sa jazyku Haskell [10] a [4].

## Aplikačné poznámky

*Lingvistika*: Ako bolo ukázané v [2] a [6] gramatiky s rozptýleným kontextom, sú jedným z formálnych modelov použiteľných pre spracovanie a analýzu prirodzeného jazyka, hlavne z dôvodu ich schopnosti postihnúť vzťahy, ktoré sa vo veľkom množstve v prirodzenom jazyku vyskytujú medzi jednotlivými syntaktickými elementmi. Algoritmus predstavený v tejto knihe, by mohol umožniť prevody z iných formálnych modelov na gramatiky s rozptýleným kontextom a tak rozšíriť možnosti mechanizmov, ktoré boli uvedené v zmienených prácach.

*Teoretická informatika*: Výpočetná sila jednotlivých formálnych modelov je významnou časťou teoretickej informatiky. Existencia algoritmu ktorý ukazuje, že sila propagujúcich gramatík s rozptýleným kontextom je podobná sile samotných Turingových strojov, by mohla vniesť a vnáša do tejto oblasti nové otázky, z ktorých niektoré nadniesla už aj táto práca. Tieto otázky ostávajú otvorené, ale ich zopakovanie by mohlo posunúť túto disciplínu zasa o kúsok ďalej.

*Genetika*: Vzhľadom k tomu, že formálna teória jazykov hrá v súčasnosti dôležitú úlohu v modernej genetike, schopnosť prevádzať medzi jednotlivými modelmi by sa mohla ukázať ako veľmi užitočná.

## Možnosti ďalšieho pokračovania práce

V kapitole 3 sme poukázali na niektoré otvorené problémy, ktoré sa objavili na základe záverou tejto práce a zároveň tu nie sú zodpovedané. Predovšetkým možnosť ďalšieho obmedzovania výpočetnej sily, pri podmienke zachovania schopnosti simulovať správanie sa univerzálneho Turingovho stroja, sa ukazuje ako zaujímavá oblasť, ktorú by bolo možné preskúmať. Napríklad pomocou propagujúcich gramatík s rozptýleným kontextom, ktoré majú nejaké obmedzenia nato akým spôsobom môžu prepisovať neterminály.

Ďalšou možnosťou by bolo pokúsiť sa nájsť algoritmus výberu pravidiel propagujúcej gramatiky s rozptýleným kontextom, ktorý by celý proces generovania výpočetnej história Turingovho stroja pomocou tejto gramatiky zdeterminoval. Ako už bolo spomenuté toto by mohlo mať významné aplikácie v oblasti spracovania prirodzeného jazyka pomocou formálnych modelov.

# Literatura


[1] Greibach, S. A.; Hopcroft, J.: Scattered Context Grammars. *Journal of Computer and System Sciences*, ročník 3, 1969: s. 233–247, ISSN 0022-0000.

[2] Kajan, D.: *Gramatiky s rozptýleným kontextem a jejich aplikace v analýze přirozených jazyků*. Bakalárska práce, Vysoké učení technické v Brně - FIT, Brno, 2013.

[3] Kovár, M.: Diskrétní matematika. [online], 2002-2003. Dostupné z World Wide Web:<http://www.umat.feec.vutbr.cz/~kovar/webs/personal/IDA.pdf>

[4] Lipovača, M.: Learn You a Haskell for Great Good! 2011, [online]. Dostupné z World Wide Web:<http://learnyouahaskell.com/>

[5] Meduna, A.: *Automata and Languages - Theory and Applications*. London: Springer London, 2000, ISBN 81-8128-333-3.

[6] Meduna, A.; Techet, J.: *Scattered Context Grammars and their Applications*. Boston: WIT Press, 2010, ISBN 978-1-84564-426-0.

[7] Meduna, A.; Zemek, P.: *Regulated Grammars and Their Transformations*. Brno: Faculty of Information Technology, Brno University of Technology, 2010, ISBN 978-80-214-4203-0.

[8] Sekanina, L.: Biologií inspirované počítače Přednáška 2 - Limity abstraktního a fyzického počítání. [online], 2015. Dostupné z World Wide Web:<https://www.fit.vutbr.cz/study/courses/BIN/private/prednasky/bin2015_p02.pdf>

[9] Sipser, M.: *Introduction to the Theory of Computation*. Boston, Massachusetts: Thomson Course Technology, 2006, ISBN 978-0-534-95097-2.

[10] Yorgey, B.: wiki.haskell.org. 2013, [online]. Dostupné z World Wide Web:<https://wiki.haskell.org/Haskell>

# Príloha A

# Pravidlá ukážkovej gramatiky z príkladu v kapitole 4.2

$P = \{$

Na základe pravidla čislo 4

1. $(\$, \overline{Q1}, \overline{0}, \overline{\#}, S) \rightarrow (\$, \overline{Q1_{LLM}}, \overline{0_{RM}}, \overline{\#}, \overline{\sqcup_{RLM}}\overline{Q2}R)$
2. $(\$, \overline{Q1}, \overline{\sqcup}, \overline{\#}, S) \rightarrow (\$, \overline{Q1_{LLM}}, \overline{\sqcup_{RM}}, \overline{\#}, \overline{\sqcup_{RLM}}\overline{Q_{rej}}R)$
3. $(\$, \overline{Q1}, \overline{x}, \overline{\#}, S) \rightarrow (\$, \overline{Q1_{LLM}}, \overline{x_{RM}}, \overline{\#}, \overline{x_{RLM}}\overline{Q_{rej}}R)$
4. $(\$, \overline{Q2}, \overline{0}, \overline{\#}, S) \rightarrow (\$, \overline{Q2_{LLM}}, \overline{0_{RM}}, \overline{\#}, \overline{x_{RLM}}\overline{Q3}R)$
5. $(\$, \overline{Q2}, \overline{\sqcup}, \overline{\#}, S) \rightarrow (\$, \overline{Q2_{LLM}}, \overline{\sqcup_{RM}}, \overline{\#}, \overline{\sqcup_{RLM}}\overline{Q_{acc}}R)$
6. $(\$, \overline{Q2}, \overline{x}, \overline{\#}, S) \rightarrow (\$, \overline{Q2_{LLM}}, \overline{x_{RM}}, \overline{\#}, \overline{x_{RLM}}\overline{Q2}R)$
7. $(\$, \overline{Q3}, \overline{0}, \overline{\#}, S) \rightarrow (\$, \overline{Q3_{LLM}}, \overline{0_{RM}}, \overline{\#}, \overline{0_{RLM}}\overline{Q4}R)$
8. $(\$, \overline{Q3}, \overline{x}, \overline{\#}, S) \rightarrow (\$, \overline{Q3_{LLM}}, \overline{x_{RM}}, \overline{\#}, \overline{x_{RLM}}\overline{Q3}R)$
9. $(\$, \overline{Q4}, \overline{0}, \overline{\#}, S) \rightarrow (\$, \overline{Q4_{LLM}}, \overline{0_{RM}}, \overline{\#}, \overline{x_{RLM}}\overline{Q3}R)$
10. $(\$, \overline{Q4}, \overline{\sqcup}, \overline{\#}, S) \rightarrow (\$, \overline{Q4_{LLM}}, \overline{\sqcup_{RM}}, \overline{\#}, \overline{\sqcup_{RLM}}\overline{Q_{rej}}R)$
11. $(\$, \overline{Q4}, \overline{x}, \overline{\#}, S) \rightarrow (\$, \overline{Q4_{LLM}}, \overline{x_{RM}}, \overline{\#}, \overline{x_{RLM}}\overline{Q4}R)$
12. $(\$, \overline{Q5}, \overline{\sqcup}, \overline{\#}, S) \rightarrow (\$, \overline{Q5_{LLM}}, \overline{\sqcup_{RM}}, \overline{\#}, \overline{\sqcup_{RLM}}\overline{Q2}R)$

Na základe pravidla čislo 5

13. $(\overline{Q1^1}, \overline{0^1}, \overline{\#^1}, S) \rightarrow (Q1, \overline{0^1_{RM}}, \overline{\#^1}, \overline{\sqcup}\overline{Q2}R)$
14. $(\overline{Q1^1}, \overline{\sqcup^1}, \overline{\#^1}, S) \rightarrow (Q1, \overline{\sqcup^1_{RM}}, \overline{\#^1}, \overline{\sqcup}\overline{Q_{rej}}R)$
15. $(\overline{Q1^1}, \overline{x^1}, \overline{\#^1}, S) \rightarrow (Q1, \overline{x^1_{RM}}, \overline{\#^1}, \overline{x}\overline{Q_{rej}}R)$

Na základe pravidla čislo 6

16. $(\$, \overline{0_{RM}}, \overline{0}, \overline{\#}, R) \rightarrow (\$, 0, \overline{0_{RM}}, \overline{\#}, \overline{0}R)$

17. $(\$, \overline{0_{RM}}, \overline{\sqcup}, \overline{\#}, R) \rightarrow (\$, 0, \overline{\sqcup_{RM}}, \overline{\#}, \overline{\sqcup}R)$

18. $(\$, \overline{0_{RM}}, \overline{x}, \overline{\#}, R) \rightarrow (\$, 0, \overline{x_{RM}}, \overline{\#}, \overline{x}R)$

19. $(\$, \overline{\sqcup_{RM}}, \overline{0}, \overline{\#}, R) \rightarrow (\$, \sqcup, \overline{0_{RM}}, \overline{\#}, \overline{0}R)$

20. $(\$, \overline{\sqcup_{RM}}, \overline{\sqcup}, \overline{\#}, R) \rightarrow (\$, \sqcup, \overline{\sqcup_{RM}}, \overline{\#}, \overline{\sqcup}R)$

21. $(\$, \overline{\sqcup_{RM}}, \overline{x}, \overline{\#}, R) \rightarrow (\$, \sqcup, \overline{x_{RM}}, \overline{\#}, \overline{x}R)$

22. $(\$, \overline{x_{RM}}, \overline{0}, \overline{\#}, R) \rightarrow (\$, x, \overline{0_{RM}}, \overline{\#}, \overline{0}R)$

23. $(\$, \overline{x_{RM}}, \overline{\sqcup}, \overline{\#}, R) \rightarrow (\$, x, \overline{\sqcup_{RM}}, \overline{\#}, \overline{\sqcup}R)$

24. $(\$, \overline{x_{RM}}, \overline{x}, \overline{\#}, R) \rightarrow (\$, x, \overline{x_{RM}}, \overline{\#}, \overline{x}R)$

Na základe pravidla čislo 7

25. $(\overline{0^1_{RM}}, \overline{0^1}, \overline{\#^1}, R) \rightarrow (0, \overline{0^1_{RM}}, \overline{\#^1}, \overline{0}R)$

26. $(\overline{0^1_{RM}}, \overline{\sqcup^1}, \overline{\#^1}, R) \rightarrow (0, \overline{\sqcup^1_{RM}}, \overline{\#^1}, \overline{\sqcup}R)$

27. $(\overline{0^1_{RM}}, \overline{x^1}, \overline{\#^1}, R) \rightarrow (0, \overline{x^1_{RM}}, \overline{\#^1}, \overline{x}R)$

28. $(\overline{\sqcup^1_{RM}}, \overline{0^1}, \overline{\#^1}, R) \rightarrow (\sqcup, \overline{0^1_{RM}}, \overline{\#^1}, \overline{0}R)$

29. $(\overline{\sqcup^1_{RM}}, \overline{\sqcup^1}, \overline{\#^1}, R) \rightarrow (\sqcup, \overline{\sqcup^1_{RM}}, \overline{\#^1}, \overline{\sqcup}R)$

30. $(\overline{\sqcup^1_{RM}}, \overline{x^1}, \overline{\#^1}, R) \rightarrow (\sqcup, \overline{x^1_{RM}}, \overline{\#^1}, \overline{x}R)$

31. $(\overline{x^1_{RM}}, \overline{0^1}, \overline{\#^1}, R) \rightarrow (x, \overline{0^1_{RM}}, \overline{\#^1}, \overline{0}R)$

32. $(\overline{x^1_{RM}}, \overline{\sqcup^1}, \overline{\#^1}, R) \rightarrow (x, \overline{\sqcup^1_{RM}}, \overline{\#^1}, \overline{\sqcup}R)$

33. $(\overline{x^1_{RM}}, \overline{x^1}, \overline{\#^1}, R) \rightarrow (x, \overline{x^1_{RM}}, \overline{\#^1}, \overline{x}R)$

Na základe pravidla čislo 8

34. $(\$, \overline{0}, \overline{Q1_{LLM}}, \overline{\#}, \overline{0_{RLM}}) \rightarrow (\$, \overline{0_{LLM}}, Q1, \overline{\#}, \overline{0_{RLM}}\overline{0})$

35. $(\$, \overline{0}, \overline{Q1_{LLM}}, \overline{\#}, \overline{\sqcup_{RLM}}) \rightarrow (\$, \overline{0_{LLM}}, Q1, \overline{\#}, \overline{0_{RLM}}\overline{\sqcup})$

36. $(\$, \overline{0}, \overline{Q1_{LLM}}, \overline{\#}, \overline{x_{RLM}}) \rightarrow (\$, \overline{0_{LLM}}, Q1, \overline{\#}, \overline{0_{RLM}}\overline{x})$

37. $(\$, \overline{0}, \overline{Q2_{LLM}}, \overline{\#}, \overline{0_{RLM}}) \rightarrow (\$, \overline{0_{LLM}}, Q2, \overline{\#}, \overline{0_{RLM}}\overline{0})$

38. $(\$, \overline{0}, \overline{Q2_{LLM}}, \overline{\#}, \overline{\sqcup_{RLM}}) \rightarrow (\$, \overline{0_{LLM}}, Q2, \overline{\#}, \overline{0_{RLM}}\overline{\sqcup})$

39. $(\$, \overline{0}, \overline{Q2_{LLM}}, \overline{\#}, \overline{x_{RLM}}) \rightarrow (\$, \overline{0_{LLM}}, Q2, \overline{\#}, \overline{0_{RLM}}\overline{x})$

40. $(\$, \overline{0}, \overline{Q3_{LLM}}, \overline{\#}, \overline{0_{RLM}}) \rightarrow (\$, \overline{0_{LLM}}, Q3, \overline{\#}, \overline{0_{RLM}}\overline{0})$

41. $(\$, \overline{0}, \overline{Q3_{LLM}}, \overline{\#}, \overline{\sqcup_{RLM}}) \rightarrow (\$, \overline{0_{LLM}}, Q3, \overline{\#}, \overline{0_{RLM}}\overline{\sqcup})$

42. $(\$, \overline{0}, \overline{Q3_{LLM}}, \overline{\#}, \overline{x_{RLM}}) \rightarrow (\$, \overline{0_{LLM}}, Q3, \overline{\#}, \overline{0_{RLM}}\overline{x})$

43. $(\$, \overline{0}, \overline{Q4_{LLM}}, \overline{\#}, \overline{0_{RLM}}) \rightarrow (\$, \overline{0_{LLM}}, Q4, \overline{\#}, \overline{0_{RLM}}\overline{0})$

44. $(\$, \overline{0}, \overline{Q4_{LLM}}, \overline{\#}, \overline{\sqcup_{RLM}}) \to (\$, \overline{0_{LLM}}, Q4, \overline{\#}, \overline{0_{RLM}}\overline{\sqcup})$
45. $(\$, \overline{0}, \overline{Q4_{LLM}}, \overline{\#}, \overline{x_{RLM}}) \to (\$, \overline{0_{LLM}}, Q4, \overline{\#}, \overline{0_{RLM}}\overline{x})$
46. $(\$, \overline{0}, \overline{Q5_{LLM}}, \overline{\#}, \overline{0_{RLM}}) \to (\$, \overline{0_{LLM}}, Q5, \overline{\#}, \overline{0_{RLM}}\overline{0})$
47. $(\$, \overline{0}, \overline{Q5_{LLM}}, \overline{\#}, \overline{\sqcup_{RLM}}) \to (\$, \overline{0_{LLM}}, Q5, \overline{\#}, \overline{0_{RLM}}\overline{\sqcup})$
48. $(\$, \overline{0}, \overline{Q5_{LLM}}, \overline{\#}, \overline{x_{RLM}}) \to (\$, \overline{0_{LLM}}, Q5, \overline{\#}, \overline{0_{RLM}}\overline{x})$
49. $(\$, \overline{\sqcup}, \overline{Q1_{LLM}}, \overline{\#}, \overline{0_{RLM}}) \to (\$, \overline{\sqcup_{LLM}}, Q1, \overline{\#}, \overline{\sqcup_{RLM}}\overline{0})$
50. $(\$, \overline{\sqcup}, \overline{Q1_{LLM}}, \overline{\#}, \overline{\sqcup_{RLM}}) \to (\$, \overline{\sqcup_{LLM}}, Q1, \overline{\#}, \overline{\sqcup_{RLM}}\overline{\sqcup})$
51. $(\$, \overline{\sqcup}, \overline{Q1_{LLM}}, \overline{\#}, \overline{x_{RLM}}) \to (\$, \overline{\sqcup_{LLM}}, Q1, \overline{\#}, \overline{\sqcup_{RLM}}\overline{x})$
52. $(\$, \overline{\sqcup}, \overline{Q2_{LLM}}, \overline{\#}, \overline{0_{RLM}}) \to (\$, \overline{\sqcup_{LLM}}, Q2, \overline{\#}, \overline{\sqcup_{RLM}}\overline{0})$
53. $(\$, \overline{\sqcup}, \overline{Q2_{LLM}}, \overline{\#}, \overline{\sqcup_{RLM}}) \to (\$, \overline{\sqcup_{LLM}}, Q2, \overline{\#}, \overline{\sqcup_{RLM}}\overline{\sqcup})$
54. $(\$, \overline{\sqcup}, \overline{Q2_{LLM}}, \overline{\#}, \overline{x_{RLM}}) \to (\$, \overline{\sqcup_{LLM}}, Q2, \overline{\#}, \overline{\sqcup_{RLM}}\overline{x})$
55. $(\$, \overline{\sqcup}, \overline{Q3_{LLM}}, \overline{\#}, \overline{0_{RLM}}) \to (\$, \overline{\sqcup_{LLM}}, Q3, \overline{\#}, \overline{\sqcup_{RLM}}\overline{0})$
56. $(\$, \overline{\sqcup}, \overline{Q3_{LLM}}, \overline{\#}, \overline{\sqcup_{RLM}}) \to (\$, \overline{\sqcup_{LLM}}, Q3, \overline{\#}, \overline{\sqcup_{RLM}}\overline{\sqcup})$
57. $(\$, \overline{\sqcup}, \overline{Q3_{LLM}}, \overline{\#}, \overline{x_{RLM}}) \to (\$, \overline{\sqcup_{LLM}}, Q3, \overline{\#}, \overline{\sqcup_{RLM}}\overline{x})$
58. $(\$, \overline{\sqcup}, \overline{Q4_{LLM}}, \overline{\#}, \overline{0_{RLM}}) \to (\$, \overline{\sqcup_{LLM}}, Q4, \overline{\#}, \overline{\sqcup_{RLM}}\overline{0})$
59. $(\$, \overline{\sqcup}, \overline{Q4_{LLM}}, \overline{\#}, \overline{\sqcup_{RLM}}) \to (\$, \overline{\sqcup_{LLM}}, Q4, \overline{\#}, \overline{\sqcup_{RLM}}\overline{\sqcup})$
60. $(\$, \overline{\sqcup}, \overline{Q4_{LLM}}, \overline{\#}, \overline{x_{RLM}}) \to (\$, \overline{\sqcup_{LLM}}, Q4, \overline{\#}, \overline{\sqcup_{RLM}}\overline{x})$
61. $(\$, \overline{\sqcup}, \overline{Q5_{LLM}}, \overline{\#}, \overline{0_{RLM}}) \to (\$, \overline{\sqcup_{LLM}}, Q5, \overline{\#}, \overline{\sqcup_{RLM}}\overline{0})$
62. $(\$, \overline{\sqcup}, \overline{Q5_{LLM}}, \overline{\#}, \overline{\sqcup_{RLM}}) \to (\$, \overline{\sqcup_{LLM}}, Q5, \overline{\#}, \overline{\sqcup_{RLM}}\overline{\sqcup})$
63. $(\$, \overline{\sqcup}, \overline{Q5_{LLM}}, \overline{\#}, \overline{x_{RLM}}) \to (\$, \overline{\sqcup_{LLM}}, Q5, \overline{\#}, \overline{\sqcup_{RLM}}\overline{x})$
64. $(\$, \overline{x}, \overline{Q1_{LLM}}, \overline{\#}, \overline{0_{RLM}}) \to (\$, \overline{x_{LLM}}, Q1, \overline{\#}, \overline{x_{RLM}}\overline{0})$
65. $(\$, \overline{x}, \overline{Q1_{LLM}}, \overline{\#}, \overline{\sqcup_{RLM}}) \to (\$, \overline{x_{LLM}}, Q1, \overline{\#}, \overline{x_{RLM}}\overline{\sqcup})$
66. $(\$, \overline{x}, \overline{Q1_{LLM}}, \overline{\#}, \overline{x_{RLM}}) \to (\$, \overline{x_{LLM}}, Q1, \overline{\#}, \overline{x_{RLM}}\overline{x})$
67. $(\$, \overline{x}, \overline{Q2_{LLM}}, \overline{\#}, \overline{0_{RLM}}) \to (\$, \overline{x_{LLM}}, Q2, \overline{\#}, \overline{x_{RLM}}\overline{0})$
68. $(\$, \overline{x}, \overline{Q2_{LLM}}, \overline{\#}, \overline{\sqcup_{RLM}}) \to (\$, \overline{x_{LLM}}, Q2, \overline{\#}, \overline{x_{RLM}}\overline{\sqcup})$
69. $(\$, \overline{x}, \overline{Q2_{LLM}}, \overline{\#}, \overline{x_{RLM}}) \to (\$, \overline{x_{LLM}}, Q2, \overline{\#}, \overline{x_{RLM}}\overline{x})$
70. $(\$, \overline{x}, \overline{Q3_{LLM}}, \overline{\#}, \overline{0_{RLM}}) \to (\$, \overline{x_{LLM}}, Q3, \overline{\#}, \overline{x_{RLM}}\overline{0})$
71. $(\$, \overline{x}, \overline{Q3_{LLM}}, \overline{\#}, \overline{\sqcup_{RLM}}) \to (\$, \overline{x_{LLM}}, Q3, \overline{\#}, \overline{x_{RLM}}\overline{\sqcup})$
72. $(\$, \overline{x}, \overline{Q3_{LLM}}, \overline{\#}, \overline{x_{RLM}}) \to (\$, \overline{x_{LLM}}, Q3, \overline{\#}, \overline{x_{RLM}}\overline{x})$

73. $(\$, \overline{x}, \overline{Q4_{LLM}}, \overline{\#}, \overline{0_{RLM}}) \to (\$, \overline{x_{LLM}}, Q4, \overline{\#}, \overline{x_{RLM}}\overline{0})$
74. $(\$, \overline{x}, \overline{Q4_{LLM}}, \overline{\#}, \overline{\sqcup_{RLM}}) \to (\$, \overline{x_{LLM}}, Q4, \overline{\#}, \overline{x_{RLM}}\overline{\sqcup})$
75. $(\$, \overline{x}, \overline{Q4_{LLM}}, \overline{\#}, \overline{x_{RLM}}) \to (\$, \overline{x_{LLM}}, Q4, \overline{\#}, \overline{x_{RLM}}\overline{x})$
76. $(\$, \overline{x}, \overline{Q5_{LLM}}, \overline{\#}, \overline{0_{RLM}}) \to (\$, \overline{x_{LLM}}, Q5, \overline{\#}, \overline{x_{RLM}}\overline{0})$
77. $(\$, \overline{x}, \overline{Q5_{LLM}}, \overline{\#}, \overline{\sqcup_{RLM}}) \to (\$, \overline{x_{LLM}}, Q5, \overline{\#}, \overline{x_{RLM}}\overline{\sqcup})$
78. $(\$, \overline{x}, \overline{Q5_{LLM}}, \overline{\#}, \overline{x_{RLM}}) \to (\$, \overline{x_{LLM}}, Q5, \overline{\#}, \overline{x_{RLM}}\overline{x})$

Na základe pravidla čislo 9

79. $(\$, \overline{Q1_{LLM}}, \overline{\#}) \to (\$, Q1, \overline{\#})$
80. $(\$, \overline{Q2_{LLM}}, \overline{\#}) \to (\$, Q2, \overline{\#})$
81. $(\$, \overline{Q3_{LLM}}, \overline{\#}) \to (\$, Q3, \overline{\#})$
82. $(\$, \overline{Q4_{LLM}}, \overline{\#}) \to (\$, Q4, \overline{\#})$
83. $(\$, \overline{Q5_{LLM}}, \overline{\#}) \to (\$, Q5, \overline{\#})$

Na základe pravidla čislo 10

84. $(\$, \overline{0_{LLM}}, \overline{\#}) \to (\$, 0, \overline{\#})$
85. $(\$, \overline{\sqcup_{LLM}}, \overline{\#}) \to (\$, \sqcup, \overline{\#})$
86. $(\$, \overline{x_{LLM}}, \overline{\#}) \to (\$, x, \overline{\#})$

Na základe pravidla čislo 11

87. $(\$, \overline{0}, \overline{0_{LLM}}, \overline{\#}, \overline{0_{RLM}}) \to (\$, \overline{0_{LLM}}, 0, \overline{\#}, \overline{0_{RLM}0})$
88. $(\$, \overline{0}, \overline{\sqcup_{LLM}}, \overline{\#}, \overline{\sqcup_{RLM}}) \to (\$, \overline{0_{LLM}}, \sqcup, \overline{\#}, \overline{0_{RLM}}\overline{\sqcup})$
89. $(\$, \overline{0}, \overline{x_{LLM}}, \overline{\#}, \overline{x_{RLM}}) \to (\$, \overline{0_{LLM}}, x, \overline{\#}, \overline{0_{RLM}}\overline{x})$
90. $(\$, \overline{\sqcup}, \overline{0_{LLM}}, \overline{\#}, \overline{0_{RLM}}) \to (\$, \overline{\sqcup_{LLM}}, 0, \overline{\#}, \overline{\sqcup_{RLM}}\overline{0})$
91. $(\$, \overline{\sqcup}, \overline{\sqcup_{LLM}}, \overline{\#}, \overline{\sqcup_{RLM}}) \to (\$, \overline{\sqcup_{LLM}}, \sqcup, \overline{\#}, \overline{\sqcup_{RLM}}\overline{\sqcup})$
92. $(\$, \overline{\sqcup}, \overline{x_{LLM}}, \overline{\#}, \overline{x_{RLM}}) \to (\$, \overline{\sqcup_{LLM}}, x, \overline{\#}, \overline{\sqcup_{RLM}}\overline{x})$
93. $(\$, \overline{x}, \overline{0_{LLM}}, \overline{\#}, \overline{0_{RLM}}) \to (\$, \overline{x_{LLM}}, 0, \overline{\#}, \overline{x_{RLM}}\overline{0})$
94. $(\$, \overline{x}, \overline{\sqcup_{LLM}}, \overline{\#}, \overline{\sqcup_{RLM}}) \to (\$, \overline{x_{LLM}}, \sqcup, \overline{\#}, \overline{x_{RLM}}\overline{\sqcup})$
95. $(\$, \overline{x}, \overline{x_{LLM}}, \overline{\#}, \overline{x_{RLM}}) \to (\$, \overline{x_{LLM}}, x, \overline{\#}, \overline{x_{RLM}}\overline{x})$

Na základe pravidla čislo 12

96. $(\overline{0^1}, \overline{0^1_{LLM}}, \overline{\#^1}, \overline{0_{RLM}}) \to (\overline{0^1_{LLM}}, 0, \overline{\#^1}, \overline{0_{RLM}0})$
97. $(\overline{0^1}, \overline{\sqcup^1_{LLM}}, \overline{\#^1}, \overline{\sqcup_{RLM}}) \to (\overline{0^1_{LLM}}, \sqcup, \overline{\#^1}, \overline{0_{RLM}}\overline{\sqcup})$

98. $(\overline{0^1}, \overline{x^1_{LLM}}, \overline{\#^1}, \overline{x_{RLM}}) \to (\overline{0^1_{LLM}}, x, \overline{\#^1}, \overline{0_{RLM}}\overline{x})$

99. $(\overline{\sqcup^1}, \overline{0^1_{LLM}}, \overline{\#^1}, \overline{0_{RLM}}) \to (\overline{\sqcup^1_{LLM}}, 0, \overline{\#^1}, \overline{\sqcup_{RLM}}\overline{0})$

100. $(\overline{\sqcup^1}, \overline{\sqcup^1_{LLM}}, \overline{\#^1}, \overline{\sqcup_{RLM}}) \to (\overline{\sqcup^1_{LLM}}, \sqcup, \overline{\#^1}, \overline{\sqcup_{RLM}}\overline{\sqcup})$

101. $(\overline{\sqcup^1}, \overline{x^1_{LLM}}, \overline{\#^1}, \overline{x_{RLM}}) \to (\overline{\sqcup^1_{LLM}}, x, \overline{\#^1}, \overline{\sqcup_{RLM}}\overline{x})$

102. $(\overline{x^1}, \overline{0^1_{LLM}}, \overline{\#^1}, \overline{0_{RLM}}) \to (\overline{x^1_{LLM}}, 0, \overline{\#^1}, \overline{x_{RLM}}\overline{0})$

103. $(\overline{x^1}, \overline{\sqcup^1_{LLM}}, \overline{\#^1}, \overline{\sqcup_{RLM}}) \to (\overline{x^1_{LLM}}, \sqcup, \overline{\#^1}, \overline{x_{RLM}}\overline{\sqcup})$

104. $(\overline{x^1}, \overline{x^1_{LLM}}, \overline{\#^1}, \overline{x_{RLM}}) \to (\overline{x^1_{LLM}}, x, \overline{\#^1}, \overline{x_{RLM}}\overline{x})$

Na základe pravidla čislo 13

105. $(\$, \overline{0_{RM}}, \overline{\#}, R) \to (\$, 0, \overline{\#}, R)$

106. $(\$, \overline{\sqcup_{RM}}, \overline{\#}, R) \to (\$, \sqcup, \overline{\#}, R)$

107. $(\$, \overline{x_{RM}}, \overline{\#}, R) \to (\$, x, \overline{\#}, R)$

Na základe pravidla čislo 14

108. $(\overline{0^1_{RM}}, \overline{\#^1}, R) \to (0, \overline{\#^1}, R)$

109. $(\overline{\sqcup^1_{RM}}, \overline{\#^1}, R) \to (\sqcup, \overline{\#^1}, R)$

110. $(\overline{x^1_{RM}}, \overline{\#^1}, R) \to (x, \overline{\#^1}, R)$

Na základe pravidla čislo 15

111. $(\$, \overline{\#}, \overline{0_{RLM}}) \to (\$, \overline{\#}, \overline{0})$

112. $(\$, \overline{\#}, \overline{\sqcup_{RLM}}) \to (\$, \overline{\#}, \overline{\sqcup})$

113. $(\$, \overline{\#}, \overline{x_{RLM}}) \to (\$, \overline{\#}, \overline{x})$

Na základe pravidla čislo 16

114. $(\$, \overline{0}, \overline{Q3}, \overline{\sqcup}, \overline{\#}, S) \to (\$, \overline{0_{LLM}}, Q3, \overline{\sqcup_{RM}}, \overline{\#}, \overline{Q5_{RLM}}\overline{0}\overline{\sqcup}R)$

115. $(\$, \overline{0}, \overline{Q5}, \overline{0}, \overline{\#}, S) \to (\$, \overline{0_{LLM}}, Q5, \overline{0_{RM}}, \overline{\#}, \overline{Q5_{RLM}}\overline{0}\overline{0}R)$

116. $(\$, \overline{0}, \overline{Q5}, \overline{x}, \overline{\#}, S) \to (\$, \overline{0_{LLM}}, Q5, \overline{x_{RM}}, \overline{\#}, \overline{Q5_{RLM}}\overline{0}\overline{x}R)$

117. $(\$, \overline{\sqcup}, \overline{Q3}, \overline{\sqcup}, \overline{\#}, S) \to (\$, \overline{\sqcup_{LLM}}, Q3, \overline{\sqcup_{RM}}, \overline{\#}, \overline{Q5_{RLM}}\overline{\sqcup}\overline{\sqcup}R)$

118. $(\$, \overline{\sqcup}, \overline{Q5}, \overline{0}, \overline{\#}, S) \to (\$, \overline{\sqcup_{LLM}}, Q5, \overline{0_{RM}}, \overline{\#}, \overline{Q5_{RLM}}\overline{\sqcup}\overline{0}R)$

119. $(\$, \overline{\sqcup}, \overline{Q5}, \overline{x}, \overline{\#}, S) \to (\$, \overline{\sqcup_{LLM}}, Q5, \overline{x_{RM}}, \overline{\#}, \overline{Q5_{RLM}}\overline{\sqcup}\overline{x}R)$

120. $(\$, \overline{x}, \overline{Q3}, \overline{\sqcup}, \overline{\#}, S) \to (\$, \overline{x_{LLM}}, Q3, \overline{\sqcup_{RM}}, \overline{\#}, \overline{Q5_{RLM}}\overline{x}\overline{\sqcup}R)$

121. $(\$, \overline{x}, \overline{Q5}, \overline{0}, \overline{\#}, S) \to (\$, \overline{x_{LLM}}, Q5, \overline{0_{RM}}, \overline{\#}, \overline{Q5_{RLM}}\overline{x}\overline{0}R)$

122. $(\$, \overline{x}, \overline{Q5}, \overline{x}, \overline{\#}, S) \to (\$, \overline{x_{LLM}}, Q5, \overline{x_{RM}}, \overline{\#}, \overline{Q5_{RLM}}\overline{x}\overline{x}R)$

Na základe pravidla čislo 17

123. $(\$, \overline{0}, \overline{0_{LLM}}, \overline{\#}, \overline{Q1_{RLM}}) \rightarrow (\$, \overline{0_{LLM}}, 0, \overline{\#}, \overline{0_{RLM}}\overline{0}\overline{Q1})$

124. $(\$, \overline{0}, \overline{0_{LLM}}, \overline{\#}, \overline{Q2_{RLM}}) \rightarrow (\$, \overline{0_{LLM}}, 0, \overline{\#}, \overline{0_{RLM}}\overline{0}\overline{Q2})$

125. $(\$, \overline{0}, \overline{0_{LLM}}, \overline{\#}, \overline{Q3_{RLM}}) \rightarrow (\$, \overline{0_{LLM}}, 0, \overline{\#}, \overline{0_{RLM}}\overline{0}\overline{Q3})$

126. $(\$, \overline{0}, \overline{0_{LLM}}, \overline{\#}, \overline{Q4_{RLM}}) \rightarrow (\$, \overline{0_{LLM}}, 0, \overline{\#}, \overline{0_{RLM}}\overline{0}\overline{Q4})$

127. $(\$, \overline{0}, \overline{0_{LLM}}, \overline{\#}, \overline{Q5_{RLM}}) \rightarrow (\$, \overline{0_{LLM}}, 0, \overline{\#}, \overline{0_{RLM}}\overline{0}\overline{Q5})$

128. $(\$, \overline{0}, \overline{\sqcup_{LLM}}, \overline{\#}, \overline{Q1_{RLM}}) \rightarrow (\$, \overline{0_{LLM}}, \sqcup, \overline{\#}, \overline{0_{RLM}}\overline{\sqcup}\overline{Q1})$

129. $(\$, \overline{0}, \overline{\sqcup_{LLM}}, \overline{\#}, \overline{Q2_{RLM}}) \rightarrow (\$, \overline{0_{LLM}}, \sqcup, \overline{\#}, \overline{0_{RLM}}\overline{\sqcup}\overline{Q2})$

130. $(\$, \overline{0}, \overline{\sqcup_{LLM}}, \overline{\#}, \overline{Q3_{RLM}}) \rightarrow (\$, \overline{0_{LLM}}, \sqcup, \overline{\#}, \overline{0_{RLM}}\overline{\sqcup}\overline{Q3})$

131. $(\$, \overline{0}, \overline{\sqcup_{LLM}}, \overline{\#}, \overline{Q4_{RLM}}) \rightarrow (\$, \overline{0_{LLM}}, \sqcup, \overline{\#}, \overline{0_{RLM}}\overline{\sqcup}\overline{Q4})$

132. $(\$, \overline{0}, \overline{\sqcup_{LLM}}, \overline{\#}, \overline{Q5_{RLM}}) \rightarrow (\$, \overline{0_{LLM}}, \sqcup, \overline{\#}, \overline{0_{RLM}}\overline{\sqcup}\overline{Q5})$

133. $(\$, \overline{0}, \overline{x_{LLM}}, \overline{\#}, \overline{Q1_{RLM}}) \rightarrow (\$, \overline{0_{LLM}}, x, \overline{\#}, \overline{0_{RLM}}\overline{x}\overline{Q1})$

134. $(\$, \overline{0}, \overline{x_{LLM}}, \overline{\#}, \overline{Q2_{RLM}}) \rightarrow (\$, \overline{0_{LLM}}, x, \overline{\#}, \overline{0_{RLM}}\overline{x}\overline{Q2})$

135. $(\$, \overline{0}, \overline{x_{LLM}}, \overline{\#}, \overline{Q3_{RLM}}) \rightarrow (\$, \overline{0_{LLM}}, x, \overline{\#}, \overline{0_{RLM}}\overline{x}\overline{Q3})$

136. $(\$, \overline{0}, \overline{x_{LLM}}, \overline{\#}, \overline{Q4_{RLM}}) \rightarrow (\$, \overline{0_{LLM}}, x, \overline{\#}, \overline{0_{RLM}}\overline{x}\overline{Q4})$

137. $(\$, \overline{0}, \overline{x_{LLM}}, \overline{\#}, \overline{Q5_{RLM}}) \rightarrow (\$, \overline{0_{LLM}}, x, \overline{\#}, \overline{0_{RLM}}\overline{x}\overline{Q5})$

138. $(\$, \overline{\sqcup}, \overline{0_{LLM}}, \overline{\#}, \overline{Q1_{RLM}}) \rightarrow (\$, \overline{\sqcup_{LLM}}, 0, \overline{\#}, \overline{\sqcup_{RLM}}\overline{0}\overline{Q1})$

139. $(\$, \overline{\sqcup}, \overline{0_{LLM}}, \overline{\#}, \overline{Q2_{RLM}}) \rightarrow (\$, \overline{\sqcup_{LLM}}, 0, \overline{\#}, \overline{\sqcup_{RLM}}\overline{0}\overline{Q2})$

140. $(\$, \overline{\sqcup}, \overline{0_{LLM}}, \overline{\#}, \overline{Q3_{RLM}}) \rightarrow (\$, \overline{\sqcup_{LLM}}, 0, \overline{\#}, \overline{\sqcup_{RLM}}\overline{0}\overline{Q3})$

141. $(\$, \overline{\sqcup}, \overline{0_{LLM}}, \overline{\#}, \overline{Q4_{RLM}}) \rightarrow (\$, \overline{\sqcup_{LLM}}, 0, \overline{\#}, \overline{\sqcup_{RLM}}\overline{0}\overline{Q4})$

142. $(\$, \overline{\sqcup}, \overline{0_{LLM}}, \overline{\#}, \overline{Q5_{RLM}}) \rightarrow (\$, \overline{\sqcup_{LLM}}, 0, \overline{\#}, \overline{\sqcup_{RLM}}\overline{0}\overline{Q5})$

143. $(\$, \overline{\sqcup}, \overline{\sqcup_{LLM}}, \overline{\#}, \overline{Q1_{RLM}}) \rightarrow (\$, \overline{\sqcup_{LLM}}, \sqcup, \overline{\#}, \overline{\sqcup_{RLM}}\overline{\sqcup}\overline{Q1})$

144. $(\$, \overline{\sqcup}, \overline{\sqcup_{LLM}}, \overline{\#}, \overline{Q2_{RLM}}) \rightarrow (\$, \overline{\sqcup_{LLM}}, \sqcup, \overline{\#}, \overline{\sqcup_{RLM}}\overline{\sqcup}\overline{Q2})$

145. $(\$, \overline{\sqcup}, \overline{\sqcup_{LLM}}, \overline{\#}, \overline{Q3_{RLM}}) \rightarrow (\$, \overline{\sqcup_{LLM}}, \sqcup, \overline{\#}, \overline{\sqcup_{RLM}}\overline{\sqcup}\overline{Q3})$

146. $(\$, \overline{\sqcup}, \overline{\sqcup_{LLM}}, \overline{\#}, \overline{Q4_{RLM}}) \rightarrow (\$, \overline{\sqcup_{LLM}}, \sqcup, \overline{\#}, \overline{\sqcup_{RLM}}\overline{\sqcup}\overline{Q4})$

147. $(\$, \overline{\sqcup}, \overline{\sqcup_{LLM}}, \overline{\#}, \overline{Q5_{RLM}}) \rightarrow (\$, \overline{\sqcup_{LLM}}, \sqcup, \overline{\#}, \overline{\sqcup_{RLM}}\overline{\sqcup}\overline{Q5})$

148. $(\$, \overline{\sqcup}, \overline{x_{LLM}}, \overline{\#}, \overline{Q1_{RLM}}) \rightarrow (\$, \overline{\sqcup_{LLM}}, x, \overline{\#}, \overline{\sqcup_{RLM}}\overline{x}\overline{Q1})$

149. $(\$, \overline{\sqcup}, \overline{x_{LLM}}, \overline{\#}, \overline{Q2_{RLM}}) \rightarrow (\$, \overline{\sqcup_{LLM}}, x, \overline{\#}, \overline{\sqcup_{RLM}}\overline{x}\overline{Q2})$

150. $(\$, \overline{\sqcup}, \overline{x_{LLM}}, \overline{\#}, \overline{Q3_{RLM}}) \rightarrow (\$, \overline{\sqcup_{LLM}}, x, \overline{\#}, \overline{\sqcup_{RLM}}\overline{x}\overline{Q3})$

151. $(\$, \overline{\sqcup}, \overline{x_{LLM}}, \overline{\#}, \overline{Q4_{RLM}}) \rightarrow (\$, \overline{\sqcup_{LLM}}, x, \overline{\#}, \overline{\sqcup_{RLM}}\overline{x}\overline{Q4})$

152. $(\$, \overline{\sqcup}, \overline{x_{LLM}}, \overline{\#}, \overline{Q5_{RLM}}) \rightarrow (\$, \overline{\sqcup_{LLM}}, x, \overline{\#}, \overline{\sqcup_{RLM}}\overline{x}\overline{Q5})$

153. $(\$, \overline{x}, \overline{0_{LLM}}, \overline{\#}, \overline{Q1_{RLM}}) \rightarrow (\$, \overline{x_{LLM}}, 0, \overline{\#}, \overline{x_{RLM}}\overline{0}\overline{Q1})$

154. $(\$, \overline{x}, \overline{0_{LLM}}, \overline{\#}, \overline{Q2_{RLM}}) \rightarrow (\$, \overline{x_{LLM}}, 0, \overline{\#}, \overline{x_{RLM}}\overline{0}\overline{Q2})$

155. $(\$, \overline{x}, \overline{0_{LLM}}, \overline{\#}, \overline{Q3_{RLM}}) \rightarrow (\$, \overline{x_{LLM}}, 0, \overline{\#}, \overline{x_{RLM}}\overline{0}\overline{Q3})$

156. $(\$, \overline{x}, \overline{0_{LLM}}, \overline{\#}, \overline{Q4_{RLM}}) \rightarrow (\$, \overline{x_{LLM}}, 0, \overline{\#}, \overline{x_{RLM}}\overline{0}\overline{Q4})$

157. $(\$, \overline{x}, \overline{0_{LLM}}, \overline{\#}, \overline{Q5_{RLM}}) \rightarrow (\$, \overline{x_{LLM}}, 0, \overline{\#}, \overline{x_{RLM}}\overline{0}\overline{Q5})$

158. $(\$, \overline{x}, \overline{\sqcup_{LLM}}, \overline{\#}, \overline{Q1_{RLM}}) \rightarrow (\$, \overline{x_{LLM}}, \sqcup, \overline{\#}, \overline{x_{RLM}}\overline{\sqcup}\overline{Q1})$

159. $(\$, \overline{x}, \overline{\sqcup_{LLM}}, \overline{\#}, \overline{Q2_{RLM}}) \rightarrow (\$, \overline{x_{LLM}}, \sqcup, \overline{\#}, \overline{x_{RLM}}\overline{\sqcup}\overline{Q2})$

160. $(\$, \overline{x}, \overline{\sqcup_{LLM}}, \overline{\#}, \overline{Q3_{RLM}}) \rightarrow (\$, \overline{x_{LLM}}, \sqcup, \overline{\#}, \overline{x_{RLM}}\overline{\sqcup}\overline{Q3})$

161. $(\$, \overline{x}, \overline{\sqcup_{LLM}}, \overline{\#}, \overline{Q4_{RLM}}) \rightarrow (\$, \overline{x_{LLM}}, \sqcup, \overline{\#}, \overline{x_{RLM}}\overline{\sqcup}\overline{Q4})$

162. $(\$, \overline{x}, \overline{\sqcup_{LLM}}, \overline{\#}, \overline{Q5_{RLM}}) \rightarrow (\$, \overline{x_{LLM}}, \sqcup, \overline{\#}, \overline{x_{RLM}}\overline{\sqcup}\overline{Q5})$

163. $(\$, \overline{x}, \overline{x_{LLM}}, \overline{\#}, \overline{Q1_{RLM}}) \rightarrow (\$, \overline{x_{LLM}}, x, \overline{\#}, \overline{x_{RLM}x}\overline{Q1})$

164. $(\$, \overline{x}, \overline{x_{LLM}}, \overline{\#}, \overline{Q2_{RLM}}) \rightarrow (\$, \overline{x_{LLM}}, x, \overline{\#}, \overline{x_{RLM}x}\overline{Q2})$

165. $(\$, \overline{x}, \overline{x_{LLM}}, \overline{\#}, \overline{Q3_{RLM}}) \rightarrow (\$, \overline{x_{LLM}}, x, \overline{\#}, \overline{x_{RLM}x}\overline{Q3})$

166. $(\$, \overline{x}, \overline{x_{LLM}}, \overline{\#}, \overline{Q4_{RLM}}) \rightarrow (\$, \overline{x_{LLM}}, x, \overline{\#}, \overline{x_{RLM}x}\overline{Q4})$

167. $(\$, \overline{x}, \overline{x_{LLM}}, \overline{\#}, \overline{Q5_{RLM}}) \rightarrow (\$, \overline{x_{LLM}}, x, \overline{\#}, \overline{x_{RLM}x}\overline{Q5})$

Na základe pravidla čislo 18

168. $(\overline{0^1}, \overline{0^1_{LLM}}, \overline{\#^1}, \overline{Q1_{RLM}}) \rightarrow (\overline{0^1_{LLM}}, 0, \overline{\#^1}, \overline{0_{RLM}0}\overline{Q1})$

169. $(\overline{0^1}, \overline{0^1_{LLM}}, \overline{\#^1}, \overline{Q2_{RLM}}) \rightarrow (\overline{0^1_{LLM}}, 0, \overline{\#^1}, \overline{0_{RLM}0}\overline{Q2})$

170. $(\overline{0^1}, \overline{0^1_{LLM}}, \overline{\#^1}, \overline{Q3_{RLM}}) \rightarrow (\overline{0^1_{LLM}}, 0, \overline{\#^1}, \overline{0_{RLM}0}\overline{Q3})$

171. $(\overline{0^1}, \overline{0^1_{LLM}}, \overline{\#^1}, \overline{Q4_{RLM}}) \rightarrow (\overline{0^1_{LLM}}, 0, \overline{\#^1}, \overline{0_{RLM}0}\overline{Q4})$

172. $(\overline{0^1}, \overline{0^1_{LLM}}, \overline{\#^1}, \overline{Q5_{RLM}}) \rightarrow (\overline{0^1_{LLM}}, 0, \overline{\#^1}, \overline{0_{RLM}0}\overline{Q5})$

173. $(\overline{0^1}, \overline{\sqcup^1_{LLM}}, \overline{\#^1}, \overline{Q1_{RLM}}) \rightarrow (\overline{0^1_{LLM}}, \sqcup, \overline{\#^1}, \overline{0_{RLM}}\overline{\sqcup}\overline{Q1})$

174. $(\overline{0^1}, \overline{\sqcup^1_{LLM}}, \overline{\#^1}, \overline{Q2_{RLM}}) \rightarrow (\overline{0^1_{LLM}}, \sqcup, \overline{\#^1}, \overline{0_{RLM}}\overline{\sqcup}\overline{Q2})$

175. $(\overline{0^1}, \overline{\sqcup^1_{LLM}}, \overline{\#^1}, \overline{Q3_{RLM}}) \rightarrow (\overline{0^1_{LLM}}, \sqcup, \overline{\#^1}, \overline{0_{RLM}}\overline{\sqcup}\overline{Q3})$

176. $(\overline{0^1}, \overline{\sqcup^1_{LLM}}, \overline{\#^1}, \overline{Q4_{RLM}}) \rightarrow (\overline{0^1_{LLM}}, \sqcup, \overline{\#^1}, \overline{0_{RLM}}\overline{\sqcup}\overline{Q4})$

177. $(\overline{0^1}, \overline{\sqcup^1_{LLM}}, \overline{\#^1}, \overline{Q5_{RLM}}) \rightarrow (\overline{0^1_{LLM}}, \sqcup, \overline{\#^1}, \overline{0_{RLM}}\overline{\sqcup}\overline{Q5})$

178. $(\overline{0^1}, \overline{x^1_{LLM}}, \overline{\#^1}, \overline{Q1_{RLM}}) \rightarrow (\overline{0^1_{LLM}}, x, \overline{\#^1}, \overline{0_{RLM}}\overline{x}\overline{Q1})$

179. $(\overline{0^1}, \overline{x^1_{LLM}}, \overline{\#^1}, \overline{Q2_{RLM}}) \rightarrow (\overline{0^1_{LLM}}, x, \overline{\#^1}, \overline{0_{RLM}}\overline{x}\overline{Q2})$

180. $(\overline{0^1}, \overline{x^1_{LLM}}, \overline{\#^1}, \overline{Q3_{RLM}}) \rightarrow (\overline{0^1_{LLM}}, x, \overline{\#^1}, \overline{0_{RLM}}\overline{x}\overline{Q3})$

181. $(\overline{0^1}, \overline{x^1_{LLM}}, \overline{\#^1}, \overline{Q4_{RLM}}) \rightarrow (\overline{0^1_{LLM}}, x, \overline{\#^1}, \overline{0_{RLM}}\overline{x}\overline{Q4})$

182. $(\overline{0^1}, \overline{x^1_{LLM}}, \overline{\#^1}, \overline{Q5_{RLM}}) \rightarrow (\overline{0^1_{LLM}}, x, \overline{\#^1}, \overline{0_{RLM}}\overline{x}\overline{Q5})$

183. $(\overline{\sqcup^1}, \overline{0^1_{LLM}}, \overline{\#^1}, \overline{Q1_{RLM}}) \rightarrow (\overline{\sqcup^1_{LLM}}, 0, \overline{\#^1}, \overline{\sqcup_{RLM}}\overline{0}\overline{Q1})$

184. $(\overline{\sqcup^1}, \overline{0^1_{LLM}}, \overline{\#^1}, \overline{Q2_{RLM}}) \rightarrow (\overline{\sqcup^1_{LLM}}, 0, \overline{\#^1}, \overline{\sqcup_{RLM}}\overline{0}\overline{Q2})$

185. $(\overline{\sqcup^1}, \overline{0^1_{LLM}}, \overline{\#^1}, \overline{Q3_{RLM}}) \rightarrow (\overline{\sqcup^1_{LLM}}, 0, \overline{\#^1}, \overline{\sqcup_{RLM}}\overline{0}\overline{Q3})$

186. $(\overline{\sqcup^1}, \overline{0^1_{LLM}}, \overline{\#^1}, \overline{Q4_{RLM}}) \rightarrow (\overline{\sqcup^1_{LLM}}, 0, \overline{\#^1}, \overline{\sqcup_{RLM}}\overline{0}\overline{Q4})$

187. $(\overline{\sqcup^1}, \overline{0^1_{LLM}}, \overline{\#^1}, \overline{Q5_{RLM}}) \rightarrow (\overline{\sqcup^1_{LLM}}, 0, \overline{\#^1}, \overline{\sqcup_{RLM}}\overline{0}\overline{Q5})$

188. $(\overline{\sqcup^1}, \overline{\sqcup^1_{LLM}}, \overline{\#^1}, \overline{Q1_{RLM}}) \rightarrow (\overline{\sqcup^1_{LLM}}, \sqcup, \overline{\#^1}, \overline{\sqcup_{RLM}}\overline{\sqcup}\overline{Q1})$

189. $(\overline{\sqcup^1}, \overline{\sqcup^1_{LLM}}, \overline{\#^1}, \overline{Q2_{RLM}}) \rightarrow (\overline{\sqcup^1_{LLM}}, \sqcup, \overline{\#^1}, \overline{\sqcup_{RLM}}\overline{\sqcup}\overline{Q2})$

190. $(\overline{\sqcup^1}, \overline{\sqcup^1_{LLM}}, \overline{\#^1}, \overline{Q3_{RLM}}) \rightarrow (\overline{\sqcup^1_{LLM}}, \sqcup, \overline{\#^1}, \overline{\sqcup_{RLM}}\overline{\sqcup}\overline{Q3})$

191. $(\overline{\sqcup^1}, \overline{\sqcup^1_{LLM}}, \overline{\#^1}, \overline{Q4_{RLM}}) \rightarrow (\overline{\sqcup^1_{LLM}}, \sqcup, \overline{\#^1}, \overline{\sqcup_{RLM}}\overline{\sqcup}\overline{Q4})$

192. $(\overline{\sqcup^1}, \overline{\sqcup^1_{LLM}}, \overline{\#^1}, \overline{Q5_{RLM}}) \rightarrow (\overline{\sqcup^1_{LLM}}, \sqcup, \overline{\#^1}, \overline{\sqcup_{RLM}}\overline{\sqcup}\overline{Q5})$

193. $(\overline{\sqcup^1}, \overline{x^1_{LLM}}, \overline{\#^1}, \overline{Q1_{RLM}}) \rightarrow (\overline{\sqcup^1_{LLM}}, x, \overline{\#^1}, \overline{\sqcup_{RLM}}\overline{x}\overline{Q1})$

194. $(\overline{\sqcup^1}, \overline{x^1_{LLM}}, \overline{\#^1}, \overline{Q2_{RLM}}) \rightarrow (\overline{\sqcup^1_{LLM}}, x, \overline{\#^1}, \overline{\sqcup_{RLM}}\overline{x}\overline{Q2})$

195. $(\overline{\sqcup^1}, \overline{x^1_{LLM}}, \overline{\#^1}, \overline{Q3_{RLM}}) \rightarrow (\overline{\sqcup^1_{LLM}}, x, \overline{\#^1}, \overline{\sqcup_{RLM}}\overline{x}\overline{Q3})$

196. $(\overline{\sqcup^1}, \overline{x^1_{LLM}}, \overline{\#^1}, \overline{Q4_{RLM}}) \rightarrow (\overline{\sqcup^1_{LLM}}, x, \overline{\#^1}, \overline{\sqcup_{RLM}}\overline{x}\overline{Q4})$

197. $(\overline{\sqcup^1}, \overline{x^1_{LLM}}, \overline{\#^1}, \overline{Q5_{RLM}}) \rightarrow (\overline{\sqcup^1_{LLM}}, x, \overline{\#^1}, \overline{\sqcup_{RLM}}\overline{x}\overline{Q5})$

198. $(\overline{x^1}, \overline{0^1_{LLM}}, \overline{\#^1}, \overline{Q1_{RLM}}) \rightarrow (\overline{x^1_{LLM}}, 0, \overline{\#^1}, \overline{x_{RLM}}\overline{0}\overline{Q1})$

199. $(\overline{x^1}, \overline{0^1_{LLM}}, \overline{\#^1}, \overline{Q2_{RLM}}) \rightarrow (\overline{x^1_{LLM}}, 0, \overline{\#^1}, \overline{x_{RLM}}\overline{0}\overline{Q2})$

200. $(\overline{x^1}, \overline{0^1_{LLM}}, \overline{\#^1}, \overline{Q3_{RLM}}) \rightarrow (\overline{x^1_{LLM}}, 0, \overline{\#^1}, \overline{x_{RLM}}\overline{0}\overline{Q3})$

201. $(\overline{x^1}, \overline{0^1_{LLM}}, \overline{\#^1}, \overline{Q4_{RLM}}) \rightarrow (\overline{x^1_{LLM}}, 0, \overline{\#^1}, \overline{x_{RLM}}\overline{0}\overline{Q4})$

202. $(\overline{x^1}, \overline{0^1_{LLM}}, \overline{\#^1}, \overline{Q5_{RLM}}) \rightarrow (\overline{x^1_{LLM}}, 0, \overline{\#^1}, \overline{x_{RLM}}\overline{0}\overline{Q5})$

203. $(\overline{x^1}, \overline{\sqcup^1_{LLM}}, \overline{\#^1}, \overline{Q1_{RLM}}) \rightarrow (\overline{x^1_{LLM}}, \sqcup, \overline{\#^1}, \overline{x_{RLM}}\overline{\sqcup}\overline{Q1})$

204. $(\overline{x^1}, \overline{\sqcup^1_{LLM}}, \overline{\#^1}, \overline{Q2_{RLM}}) \rightarrow (\overline{x^1_{LLM}}, \sqcup, \overline{\#^1}, \overline{x_{RLM}}\overline{\sqcup}\overline{Q2})$

205. $(\overline{x^1}, \overline{\sqcup^1_{LLM}}, \overline{\#^1}, \overline{Q3_{RLM}}) \rightarrow (\overline{x^1_{LLM}}, \sqcup, \overline{\#^1}, \overline{x_{RLM}}\overline{\sqcup}\overline{Q3})$

206. $(\overline{x^1}, \overline{\sqcup^1_{LLM}}, \overline{\#^1}, \overline{Q4_{RLM}}) \rightarrow (\overline{x^1_{LLM}}, \sqcup, \overline{\#^1}, \overline{x_{RLM}}\overline{\sqcup}\overline{Q4})$

207. $(\overline{x^1}, \overline{\sqcup^1_{LLM}}, \overline{\#^1}, \overline{Q5_{RLM}}) \rightarrow (\overline{x^1_{LLM}}, \sqcup, \overline{\#^1}, \overline{x_{RLM}}\overline{\sqcup}\overline{Q5})$

208. $(\overline{x^1}, \overline{x^1_{LLM}}, \overline{\#^1}, \overline{Q1_{RLM}}) \rightarrow (\overline{x^1_{LLM}}, x, \overline{\#^1}, \overline{x_{RLM}}\overline{x}\overline{Q1})$

209. $(\overline{x^1}, \overline{x^1_{LLM}}, \overline{\#^1}, \overline{Q2_{RLM}}) \rightarrow (\overline{x^1_{LLM}}, x, \overline{\#^1}, \overline{x_{RLM}}\overline{x}\overline{Q2})$

210. $(\overline{x^1}, \overline{x^1_{LLM}}, \overline{\#^1}, \overline{Q3_{RLM}}) \rightarrow (\overline{x^1_{LLM}}, x, \overline{\#^1}, \overline{x_{RLM}}\overline{x}\overline{Q3})$

211. $(\overline{x^1}, \overline{x^1_{LLM}}, \overline{\#^1}, \overline{Q4_{RLM}}) \rightarrow (\overline{x^1_{LLM}}, x, \overline{\#^1}, \overline{x_{RLM}}\overline{x}\overline{Q4})$

212. $(\overline{x^1}, \overline{x^1_{LLM}}, \overline{\#^1}, \overline{Q5_{RLM}}) \rightarrow (\overline{x^1_{LLM}}, x, \overline{\#^1}, \overline{x_{RLM}}\overline{x}\overline{Q5})$

Na základe pravidla čislo 19

213. $(\$, \overline{Q3}, \overline{\sqcup}, \overline{\#}, S) \rightarrow (\$, Q3, \overline{\sqcup_{RM}}, \overline{\#}, \overline{Q5}\overline{\sqcup}R)$

214. $(\$, \overline{Q5}, \overline{0}, \overline{\#}, S) \rightarrow (\$, Q5, \overline{0_{RM}}, \overline{\#}, \overline{Q5}\overline{0}R)$

215. $(\$, \overline{Q5}, \overline{x}, \overline{\#}, S) \rightarrow (\$, Q5, \overline{x_{RM}}, \overline{\#}, \overline{Q5}\overline{x}R)$

Na základe pravidla čislo 21

216. $(\overline{\#^1}) \rightarrow (\overline{\sqcup^1}\overline{\#})$

217. $(\overline{\#}) \rightarrow (\overline{\sqcup}\overline{\#})$

Na základe pravidla čislo 22

218. $(\$, \overline{\#}, \overline{Q_{acc}}, R) \rightarrow (\#, \#, Q_{acc}, \#)$

Na základe pravidla čislo 23

219. $(\$, \overline{\#}, \overline{Q_{rej}}, R) \rightarrow (\#, \#, Q_{rej}, \#)$

Na základe pravidla čislo 24

220. $(\$, \overline{\#}, R) \rightarrow (\#, \$, \overline{\#}S)$

Na základe pravidla čislo 25

221. $(\overline{\#^1}, R) \rightarrow (\$, \overline{\#}S)$

Na základe pravidla čislo 26

222. $(\$, \overline{\#}, \overline{0}, \overline{Q_{acc}}) \rightarrow (\$, \overline{\#}, 0, \overline{Q_{acc}})$

223. $(\$, \overline{\#}, \overline{\sqcup}, \overline{Q_{acc}}) \rightarrow (\$, \overline{\#}, \sqcup, \overline{Q_{acc}})$

224. $(\$, \overline{\#}, \overline{x}, \overline{Q_{acc}}) \rightarrow (\$, \overline{\#}, x, \overline{Q_{acc}})$

Na základe pravidla čislo 27

225. $(\$, \overline{\#}, \overline{0}, \overline{Q_{rej}}) \rightarrow (\$, \overline{\#}, 0, \overline{Q_{rej}})$

226. $(\$, \overline{\#}, \overline{\sqcup}, \overline{Q_{rej}}) \rightarrow (\$, \overline{\#}, \sqcup, \overline{Q_{rej}})$

227. $(\$, \overline{\#}, \overline{x}, \overline{Q_{rej}}) \rightarrow (\$, \overline{\#}, x, \overline{Q_{rej}})$

Na základe pravidla čislo 28

228. $(\$, \overline{\#}, \overline{Q_{acc}}, \overline{0}) \rightarrow (\$, \overline{\#}, \overline{Q_{acc}}, 0)$

229. $(\$, \overline{\#}, \overline{Q_{acc}}, \overline{\sqcup}) \rightarrow (\$, \overline{\#}, \overline{Q_{acc}}, \sqcup)$

230. $(\$, \overline{\#}, \overline{Q_{acc}}, \overline{x}) \rightarrow (\$, \overline{\#}, \overline{Q_{acc}}, x)$

Na základe pravidla čislo 29

231. $(\$, \overline{\#}, \overline{Q_{rej}}, \overline{0}) \rightarrow (\$, \overline{\#}, \overline{Q_{rej}}, 0)$

232. $(\$, \overline{\#}, \overline{Q_{rej}}, \overline{\sqcup}) \rightarrow (\$, \overline{\#}, \overline{Q_{rej}}, \sqcup)$

233. $(\$, \overline{\#}, \overline{Q_{rej}}, \overline{x}) \rightarrow (\$, \overline{\#}, \overline{Q_{rej}}, x)$

Na základe pravidla čislo 30

234. $(S1) \rightarrow (\overline{0^1}S1)$

Na základe pravidla čislo 31

235. $(S1) \rightarrow (\overline{\#^1}S)$

Na základe pravidla čislo 32

236. $(S0) \rightarrow (\overline{Q1^1}S1)$

}

# Príloha B

# Množina pravidiel z príkladu 4.1

$P = \{$ Na zaklade pravidla cislo 4

1. $(\$, \overline{Q1}, \overline{\sqcup}, \overline{\#}, S) \rightarrow (\$, \overline{Q1_{LLM}}, \overline{\sqcup_{RM}}, \overline{\#}, \overline{\sqcup_{RLM}}\overline{Q_{acc}}R)$
2. $(\$, \overline{Q1}, \overline{a}, \overline{\#}, S) \rightarrow (\$, \overline{Q1_{LLM}}, \overline{a_{RM}}, \overline{\#}, \overline{a_{RLM}}\overline{Q1}R)$
3. $(\$, \overline{Q1}, \overline{b}, \overline{\#}, S) \rightarrow (\$, \overline{Q1_{LLM}}, \overline{b_{RM}}, \overline{\#}, \overline{b_{RLM}}\overline{Q_{rej}}R)$

Na zaklade pravidla cislo 5

4. $(\overline{Q1^1}, \overline{\sqcup^1}, \overline{\#^1}, S) \rightarrow (Q1, \overline{\sqcup^1_{RM}}, \overline{\#^1}, \overline{\sqcup}\overline{Q_{acc}}R)$
5. $(\overline{Q1^1}, \overline{a^1}, \overline{\#^1}, S) \rightarrow (Q1, \overline{a^1_{RM}}, \overline{\#^1}, \overline{a}\overline{Q1}R)$
6. $(\overline{Q1^1}, \overline{b^1}, \overline{\#^1}, S) \rightarrow (Q1, \overline{b^1_{RM}}, \overline{\#^1}, \overline{b}\overline{Q_{rej}}R)$

Na zaklade pravidla cislo 6

7. $(\$, \overline{\sqcup_{RM}}, \overline{\sqcup}, \overline{\#}, R) \rightarrow (\$, \sqcup, \overline{\sqcup_{RM}}, \overline{\#}, \overline{\sqcup}R)$
8. $(\$, \overline{\sqcup_{RM}}, \overline{a}, \overline{\#}, R) \rightarrow (\$, \sqcup, \overline{a_{RM}}, \overline{\#}, \overline{a}R)$
9. $(\$, \overline{\sqcup_{RM}}, \overline{b}, \overline{\#}, R) \rightarrow (\$, \sqcup, \overline{b_{RM}}, \overline{\#}, \overline{b}R)$
10. $(\$, \overline{a_{RM}}, \overline{\sqcup}, \overline{\#}, R) \rightarrow (\$, a, \overline{\sqcup_{RM}}, \overline{\#}, \overline{\sqcup}R)$
11. $(\$, \overline{a_{RM}}, \overline{a}, \overline{\#}, R) \rightarrow (\$, a, \overline{a_{RM}}, \overline{\#}, \overline{a}R)$
12. $(\$, \overline{a_{RM}}, \overline{b}, \overline{\#}, R) \rightarrow (\$, a, \overline{b_{RM}}, \overline{\#}, \overline{b}R)$
13. $(\$, \overline{b_{RM}}, \overline{\sqcup}, \overline{\#}, R) \rightarrow (\$, b, \overline{\sqcup_{RM}}, \overline{\#}, \overline{\sqcup}R)$
14. $(\$, \overline{b_{RM}}, \overline{a}, \overline{\#}, R) \rightarrow (\$, b, \overline{a_{RM}}, \overline{\#}, \overline{a}R)$
15. $(\$, \overline{b_{RM}}, \overline{b}, \overline{\#}, R) \rightarrow (\$, b, \overline{b_{RM}}, \overline{\#}, \overline{b}R)$

Na zaklade pravidla cislo 7

16. $(\overline{\sqcup^1_{RM}}, \overline{\sqcup^1}, \overline{\#^1}, R) \rightarrow (\sqcup, \overline{\sqcup^1_{RM}}, \overline{\#^1}, \overline{\sqcup}R)$
17. $(\overline{\sqcup^1_{RM}}, \overline{a^1}, \overline{\#^1}, R) \rightarrow (\sqcup, \overline{a^1_{RM}}, \overline{\#^1}, \overline{a}R)$

18. $(\overline{\sqcup^1_{RM}}, \overline{b^1}, \overline{\#^1}, R) \rightarrow (\sqcup, \overline{b^1_{RM}}, \overline{\#^1}, \overline{b}R)$

19. $(\overline{a^1_{RM}}, \overline{\sqcup^1}, \overline{\#^1}, R) \rightarrow (a, \overline{\sqcup^1_{RM}}, \overline{\#^1}, \overline{\sqcup}R)$

20. $(\overline{a^1_{RM}}, \overline{a^1}, \overline{\#^1}, R) \rightarrow (a, \overline{a^1_{RM}}, \overline{\#^1}, \overline{a}R)$

21. $(\overline{a^1_{RM}}, \overline{b^1}, \overline{\#^1}, R) \rightarrow (a, \overline{b^1_{RM}}, \overline{\#^1}, \overline{b}R)$

22. $(\overline{b^1_{RM}}, \overline{\sqcup^1}, \overline{\#^1}, R) \rightarrow (b, \overline{\sqcup^1_{RM}}, \overline{\#^1}, \overline{\sqcup}R)$

23. $(\overline{b^1_{RM}}, \overline{a^1}, \overline{\#^1}, R) \rightarrow (b, \overline{a^1_{RM}}, \overline{\#^1}, \overline{a}R)$

24. $(\overline{b^1_{RM}}, \overline{b^1}, \overline{\#^1}, R) \rightarrow (b, \overline{b^1_{RM}}, \overline{\#^1}, \overline{b}R)$

Na zaklade pravidla cislo 8

25. $(\$, \overline{\sqcup}, \overline{Q1_{LLM}}, \overline{\#}, \overline{\sqcup_{RLM}}) \rightarrow (\$, \overline{\sqcup_{LLM}}, Q1, \overline{\#}, \overline{\sqcup_{RLM}\sqcup})$

26. $(\$, \overline{\sqcup}, \overline{Q1_{LLM}}, \overline{\#}, \overline{a_{RLM}}) \rightarrow (\$, \overline{\sqcup_{LLM}}, Q1, \overline{\#}, \overline{\sqcup_{RLM}a})$

27. $(\$, \overline{\sqcup}, \overline{Q1_{LLM}}, \overline{\#}, \overline{b_{RLM}}) \rightarrow (\$, \overline{\sqcup_{LLM}}, Q1, \overline{\#}, \overline{\sqcup_{RLM}b})$

28. $(\$, \overline{a}, \overline{Q1_{LLM}}, \overline{\#}, \overline{\sqcup_{RLM}}) \rightarrow (\$, \overline{a_{LLM}}, Q1, \overline{\#}, \overline{a_{RLM}\sqcup})$

29. $(\$, \overline{a}, \overline{Q1_{LLM}}, \overline{\#}, \overline{a_{RLM}}) \rightarrow (\$, \overline{a_{LLM}}, Q1, \overline{\#}, \overline{a_{RLM}a})$

30. $(\$, \overline{a}, \overline{Q1_{LLM}}, \overline{\#}, \overline{b_{RLM}}) \rightarrow (\$, \overline{a_{LLM}}, Q1, \overline{\#}, \overline{a_{RLM}b})$

31. $(\$, \overline{b}, \overline{Q1_{LLM}}, \overline{\#}, \overline{\sqcup_{RLM}}) \rightarrow (\$, \overline{b_{LLM}}, Q1, \overline{\#}, \overline{b_{RLM}\sqcup})$

32. $(\$, \overline{b}, \overline{Q1_{LLM}}, \overline{\#}, \overline{a_{RLM}}) \rightarrow (\$, \overline{b_{LLM}}, Q1, \overline{\#}, \overline{b_{RLM}a})$

33. $(\$, \overline{b}, \overline{Q1_{LLM}}, \overline{\#}, \overline{b_{RLM}}) \rightarrow (\$, \overline{b_{LLM}}, Q1, \overline{\#}, \overline{b_{RLM}b})$

Na zaklade pravidla cislo 9

34. $(\$, \overline{Q1_{LLM}}, \overline{\#}) \rightarrow (\$, Q1, \overline{\#})$

Na zaklade pravidla cislo 10

35. $(\$, \overline{\sqcup_{LLM}}, \overline{\#}) \rightarrow (\$, \sqcup, \overline{\#})$

36. $(\$, \overline{a_{LLM}}, \overline{\#}) \rightarrow (\$, a, \overline{\#})$

37. $(\$, \overline{b_{LLM}}, \overline{\#}) \rightarrow (\$, b, \overline{\#})$

Na zaklade pravidla cislo 11

38. $(\$, \overline{\sqcup}, \overline{\sqcup_{LLM}}, \overline{\#}, \overline{\sqcup_{RLM}}) \rightarrow (\$, \overline{\sqcup_{LLM}}, \sqcup, \overline{\#}, \overline{\sqcup_{RLM}\sqcup})$

39. $(\$, \overline{\sqcup}, \overline{a_{LLM}}, \overline{\#}, \overline{a_{RLM}}) \rightarrow (\$, \overline{\sqcup_{LLM}}, a, \overline{\#}, \overline{\sqcup_{RLM}a})$

40. $(\$, \overline{\sqcup}, \overline{b_{LLM}}, \overline{\#}, \overline{b_{RLM}}) \rightarrow (\$, \overline{\sqcup_{LLM}}, b, \overline{\#}, \overline{\sqcup_{RLM}b})$

41. $(\$, \overline{a}, \overline{\sqcup_{LLM}}, \overline{\#}, \overline{\sqcup_{RLM}}) \rightarrow (\$, \overline{a_{LLM}}, \sqcup, \overline{\#}, \overline{a_{RLM}\sqcup})$

42. $(\$, \overline{a}, \overline{a_{LLM}}, \overline{\#}, \overline{a_{RLM}}) \rightarrow (\$, \overline{a_{LLM}}, a, \overline{\#}, \overline{a_{RLM}a})$

43. $(\$, \overline{a}, \overline{b_{LLM}}, \overline{\#}, \overline{b_{RLM}}) \rightarrow (\$, \overline{a_{LLM}}, b, \overline{\#}, \overline{a_{RLM}}\overline{b})$

44. $(\$, \overline{b}, \overline{\sqcup_{LLM}}, \overline{\#}, \overline{\sqcup_{RLM}}) \rightarrow (\$, \overline{b_{LLM}}, \sqcup, \overline{\#}, \overline{b_{RLM}}\overline{\sqcup})$

45. $(\$, \overline{b}, \overline{a_{LLM}}, \overline{\#}, \overline{a_{RLM}}) \rightarrow (\$, \overline{b_{LLM}}, a, \overline{\#}, \overline{b_{RLM}}\overline{a})$

46. $(\$, \overline{b}, \overline{b_{LLM}}, \overline{\#}, \overline{b_{RLM}}) \rightarrow (\$, \overline{b_{LLM}}, b, \overline{\#}, \overline{b_{RLM}}\overline{b})$

Na zaklade pravidla cislo 12

47. $(\overline{\sqcup^1}, \overline{\sqcup^1_{LLM}}, \overline{\#^1}, \overline{\sqcup_{RLM}}) \rightarrow (\overline{\sqcup^1_{LLM}}, \sqcup, \overline{\#^1}, \overline{\sqcup_{RLM}}\overline{\sqcup})$

48. $(\overline{\sqcup^1}, \overline{a^1_{LLM}}, \overline{\#^1}, \overline{a_{RLM}}) \rightarrow (\overline{\sqcup^1_{LLM}}, a, \overline{\#^1}, \overline{\sqcup_{RLM}}\overline{a})$

49. $(\overline{\sqcup^1}, \overline{b^1_{LLM}}, \overline{\#^1}, \overline{b_{RLM}}) \rightarrow (\overline{\sqcup^1_{LLM}}, b, \overline{\#^1}, \overline{\sqcup_{RLM}}\overline{b})$

50. $(\overline{a^1}, \overline{\sqcup^1_{LLM}}, \overline{\#^1}, \overline{\sqcup_{RLM}}) \rightarrow (\overline{a^1_{LLM}}, \sqcup, \overline{\#^1}, \overline{a_{RLM}}\overline{\sqcup})$

51. $(\overline{a^1}, \overline{a^1_{LLM}}, \overline{\#^1}, \overline{a_{RLM}}) \rightarrow (\overline{a^1_{LLM}}, a, \overline{\#^1}, \overline{a_{RLM}}\overline{a})$

52. $(\overline{a^1}, \overline{b^1_{LLM}}, \overline{\#^1}, \overline{b_{RLM}}) \rightarrow (\overline{a^1_{LLM}}, b, \overline{\#^1}, \overline{a_{RLM}}\overline{b})$

53. $(\overline{b^1}, \overline{\sqcup^1_{LLM}}, \overline{\#^1}, \overline{\sqcup_{RLM}}) \rightarrow (\overline{b^1_{LLM}}, \sqcup, \overline{\#^1}, \overline{b_{RLM}}\overline{\sqcup})$

54. $(\overline{b^1}, \overline{a^1_{LLM}}, \overline{\#^1}, \overline{a_{RLM}}) \rightarrow (\overline{b^1_{LLM}}, a, \overline{\#^1}, \overline{b_{RLM}}\overline{a})$

55. $(\overline{b^1}, \overline{b^1_{LLM}}, \overline{\#^1}, \overline{b_{RLM}}) \rightarrow (\overline{b^1_{LLM}}, b, \overline{\#^1}, \overline{b_{RLM}}\overline{b})$

Na zaklade pravidla cislo 13

56. $(\$, \overline{\sqcup_{RM}}, \overline{\#}, R) \rightarrow (\$, \sqcup, \overline{\#}, R)$

57. $(\$, \overline{a_{RM}}, \overline{\#}, R) \rightarrow (\$, a, \overline{\#}, R)$

58. $(\$, \overline{b_{RM}}, \overline{\#}, R) \rightarrow (\$, b, \overline{\#}, R)$

Na zaklade pravidla cislo 14

59. $(\overline{\sqcup^1_{RM}}, \overline{\#^1}, R) \rightarrow (\sqcup, \overline{\#^1}, R)$

60. $(\overline{a^1_{RM}}, \overline{\#^1}, R) \rightarrow (a, \overline{\#^1}, R)$

61. $(\overline{b^1_{RM}}, \overline{\#^1}, R) \rightarrow (b, \overline{\#^1}, R)$

Na zaklade pravidla cislo 15

62. $(\$, \overline{\#}, \overline{\sqcup_{RLM}}) \rightarrow (\$, \overline{\#}, \overline{\sqcup})$

63. $(\$, \overline{\#}, \overline{a_{RLM}}) \rightarrow (\$, \overline{\#}, \overline{a})$

64. $(\$, \overline{\#}, \overline{b_{RLM}}) \rightarrow (\$, \overline{\#}, \overline{b})$

Na zaklade pravidla cislo 17

65. $(\$, \overline{\sqcup}, \overline{\sqcup_{LLM}}, \overline{\#}, \overline{Q1_{RLM}}) \rightarrow (\$, \overline{\sqcup_{LLM}}, \sqcup, \overline{\#}, \overline{\sqcup_{RLM}}\overline{\sqcup}\overline{Q1})$

66. $(\$, \overline{\sqcup}, \overline{a_{LLM}}, \overline{\#}, \overline{Q1_{RLM}}) \rightarrow (\$, \overline{\sqcup_{LLM}}, a, \overline{\#}, \overline{\sqcup_{RLM}}\overline{a}\overline{Q1})$

67. $(\$, \overline{\sqcup}, \overline{b_{LLM}}, \overline{\#}, \overline{Q1_{RLM}}) \rightarrow (\$, \overline{\sqcup_{LLM}}, b, \overline{\#}, \overline{\sqcup_{RLM}}\overline{bQ1})$

68. $(\$, \overline{a}, \overline{\sqcup_{LLM}}, \overline{\#}, \overline{Q1_{RLM}}) \rightarrow (\$, \overline{a_{LLM}}, \sqcup, \overline{\#}, \overline{a_{RLM}}\overline{\sqcup Q1})$

69. $(\$, \overline{a}, \overline{a_{LLM}}, \overline{\#}, \overline{Q1_{RLM}}) \rightarrow (\$, \overline{a_{LLM}}, a, \overline{\#}, \overline{a_{RLM}}\overline{aQ1})$

70. $(\$, \overline{a}, \overline{b_{LLM}}, \overline{\#}, \overline{Q1_{RLM}}) \rightarrow (\$, \overline{a_{LLM}}, b, \overline{\#}, \overline{a_{RLM}}\overline{bQ1})$

71. $(\$, \overline{b}, \overline{\sqcup_{LLM}}, \overline{\#}, \overline{Q1_{RLM}}) \rightarrow (\$, \overline{b_{LLM}}, \sqcup, \overline{\#}, \overline{b_{RLM}}\overline{\sqcup Q1})$

72. $(\$, \overline{b}, \overline{a_{LLM}}, \overline{\#}, \overline{Q1_{RLM}}) \rightarrow (\$, \overline{b_{LLM}}, a, \overline{\#}, \overline{b_{RLM}}\overline{aQ1})$

73. $(\$, \overline{b}, \overline{b_{LLM}}, \overline{\#}, \overline{Q1_{RLM}}) \rightarrow (\$, \overline{b_{LLM}}, b, \overline{\#}, \overline{b_{RLM}}\overline{bQ1})$

Na zaklade pravidla cislo 18

74. $(\overline{\sqcup^1}, \overline{\sqcup^1_{LLM}}, \overline{\#^1}, \overline{Q1_{RLM}}) \rightarrow (\overline{\sqcup^1_{LLM}}, \sqcup, \overline{\#^1}, \overline{\sqcup_{RLM}}\overline{\sqcup Q1})$

75. $(\overline{\sqcup^1}, \overline{a^1_{LLM}}, \overline{\#^1}, \overline{Q1_{RLM}}) \rightarrow (\overline{\sqcup^1_{LLM}}, a, \overline{\#^1}, \overline{\sqcup_{RLM}}\overline{aQ1})$

76. $(\overline{\sqcup^1}, \overline{b^1_{LLM}}, \overline{\#^1}, \overline{Q1_{RLM}}) \rightarrow (\overline{\sqcup^1_{LLM}}, b, \overline{\#^1}, \overline{\sqcup_{RLM}}\overline{bQ1})$

77. $(\overline{a^1}, \overline{\sqcup^1_{LLM}}, \overline{\#^1}, \overline{Q1_{RLM}}) \rightarrow (\overline{a^1_{LLM}}, \sqcup, \overline{\#^1}, \overline{a_{RLM}}\overline{\sqcup Q1})$

78. $(\overline{a^1}, \overline{a^1_{LLM}}, \overline{\#^1}, \overline{Q1_{RLM}}) \rightarrow (\overline{a^1_{LLM}}, a, \overline{\#^1}, \overline{a_{RLM}}\overline{aQ1})$

79. $(\overline{a^1}, \overline{b^1_{LLM}}, \overline{\#^1}, \overline{Q1_{RLM}}) \rightarrow (\overline{a^1_{LLM}}, b, \overline{\#^1}, \overline{a_{RLM}}\overline{bQ1})$

80. $(\overline{b^1}, \overline{\sqcup^1_{LLM}}, \overline{\#^1}, \overline{Q1_{RLM}}) \rightarrow (\overline{b^1_{LLM}}, \sqcup, \overline{\#^1}, \overline{b_{RLM}}\overline{\sqcup Q1})$

81. $(\overline{b^1}, \overline{a^1_{LLM}}, \overline{\#^1}, \overline{Q1_{RLM}}) \rightarrow (\overline{b^1_{LLM}}, a, \overline{\#^1}, \overline{b_{RLM}}\overline{aQ1})$

82. $(\overline{b^1}, \overline{b^1_{LLM}}, \overline{\#^1}, \overline{Q1_{RLM}}) \rightarrow (\overline{b^1_{LLM}}, b, \overline{\#^1}, \overline{b_{RLM}}\overline{bQ1})$

Na zaklade pravidla cislo 21

83. $(\overline{\#^1}) \rightarrow (\overline{\sqcup^1}\overline{\#})$

84. $(\overline{\#}) \rightarrow (\overline{\sqcup}\overline{\#})$

Na zaklade pravidla cislo 22

85. $(\$, \overline{\#}, \overline{Q_{acc}}, R) \rightarrow (\#, \#, Q_{acc}, \#)$

Na zaklade pravidla cislo 23

86. $(\$, \overline{\#}, \overline{Q_{rej}}, R) \rightarrow (\#, \#, Q_{rej}, \#)$

Na zaklade pravidla cislo 24

87. $(\$, \overline{\#}, R) \rightarrow (\#, \$, \overline{\#}S)$

Na zaklade pravidla cislo 25

88. $(\overline{\#^1}, R) \rightarrow (\$, \overline{\#}S)$

Na zaklade pravidla cislo 26

89. $(\$, \overline{\#}, \overline{\sqcup}, \overline{Q_{acc}}) \rightarrow (\$, \overline{\#}, \sqcup, \overline{Q_{acc}})$

90. $(\$, \overline{\#}, \overline{a}, \overline{Q_{acc}}) \rightarrow (\$, \overline{\#}, a, \overline{Q_{acc}})$

91. $(\$, \overline{\#}, \overline{b}, \overline{Q_{acc}}) \rightarrow (\$, \overline{\#}, b, \overline{Q_{acc}})$

Na zaklade pravidla cislo 27

92. $(\$, \overline{\#}, \overline{\sqcup}, \overline{Q_{rej}}) \rightarrow (\$, \overline{\#}, \sqcup, \overline{Q_{rej}})$

93. $(\$, \overline{\#}, \overline{a}, \overline{Q_{rej}}) \rightarrow (\$, \overline{\#}, a, \overline{Q_{rej}})$

94. $(\$, \overline{\#}, \overline{b}, \overline{Q_{rej}}) \rightarrow (\$, \overline{\#}, b, \overline{Q_{rej}})$

Na zaklade pravidla cislo 28

95. $(\$, \overline{\#}, \overline{Q_{acc}}, \overline{\sqcup}) \rightarrow (\$, \overline{\#}, \overline{Q_{acc}}, \sqcup)$

96. $(\$, \overline{\#}, \overline{Q_{acc}}, \overline{a}) \rightarrow (\$, \overline{\#}, \overline{Q_{acc}}, a)$

97. $(\$, \overline{\#}, \overline{Q_{acc}}, \overline{b}) \rightarrow (\$, \overline{\#}, \overline{Q_{acc}}, b)$

Na zaklade pravidla cislo 29

98. $(\$, \overline{\#}, \overline{Q_{rej}}, \overline{\sqcup}) \rightarrow (\$, \overline{\#}, \overline{Q_{rej}}, \sqcup)$

99. $(\$, \overline{\#}, \overline{Q_{rej}}, \overline{a}) \rightarrow (\$, \overline{\#}, \overline{Q_{rej}}, a)$

100. $(\$, \overline{\#}, \overline{Q_{rej}}, \overline{b}) \rightarrow (\$, \overline{\#}, \overline{Q_{rej}}, b)$

Na zaklade pravidla cislo 30

101. $(S1) \rightarrow (\overline{a^1}S1)$

102. $(S1) \rightarrow (\overline{b^1}S1)$

Na zaklade pravidla cislo 31

103. $(S1) \rightarrow (\overline{\#^1}S)$

Na zaklade pravidla cislo 32

104. $(S0) \rightarrow (\overline{Q1^1}S1)$

}

# Příloha C

# Upravený algoritmus bez neterminálov s horným indexom 1

**Algoritmus 3** Prevod Turingovho stroja na gramatiku s rozptýleným kontextom prijímajúcu jeho výpočetnú históriu

**Vstup:** Turingov stroj $M = (Q_{TM},\Sigma_1,\Gamma,\delta,Q_0,Q_{acc},Q_{rej})$

**Výstup:** Gramatika s rozptýleným kontextom $G = (N,T,P,S_0)$, kde L(G) = výpočetná história Turingovho stroja $M$ pre všetky vstupy na ktorých $M$ zastaví

1: Bez ujmy na obecnosti predpokladajme že $\Gamma \cap \{S, S_0, S_1, \#, \overline{\#}, \$, R, L\} \cap \{\overline{A}, \overline{A_{RM}}, \overline{A_{LLM}}, \overline{A_{RLM}} : \forall A \in \Gamma\} \cap \{\overline{Q}, \overline{Q_M} : \forall Q \in Q_{TM}\} \cap Q_{TM} = \emptyset$

2: $N = \{\overline{Q} : Q \in \Gamma\} \cup \overline{\Gamma} \cup \{S\overline{\#}, \$, R, L\} \cup \{\overline{A}, \overline{A_{RM}}, \overline{A_{LLM}}, \overline{A_{RLM}} : A \in \Gamma\}$

3: $T = Q_{TM} \cup \Gamma \cup \{\#\}$

4: $\forall Q_1, Q_2 \in Q_{TM}, \forall A, B \in \Gamma : (\$, \overline{Q_1}, \overline{A}, \overline{\#}, S) \rightarrow (\$, \overline{Q_{1_{LLM}}}, \overline{A_{RM}}, \overline{\#}, \overline{B_{RLM}}\ \overline{Q_2}\ R) \in P \Leftrightarrow \delta(Q_1, A) = (Q_2, B, R)$

5: $\forall A, B \in \Gamma : (\$, \overline{A_{RM}}, \overline{B}, \overline{\#}, R) \rightarrow (\$, A, \overline{B_{RM}}, \overline{\#}, \overline{B}R) \in P$

6: $\forall Q \in Q_{TM}, \forall A, B \in \Gamma : (\$, \overline{A}, \overline{Q_{LLM}}, \overline{\#}, \overline{B_{RLM}}) \rightarrow (\$, \overline{A_{LLM}}, Q, \overline{\#}, \overline{A_{RLM}}\ \overline{B}) \in P$

7: $\forall Q \in Q_{TM} - \{Q_{REJ}, Q_{ACC}\} : (\$, \overline{Q_{LLM}}, \overline{\#}) \rightarrow (\$, Q, \overline{\#}) \in P$

8: $\forall A \in \Gamma : (\$, \overline{A_{LLM}}, \overline{\#}) \rightarrow (\$, A, \overline{\#}) \in P$

9: $\forall A, B \in \Gamma : (\$, \overline{A}, \overline{B_{LLM}}, \overline{\#}, \overline{B_{RLM}}) \rightarrow (\$, \overline{A_{LLM}}, B, \overline{\#}, \overline{A_{RLM}}\ \overline{B}) \in P$

10: $\forall A \in \Gamma : (\$, \overline{A_{RM}}, \overline{\#}, R) \rightarrow (\$, A, \overline{\#}, R) \in P$

11: $\forall A \in \Gamma : (\$, \overline{\#}, \overline{A_{RLM}}) \rightarrow (\$, \overline{\#}, \overline{A}) \in P$

12: $\forall Q_1, Q_2 \in Q_{TM}\ \forall A, B, C \in \Gamma : (\$, \overline{C}, \overline{Q_1}, \overline{A}, \overline{\#}, S) \rightarrow (\$, \overline{C_{LLM}}, Q_1, \overline{A_{RM}}, \overline{\#}, \overline{Q_{2_{RLM}}}\ \overline{C}\ \overline{B}R) \in P \Leftrightarrow \delta(Q_1, A) = (Q_2, B, L)$

13: $\forall Q \in Q_{TM}, \forall A, B \in \Gamma : (\$, \overline{A}, \overline{B_{LLM}}, \overline{\#}, \overline{Q_{RLM}}) \rightarrow (\$, \overline{A_{LLM}}, B, \overline{\#}, \overline{A_{RLM}}\ \overline{B}\ \overline{Q}) \in P$

14: $\forall Q_1, Q_2 \in Q_{TM}, \forall A, B \in \Gamma : (\$, \overline{Q_1}, \overline{A}, \overline{\#}, S) \rightarrow (\$, Q_1, \overline{A_{RM}}, \overline{\#}, \ \overline{Q_2}\ \overline{B}R) \in P \Leftrightarrow \delta(Q_1, A) = (Q_2, B, L)$

$$(\overline{\#}) \to (\sqcup\, \overline{\#}) \in P$$

$$(\$, \overline{\#}, \overline{Q_{REJ}}, R) \to (\#, \#, Q_{REJ}, \#) \in P$$

$$(\$, \overline{\#}, \overline{Q_{ACC}}, R) \to (\#, \#, Q_{ACC}, \#) \in P$$

$$(\$, \overline{\#}, R) \to (\#, \$, \overline{\#}S) \in P$$

$$(\overline{\#^1}, R) \to (\$, \overline{\#}S) \in P$$

$$\forall A \in \Gamma : (\$, \overline{\#}, \overline{A}, \overline{Q_{REJ}}) \to (\$, \overline{\#}, A, \overline{Q_{REJ}}) \in P$$

$$\forall A \in \Gamma : (\$, \overline{\#}, \overline{A}, \overline{Q_{ACC}}) \to (\$, \overline{\#}, A, \overline{Q_{ACC}}) \in P$$

$$\forall A \in \Gamma : (\$, \overline{\#}, \overline{Q_{REJ}}, \overline{A}) \to (\$, \overline{\#}, \overline{Q_{REJ}}, A) \in P$$

$$\forall A \in \Gamma : (\$, \overline{\#}, \overline{Q_{ACC}}, \overline{A}) \to (\$, \overline{\#}, \overline{Q_{ACC}}, A) \in P$$

$$\forall A \in \Sigma_1 : (S_1) \to (\overline{A}S_1)$$

$$(S_1) \to (\overline{\#^1}S)$$

$$(S_0) \to (\$\overline{Q_0}S_1)$$

# Příloha D

# Obsah priloženého CD

Na priloženom CD sa nachádza archív so zdrojovými kódmi programu, PDF verzia tejto práce, súbory s príkladmi Turingových strojov (v rámci archívu so zdrojovými kódmi) a archív so zdrojovými kódmi tejto práce v jazyku LaTeX.