



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA INFORMAČNÍCH TECHNOLOGIÍ

FACULTY OF INFORMATION TECHNOLOGY

ÚSTAV POČÍTAČOVÉ GRAFIKY A MULTIMÉDIÍ

DEPARTMENT OF COMPUTER GRAPHICS AND MULTIMEDIA

SIMULACE KAPALIN

FLUID SIMULATION

DIPLOMOVÁ PRÁCE

MASTER'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Bc. PAVOL ELDES

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

Ing. TOMÁŠ MILET

BRNO 2017

Vysoké učení technické v Brně - Fakulta informačních technologií

Ústav počítačové grafiky a multimédií

Akademický rok 2016/2017

Zadání diplomové práce

Řešitel: **Eldes Pavol, Bc.**

Obor: Počítačová grafika a multimédia

Téma: **Simulace kapalin
Fluid Simulation**

Kategorie: Počítačová grafika

Pokyny:

1. Prostudujte problematiku simulací kapalin a pružných materiálů; zaměřte se na algoritmy realizovatelné na GPU.
2. Vytvořte implementaci zvoleného algoritmu(ů) pro GPU.
3. Vytvořte několik vhodných testovacích scén/modelů pro vyhodnocování vlastností studovaného algoritmu(ů).
4. Vyhodnoťte vlastnosti implementovaného algoritmu(ů) na GPU.
5. Zhodnoťte dosažené výsledky a navrhněte možnosti pokračování projektu; vytvořte video pro prezentování projektu.

Literatura:

- dle pokynů vedoucího

Při obhajobě semestrální části projektu je požadováno:

- Body 1 a 2.

Podrobné závazné pokyny pro vypracování diplomové práce naleznete na adrese

<http://www.fit.vutbr.cz/info/szz/>

Technická zpráva diplomové práce musí obsahovat formulaci cíle, charakteristiku současného stavu, teoretická a odborná východiska řešených problémů a specifikaci etap, které byly vyřešeny v rámci dřívějších projektů (30 až 40% celkového rozsahu technické zprávy).

Student odevzdá v jednom výtisku technickou zprávu a v elektronické podobě zdrojový text technické zprávy, úplnou programovou dokumentaci a zdrojové texty programů. Informace v elektronické podobě budou uloženy na standardním nepřepisovatelném paměťovém médiu (CD-R, DVD-R, apod.), které bude vloženo do písemné zprávy tak, aby nemohlo dojít k jeho ztrátě při běžné manipulaci.

Vedoucí: **Milet Tomáš, Ing., UPGM FIT VUT**

Datum zadání: 1. listopadu 2016

Datum odevzdání: 24. května 2017

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
Fakulta informačních technologií
Ústav počítačové grafiky a multimédií
602 00 Brno, Božetěchova 2



doc. Dr. Ing. Jan Černocký
vedoucí ústavu

Abstrakt

Práca sa zaoberá simuláciou kvapalín na GPU v reálnom čase a prezentuje teoretický fyzikálny základ, na ktorom sú tieto simulácie založené. Ďalej prezentuje možné pohľady na túto oblasť spolu s reprezentatívnymi metódami pre rôzne prístupy a využité technológie umožňujúce efektívnu simuláciu na GPU. Jej jadro potom tvorí popis návrhu a implementácie zvolenej metódy.

Abstract

This thesis deals with the topic of fluid simulation accelerated by GPU in real-time and presents theoretical basis in physics that governs these simulations. The various viewpoints on this area are presented as well, together with methods that are representative of their respective viewpoint. The technologies that enable effective simulations on GPU used in this thesis are presented next. Core of this work consists of design and implementation of chosen simulation method.

Klíčové slová

simulácia kvapalín, Navier-Stokes, GPGPU, OpenGL Compute Shadery, Euler, Lagrange, real-time, mriežková metóda

Keywords

fluid simulation, Navier-Stokes, GPGPU, OpenGL Compute Shaders, Euler, Lagrange, real-time, grid based method

Citácia

ELDES, Pavol. *Simulace kapalin*. Brno, 2017. Diplomová práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta informačních technologií. Vedoucí práce Milet Tomáš.

Simulace kapalin

Prehlásenie

Prehlasujem, že som túto diplomovú prácu vypracoval samostatne pod vedením pána Ing. Tomáša Mileta, a že som uviedol všetky literárne pramene a publikácie, z ktorých som čerpal.

.....

Pavol Eldes
24. mája 2017

Podakovanie

Rád by som sa poďakoval vedúcemu práce Ing. Tomášovi Miletovi za jeho vedenie a cenné rady počas tvorby tohto diela a mojim blízkym a priateľom za morálnu podporu.

Obsah

1	Úvod	2
2	Fyzikálna teória	3
2.1	Oblasti simulácie kvapalín	3
2.2	Navier-Stokes rovnice	5
3	Simulačné metódy	23
3.1	Klasické metódy	23
3.2	Netradičné metódy	24
4	Architektúra GPU	25
4.1	OpenGL Compute Shadery	25
5	Návrh	29
5.1	Exekučná slučka	29
5.2	Simulačný krok	30
5.3	Vykresľovanie	35
5.3.1	Vykresľovacia slučka	35
5.3.2	Jednoduchá vizualizácia	35
6	Záver	37
	Literatúra	38

Kapitola 1

Úvod

Kvapaliny sú neodmysliteľnou súčasťou nášho sveta. Nachádzajú sa všade okolo nás a prichádzame s nimi do kontaktu každý deň. Je pre nás preto dôležité vedieť ako s nimi pracovať. Túto úlohu si zobralo za svoju niekoľko oblastí a podoblastí fyziky, ktoré sa zameriavajú na rôzne aspekty tekutých látok. Rovnice popisujúce správanie prúdiacich tekutín existujú už od 18. storočia vďaka Sir Isaacovi Newtonovi, no sú to až Navier-Stokes rovnice z polovice 19. storočia, ktoré sú základom veľkej väčšiny moderných metód z tejto oblasti. Trvalo však až do éry digitálnych počítačov, kým mohol byť využitý ich potenciál.

V relatívne krátkej dobe sa vyvinulo niekoľko metód, ktoré posunuli simuláciu kvapalín z teoretickej roviny do praktického využitia, ktoré je skutočne rôznorodé. Spočiatku boli tieto metódy limitované iba na seriózne, zväčša priemyselné oblasti využitia, a spadali do off-line výpočtov. S príchodom *general purpose GPU* (v skratke GPGPU) sa však čoraz viac dostávajú aj do sféry real-time využitia a môžeme ich vidieť častejšie aj v interaktívnej forme.

To je práve oblasť, ktorou sa zaoberá táto práca. Jej text je logicky členený na kapitoly predstavujúce etapy, ktoré boli nutné na vytvorenie tejto práce tak, aby splnila stanovené ciele. Zasadenie tejto oblasti do širšieho kontextu a oboznámenie čitateľa s nevyhnutným teoretickým základom, na ktorom je simulácia kvapalín založená je možné nájsť v kapitole 2. Prehľad hlavných simulačných metód používaných v tejto oblasti sa nachádza v kapitole 3. Všeobecný popis architektúry GPU a nástrojov umožňujúcich prácu v tejto oblasti, so zameraním na tie, ktoré boli použité pri tvorbe tejto práce je možné nájsť v kapitole 4. Hlavnú časť práce, ktorú tvorí návrh zvolenej metódy simulujúcej dynamické vlastnosti kvapaliny v jednoduchej scéne je možné nájsť v kapitole 5. Posledná kapitola 6 obsahuje súhrnné zhodnotenie výsledkov práce a navrhuje kroky pre pokračovanie v diplomovej práci.

Kapitola 2

Fyzikálna teória

Obsahom tejto kapitoly je rozdelenie fyzikálnych oblastí zaoberajúcich sa simuláciou tekutín nachádzajúce sa v sekcii 2.1 a podrobný popis Navier-Stokes rovníc, ktoré tvoria teoretický základ pre celé odvetvie mechaniky tekutín, spolu s ich odvodením a rôznymi pohľadmi na ich aplikáciu, ktoré je možné nájsť v sekcii 2.2.

2.1 Oblasti simulácie kvapalín

Hoci technicky neexistuje 100% nestlačiteľná tekutina, podľa stlačiteľnosti sú známe dva základné druhy tekutín - stlačiteľné a nestlačiteľné. Stlačiteľnými tekutinami sú plyny, nestlačiteľnými kvapaliny [3, kapitola 1].

Kvapaliny sú teda špeciálnym prípadom tekutín, čo je skupina látok, ktorých spoločnou vlastnosťou je neschopnosť samostatne udržať svoj stály tvar. Podľa vzťahu medzi vnútorným trením a rýchlosťou toku delíme tekutiny na Newtonovské a Nenewtonovské [22]. Ich mechanickými vlastnosťami sa zaoberá oblasť fyziky nazývaná mechanika tekutín, ktorá je ďalej delená na statiku (pre kvapaliny hydrostatiku), zaoberajúcu sa pokojovými vlastnosťami tekutín, a dynamiku (pre kvapaliny hydrodynamiku), študujúcu ich prúdenie.

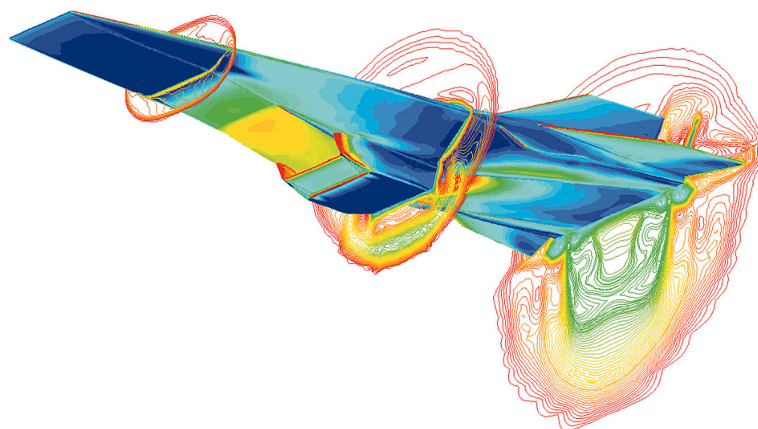
Hlavne dynamika tekutín je výskumne zaujímavou a aktívnou oblasťou, ktorá je však matematicky veľmi komplexná a preto využíva silu moderných výpočtových prostriedkov v kombinácii s metódami numerickej matematiky. Špeciálne touto problematikou sa zaoberá podoblasť nazývaná výpočtová dynamika tekutín.

Výpočtová dynamika tekutín (CFD)

Táto oblasť má veľký význam, pretože výsledky získané skúmanými metódami sú používané na zjednodušenie dizajnovania rôznych kritických systémov ako napríklad lietadiel [16]. Kvôli oblasti použitia týchto výsledkov však existujú veľké nároky na presnosť metód používaných na získanie takýchto dát, čo posúva metódy tejto oblasti striktne do sféry off-line spracovania. Často sú tieto simulácie prevádzané vo veľkom rozlíšení a s veľkou detailnosťou, pričom výkon, z pochopiteľných dôvodov, nezohráva takú úlohu ako kvalita vyprodukovaného výsledku.

Tieto metódy bežne využívajú silu rozsiahlych počítačových fariem, kde je možné v prípade numerických nestabilití alebo nespokojnosti s výsledkom upraviť parametre a znovu spustiť program. Takýto spôsob práce je umožnený vďaka predvídateľnosti off-line algoritmov [15, sekcia 1.1]. Bez ohľadu na spôsob, akým pracujú, alebo ako sú využívané metódy

v tomto odvetví, je jeho existencia z pohľadu simulácie tekutín nesporne dôležitá, pretože práve toto odvetvie bolo prvé, kde sa začali aktívne používať.



Obr. 2.1: Príklad použitia CFD - Simulácia správania stíhačky HyperX v Mach 7. Prevzaté z <[https://commons.wikimedia.org/wiki/File%3AX-43A_\(Hyper_-_X\)_Mach_7_computational_fluid_dynamic_\(CFD\).jpg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File%3AX-43A_(Hyper_-_X)_Mach_7_computational_fluid_dynamic_(CFD).jpg)>

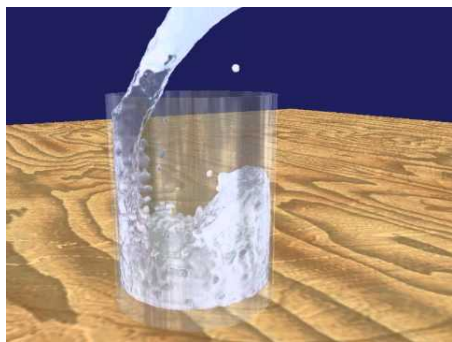
Simulácia tekutín

Odvetvie simulácie tekutín patrí do oblasti počítačovej grafiky a jeho metódy vychádzajú z CFD. Metódy na simulácie kvapalín sa začali dostávať do povedomia už v 2. polovici 90. rokov minulého storočia. Na rozdiel od oblasti výpočtovej dynamiky tekutín, striktná presnosť simulácie tekutiny nie je pre toto odvetvie nevyhnutnosťou, nakoľko v tejto oblasti je cieľom vytvoriť realisticky vyzerajúce simulácie. To umožňuje zanedbať niektoré nepohodlné detaily, ktorých riešenie neprináša významné zlepšenie výsledkov po porovnaní so zvýšenými nákladmi na výpočet [2, kapitola 1].

Keďže jadro problému sa vo väčšine metód stále opiera o rovnaké fyzikálne vzťahy, ktoré popisujú správanie tekutín v reálnom svete, nič v tejto oblasti nebráni vytvárať simulácie s rôznymi stupňami komplexnosti. Na jednej strane je teda možné naplno využiť metódy CFD pre účely vysoko realistických, off-line spracovaných vizuálnych efektov, používaných napríklad v Hollywoodských filmoch.

Odlišnosť voči CFD spočíva na strane druhej, kde sa vyskytujú metódy pre beh v reálnom čase. Aby spĺňali túto podmienku krok simulácie musí byť možné vykonať pri 30Hz za $\sim 33\text{ms}$, bez zvažovania ďalších výpočtov, ktoré sa musia zmestiť do tohto časového rozpočtu [4, kapitola 7]. Po nahliadnutí do oblasti noviniek z oblasti monitorov je možné nájsť aj modely s 240Hz snímkovou frekvenciou, čo tlačí krok simulácie do oblasti $\sim 4\text{ms}$. Požiadavky na rozlíšenie a vizuálnu kvalitu musia byť z tohto dôvodu značne upravené. Ďalším požiadavkom pre tieto metódy je stabilita, nakoľko pri požadovanej interaktivite nie je možné predvídať výsledok interakcie. Je teda zrejme, že hoci real-time metódy z tohto odvetvia je možné použiť aj off-line, opačné neplatí [1, sekcia 2.1].

Real-time metódy, rovnako ako aj ich off-line náprotivky, majú svoju špecifickú oblasť využitia. Pre tieto je to hlavne oblasť počítačových hier a virtuálnej reality.



(a) Real-time simulácia s použitím metódy SPH. Prevzaté z https://i.ytimg.com/vi/6CP5QvfuD_w/hqdefault.jpg



(b) Off-line simulácia vytvorená programom RealFlow. Prevzaté z <https://i.ytimg.com/vi/MAJiLrUdIdY/maxresdefault.jpg>

Obr. 2.2: Ukážky výsledkov metód simulácií tekutín.

2.2 Navier-Stokes rovnice

Teoretickým základom pre tieto simulácie sú veľmi presné Navier-Stokes rovnice, ktoré môžu byť zjednodušené na Eulerove rovnice pomocou zanedbania viskozity a tepelnej vodivosti. Základným rozdielom medzi jednoduššími Eulerovými a zložitejšími Navier-Stokes rovnicami je, že Navier-Stokes rovnice nie sú vo svojej podstate konzervačnými rovnicami, ale skôr disipatívnym systémom [23].

Rovnice Navier-Stokes popisujú pohyb tekutiny v čase. Hoci existuje ich zápis, ktorý je často používaný v oblasti simulácie tekutín, zriedkakedy je vysvetlený postup, odkiaľ tento známy zápis pochádza. Keďže jeho systém odvodenia môže čitateľovi ozrejmiť matematické pozadie za fyzikálnymi veličinami tlaku a viskozity, je tento postup uvedený v nasledujúcej časti.

Pri odvodzovaní týchto komplexných rovníc sú veľmi nápomocné postupy integračnej a diferenciálnej analýzy, ktoré umožňujú pomerne intuitívny náhľad do tejto oblasti fyziky.

Odvodenie rovníc

Hlavnými zdrojmi informácií prezentovaných v tejto časti sú séria video lekcií mechaniky tekutín [10] a práce [6, kapitola 2], [14] a [19, kapitola 5].

Tekutiny patria do širšej oblasti mechaniky kontinua, ktorá sa zaoberá štúdiom materiálov zložených zo spojitých regiónov hmoty. Ako názov tejto oblasti napovedá, pre účely analýzy systémov vyskytujúcich sa v mechanike tekutín sa využíva predpoklad *kontinua (spojitého systému)*, čo znamená, že vlastnosti tekutín sa menia v priestore spojitاً a hladko. Ďalšími teoretickými nástrojmi nevyhnutnými pre analýzu sú základné *konzervačné zákony (zákony zachovania)*, ktoré musia platiť v každej izolovanej sústave (uzavretom systéme).

Konzervačné zákony

Prvým z nich je Newtonov 2. pohybový zákon – zákon sily – z ktorého je možné priamo odvodiť Navier-Stokes rovnice. Ten hovorí, že časová zmena hybnosti je rovná výslednej pôsobiacej sile. Jeho matematický zápis je možné vidieť v rovnici 2.1.

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \quad (2.1)$$

Ďalším je zákon zachovania hmotnosti, ktorý hovorí, že hmota sa priebehom času ani nestratí ani nepribudne bez externého zásahu. Tento sa nachádza v rovnici 2.2.

$$\frac{dm}{dt} = 0 \quad (2.2)$$

Posledným potrebným je prvá termodynamická veta – špecializovaný zákon zachovania energie – ktorá hovorí, že výsledná vnútorná energia systému je rovná energii dodanej teplom a práci vykonanej na systéme, matematicky vyjadrené rovnicou 2.3. Dôležitým detailom tejto rovnice je znamienková konvencia - kladným je dodané teplo a práca vykonaná na systéme, nie vykonaná systémom.

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dQ}{dt} + \frac{dW}{dt} \quad (2.3)$$

Tieto základné veličiny je možné vyjadriť rôznym spôsobom. Vďaka uzavretosti systému je možné použiť vzťah medzi *extenzívnymi* veličinami N a *intenzívnymi* veličinami η . Tento je možné vidieť v rovnici 2.4.

$$N_{\text{systém}} = \int_{\text{hmota}(\text{systém})} \eta dm = \int_{V(\text{systém})} \eta \rho dV \quad (2.4)$$

Extenzívnymi a intenzívnymi veličinami sú práve tie, vychádzajúce z konzervačných zákonov. Ich extenzívne vyjadrenie predstavuje hodnotu veličiny naprieč celým systémom, ich intenzívne vyjadrenie hodnotu veličiny pre jednotku hmoty systému.

Ako bolo už vyššie zmienené, konzervačné zákony platia pre izolovanú sústavu. V mechanike tekutín sa však pracuje s pohybujúcou sa tekutinou, čo znamená, že je zložité pracovať v izolovanej sústave a naopak potrebné uvažovať o otvorenej sústave. Pre tento problém je nápomocná prvá technika analýzy tekutinového systému – *integrálna analýza (analýza kontrolného objemu)*. Tá umožňuje rýchly náhľad na základné črty riešeného systému pomocou vzťahu medzi systémom a kontrolným objemom. Konkrétne je v tomto kroku potrebné vyjadriť rýchlosť zmeny veličiny v systéme $\left. \frac{dN}{dt} \right|_{\text{systém}}$ pomocou časových variácií veličiny vo vzťahu ku kontrolnému objemu. To práve umožňuje *Reynoldsov transportný teorém* zobrazený v rovnici 2.5, ktorý je kôli stručnosti uvedený bez odvodu [10, lekcia 7].

$$\left. \frac{dN}{dt} \right|_{\text{systém}} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{cV} \eta \rho dV + \int_{cS} \eta \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} \quad (2.5)$$

Prvý integrál tohto teorému vyjadruje rýchlosť zmeny extenzívnej veličiny v kontrolnom objeme a druhý vyjadruje množstvo extenzívnej veličiny, ktorá opúšťa kontrolný objem cez jeho povrch. Dosadením ľubovoľnej veličiny do tohto teorému je potom možné získať jej konzervačnú rovnicu vzťahujúcu sa na kontrolný objem. Zákon zachovania hmotnosti pre kontrolný objem teda nadobúda tvar v rovnici 2.6 a zákon zachovania sily tvar v rovnici 2.7 [10, lekcia 8].

$$\left. \frac{dm}{dt} \right|_{\text{systém}} = 0 = \frac{\partial}{\partial t} \int_{cV} \rho dV + \int_{cS} \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} \quad (2.6)$$

$$\mathbf{F} = \left. \frac{d\mathbf{p}}{dt} \right|_{\text{system}} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{cV} \mathbf{v} \rho dV + \int_{cS} \mathbf{v} \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} \quad (2.7)$$

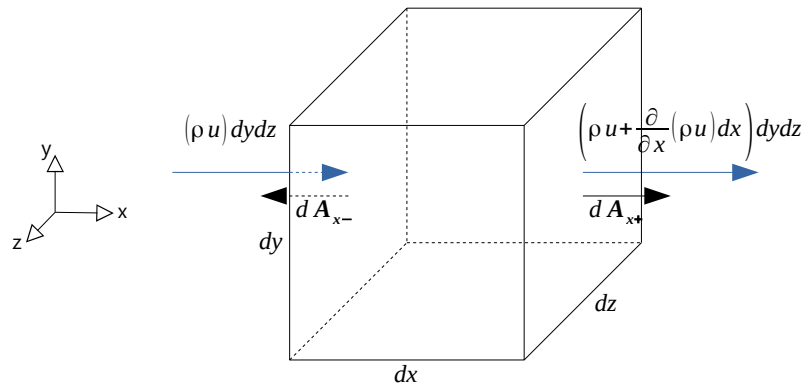
$$\mathbf{F}_{\text{system}} = \mathbf{F}_{cV} = \mathbf{F}_S + \mathbf{F}_B$$

$$\sum \mathbf{F} = \mathbf{F}_S + \mathbf{F}_B = \frac{\partial}{\partial t} \int_{cV} \mathbf{v} \rho dV + \int_{cS} \mathbf{v} \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A}$$

Keďže integrálna analýza je len vysokoúrovňová, je možné pomocou nej zistiť napríklad sily pôsobiace na systém, nie však napríklad kompletný profil poľa rýchlostí. Ten jej je zväčša daný a pomocou tejto analýzy sa len integruje [10, lekcia 12].

Nakoľko je potrebné získať detailnejšie informácie o veličinách vzťahujúcich sa ku tekutinám, je nutné použiť ďalšiu analyzáčnu techniku – diferenciálnu analýzu, ktorú je do istej úrovne možné chápať ako nadstavbu integrálnej analýzy. Aj pre túto je základnou skúmanou jednotkou istý objemový element, tu sa však jedná o nekonečne malý objemový región tekutiny, ďalej označovaný pojmom *elementárny objem tekutiny*, ktorý má dimenzie dx , dy , dz . Vzniknuté diferenciálne rovnice je veľmi náročné riešiť analyticky a preto sa na ich riešenie používajú numerické metódy. Kvôli zjednodušeniu sú ďalej prezentované odvodenia limitované do 3 dimenzií, pričom pri parciálnych deriváciách je explicitne vypísané iba riešenie pre x súradnicu a ďalšie analogické sú ponechané na čitateľa.

Opäť je nutné vyjadriť konzervačné rovnice jazykom tejto analýzy, čím v tomto prípade vzniknú potrebné diferenciálne rovnice pre zákony zachovania hmotnosti a sily. Na obrázku 2.3 je zobrazený elementárny objem tekutiny, nad ktorým sú vytvorené tieto konzervačné rovnice. Hodnota hmotnostného prietoku tekutiny vychádzajúceho z pravej steny (značenej $x+$) je lineárnou extrapoláciou hmotnostného toku vchádzajúceho do ľavej steny (značenej $x-$), pozdĺž vzdialenosti dx a kalkulácie sú obdobné pre y a z steny. Tieto hodnoty je rovnako možné chápať ako prvé dva členy Taylorovho rozvoja. Keďže tento koncept vytvárania hodnôt veličín na protiahlych stenách je využitý naprieč týmto textom niekoľkokrát, jeho vysvetlenie je vhodné zmieniť.



Obr. 2.3: Elementárny objem tekutiny s hmotnostným prietokom v smere x , ktorý cez neho prechádza.

Elementárny objem tekutiny je diferenciálnym elementom. Vďaka tomuto faktoru a známej dimenzionalite elementárneho objemu tekutiny, vzniká potrebný vzťah $dV = dxdydz$, pomocou ktorého je možné prepísať konzervačné zákony.

Diferenciálna rovnica zachovania hmotnosti je odvoditeľná v dvoch krokoch. Prvý term z jej vyjadrenia pre kontrolný objem 2.6 je možné jednoducho prepísať do tvaru v rovnici 2.8.

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{cV} \rho dV = \frac{\partial}{\partial t} (\rho) dxdydz \quad (2.8)$$

Druhý term tohto vyjadrenia je mierne zložitejší a pre jeho vyjadrenie je potrebné spočítať všetky hodnoty hmotnostného prietoku na jednotlivých stenách elementárneho objemu tekutiny. Dôležitým detailom tohto kroku je korektné použitie znamienok, ktoré vzniknú zo skalárneho súčinu. Výsledok je možné vidieť v rovnici 2.9.

$$\int_{cS} \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} = x\text{-steny} + y\text{-steny} + z\text{-steny} \quad (2.9)$$

$$\int_{cS} \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} = -(\rho u) dydz + \left(\rho u + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) dx \right) dydz + \dots$$

$$\int_{cS} \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} = \left(\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) \right) dxdydz$$

Opätovným spojením oboch termov a menšou úpravou vzniká diferenciálne vyjadrenie zákona zachovania hmotnosti, ktoré sa nachádza v rovnici 2.10.

$$0 = \frac{\partial}{\partial t}(\rho) dxdydz + \left(\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) \right) dxdydz \quad (2.10)$$

$$0 = \frac{\partial}{\partial t}(\rho) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w)$$

Tento zápis je možné ďalej zjednodušiť pomocou matematickej notácie, ktorá využíva operátor *del* ∇ . Výsledný upravený vzťah sa nachádza v rovnici 2.11.

$$0 = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} + \rho \frac{\partial v}{\partial y} + \rho \frac{\partial w}{\partial z} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} \quad (2.11)$$

$$0 = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \mathbf{v} \cdot \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial \rho}{\partial z} \right)$$

$$0 = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho(\nabla \cdot \mathbf{v}) + \mathbf{v} \cdot (\nabla \rho)$$

$$0 = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v})$$

Diferenciálny tvar zákona zachovania sily je možné vyjadriť obdobným spôsobom. V prvom kroku sa transformuje jeho zápis pre kontrolný objem z rovnice 2.7 do tvaru vzťahujúceho sa na elementárny objem tekutiny, čo je možné vidieť v 2.12.

$$d\mathbf{F}_B + d\mathbf{F}_S = \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{v}\rho)dxdydz + \int_{dS} \mathbf{v}\rho\mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} \quad (2.12)$$

Druhý term je opäť obdobne zložitejší na úpravu. Tú je možno vidieť v rovnici 2.13.

$$\int_{cS} \mathbf{v}\rho\mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} = x\text{-steny} + y\text{-steny} + z\text{-steny} \quad (2.13)$$

$$\int_{cS} \mathbf{v}\rho\mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} = -(\mathbf{v}\rho u)dydz + \left(\mathbf{v}\rho u + \frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{v}\rho u)dx \right) dydz + \dots$$

$$\int_{cS} \mathbf{v}\rho\mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} = \left(\frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{v}\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\mathbf{v}\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\mathbf{v}\rho w) \right) dxdydz$$

Po spojení termov vzniká rovnica 2.14, ktorú je ďalej potrebné upraviť.

$$d\mathbf{F}_B + d\mathbf{F}_S = \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{v}\rho)dxdydz + \left(\frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{v}\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\mathbf{v}\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\mathbf{v}\rho w) \right) dxdydz \quad (2.14)$$

$$d\mathbf{F}_B + d\mathbf{F}_S = \left(\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{v}\rho) + \frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{v}\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\mathbf{v}\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\mathbf{v}\rho w) \right) dxdydz$$

Pri úprave je opäť nápomocný del operátor ∇ . Výsledok po úpravách je v rovnici 2.15.

$$d\mathbf{F}_B + d\mathbf{F}_S = \left(\mathbf{v} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v}\rho \frac{\partial u}{\partial x} + \mathbf{v}u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho u \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + \right. \quad (2.15)$$

$$\left. \mathbf{v}\rho \frac{\partial v}{\partial y} + \mathbf{v}v \frac{\partial \rho}{\partial y} + \rho v \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} + \mathbf{v}\rho \frac{\partial w}{\partial z} + \mathbf{v}w \frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho w \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} \right) dxdydz$$

$$d\mathbf{F}_B + d\mathbf{F}_S = \left(\mathbf{v} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v}\rho \frac{\partial u}{\partial x} + \mathbf{v}\rho \frac{\partial v}{\partial y} + \mathbf{v}\rho \frac{\partial w}{\partial z} + \right.$$

$$\left. \mathbf{v}u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \mathbf{v}v \frac{\partial \rho}{\partial y} + \mathbf{v}w \frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho u \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + \rho v \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} + \rho w \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} \right) dxdydz$$

$$d\mathbf{F}_B + d\mathbf{F}_S = \left(\mathbf{v} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v}\rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + (\mathbf{v}u + \mathbf{v}v + \mathbf{v}w) \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial \rho}{\partial z} \right) + \right.$$

$$\left. \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\rho u + \rho v + \rho w) \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} \right) \right) dxdydz$$

$$d\mathbf{F}_B + d\mathbf{F}_S = \left(\mathbf{v} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \rho (\nabla \cdot \mathbf{v}) + (\mathbf{v}u + \mathbf{v}v + \mathbf{v}w) \nabla \rho + \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\rho u + \rho v + \rho w) \nabla \mathbf{v} \right) dx dy dz$$

$$d\mathbf{F}_B + d\mathbf{F}_S = \left(\mathbf{v} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \rho (\nabla \cdot \mathbf{v}) + \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \nabla \rho) + \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) dx dy dz$$

$$d\mathbf{F}_B + d\mathbf{F}_S = \left(\mathbf{v} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \right) + \rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) \right) dx dy dz$$

V tomto tvare je možné zbrať, že prvý term na pravej strane rovnice predstavuje zákon zachovania hmotnosti z rovnice 2.11, ktorý je rovný nule, čím celý tento term vypadáva. Zvyšok je možný skrátenie zapísať pomocou operátoru *materiálovej derivácie* $\frac{D}{Dt} \cdot \frac{D\eta}{Dt} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} + v \frac{\partial \eta}{\partial y} + w \frac{\partial \eta}{\partial z}$ čo je možné v skratke zapísať ako $\frac{D\eta}{Dt} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \eta$, kde η je veličina zapísaná pomocou tohto operátoru. Je vhodné poznamenať, že $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \neq (\nabla \cdot \mathbf{v})$, nakoľko je častokrát tento fakt zdrojom neporozumenia. Výsledný tvar diferenciálneho zápisu zákona zachovania sily je zobrazený v rovnici 2.16.

$$d\mathbf{F}_B + d\mathbf{F}_S = \left(\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} \right) dx dy dz \quad (2.16)$$

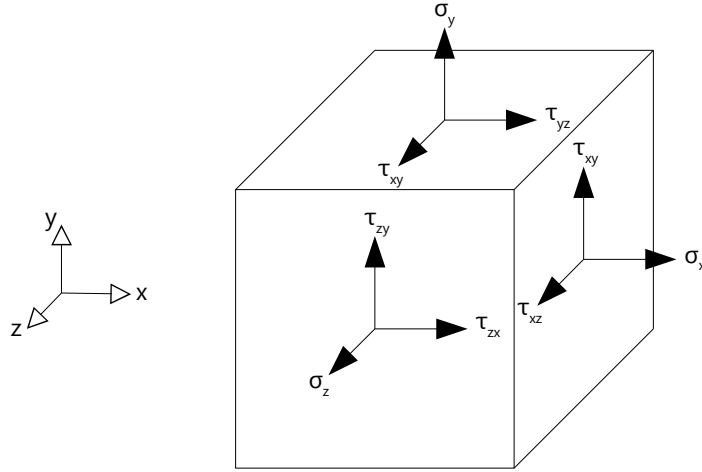
Pre ďalšie pochopenie správania tekutín je najprv nutné uvažovať o silách na ľavej strane rovnice 2.16 pôsobiach na elementárny objem tekutiny a čo tieto sily predstavujú. *Telesové (objemové) sily* \mathbf{F}_B ako názov napovedá pôsobia na celý elementárny objem tekutiny rovnako a teda nepredstavujú problém. Typickým zástupcom tejto kategórie je gravitácia. *Povrchové sily* \mathbf{F}_S pôsobia len lokálne a preto je práca s nimi problematickejšia. V jazyku mechaniky kontinua sú tieto sily nazývané *napätie* a *deformácia* a pochopenie ich účinkov je nevyhnutné na odvodenie vlastností ako pevných tak tekutých látok. Ako sa vzťahujú k fyzikálnemu správaniu tekutín je práve popísané v nasledujúcej podsekcii, ktorá je nápomocná pri ďalšom rozvíjaní pojmového aparátu používaného v tomto odvetví.

Napätie a deformácia

Napätie reprezentuje silu pôsobiacu na povrch elementárneho objemu tekutiny. Toto napätie na nekonečne malú objemovú jednotku je možné rozdeliť na napätia pôsobiace na každú stenu tejto elementárnej kocky. Pre všeobecnú stenu s normálou v podobe x -ovej osi (ďalej označovanú ako x -ová stena) existujú nasledovné 3 napätia, z rovníc 2.17:

$$\sigma_x = \lim_{\Delta A_x \rightarrow 0} \frac{\Delta F_x}{\Delta A_x} \quad \tau_{xy} = \lim_{\Delta A_x \rightarrow 0} \frac{\Delta F_y}{\Delta A_x} \quad \tau_{xz} = \lim_{\Delta A_x \rightarrow 0} \frac{\Delta F_z}{\Delta A_x} \quad (2.17)$$

Napätie reprezentuje silu v každom smere distribuovanú po povrchu príslušnej steny elementárneho objemu. *Normálové (kolmé) napätie* σ_x (niekedy označované aj τ_{xx}) je sila v smere normály steny a zvyšné dve sú *tangenciálne (dotyčnicové, šmykové) napätia* τ_{xy} a τ_{xz} . Tie pôsobia v dvoch smeroch ortogonálne ku normálovému napätiu s konvenciou, že prvý spodný index značí smer normály steny, na ktorú je vyvíjané napätie a druhý značí smer sily, ktorá vyvíja toto napätie.



Obr. 2.4: Orientácia každej zložky tenzoru napätia v 3D - normálové napätia, pre ktorých zápis je postačujúci jeden spodný index predstavujúci dimenziu, sú označené σ_{axis} , dotyčnicové, pre ktoré je potrebné použitie dvoch spodných indexov indikujúcich oba smery dotyčnicového napätia, sú označené $\tau_{\text{axis axis}}$.

Definícia tangenciálnych napätí pre zvyšné dva normálové smery je obdobná. Takto vznikne deväť skalárnych hodnôt, ktoré kompletne popisujú napätie ľubovoľného objemového elementu. Na obrázku 2.4 sú označené iba napätia pre steny $x+$, $y+$, $z+$. Napätia pre im ekvivalentné steny $x-$, $y-$, $z-$ by boli opäť definované v súlade s vyššie zmieňovaným konceptom lineárnej extrapolácie. Príklad pre x -ové steny je uvedený v rovniciach 2.18.

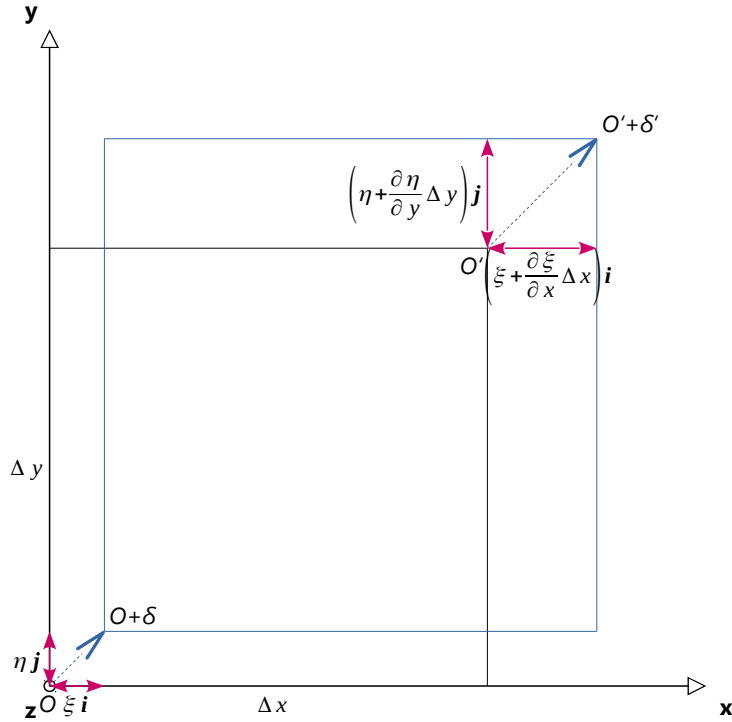
$$\begin{aligned} \sigma_{x-} &= \sigma_x & \tau_{x-y} &= \tau_{xy} & \tau_{x-z} &= \tau_{xz} \\ \sigma_{x+} &= \sigma_x - \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \Delta x & \tau_{x+y} &= \tau_{xy} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \Delta x & \tau_{x+z} &= \tau_{xz} - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} \Delta x \end{aligned} \quad (2.18)$$

Okrem napätí sa v elemente tekutiny vyskytujú aj deformácie. Tie sú použité na popis nekonečne malej zmeny elementárneho objemu tekutiny alebo pevnej látky z jej počiatočného tvaru a pozície. Deformácie sú špeciálne dôležité pre tekutiny, nakoľko deformácia elementárneho objemu tekutiny umožňuje uvažovať o zmene jeho objemu. Táto možná zmena objemu na oplátku umožňuje uvažovať o nestlačiteľnosti tekutiny a to ďalej o koncepte tlaku.

Deformácie vznikajú relatívnym pohybom medzi rôznymi časťami elementárneho objemu tekutiny. U elementárneho objemu tekutiny môže dôjsť ku 4 základným typom pohybu – translácii, rotácii, tangenciálnej deformácii a lineárnej deformácii. Keďže ani translácia ani rotácia nevedie k relatívnemu pohybu medzi rôznymi časťami tekutiny, tieto pohyby sú pre deformáciu bezpredmetné. Takisto aj pre deformácie existuje typové delenie na normálové a dotyčnicové. Prvé zmieňované sú spôsobené lineárnym deformačným pohybom, druhé tangenciálnym.

Uvažujúc elementárny objem tekutiny, ktorý prešiel miernou deformáciou, ako napríklad na obrázku 2.5, existuje vektor $\delta = \xi \mathbf{i} + \eta \mathbf{j} + \zeta \mathbf{k}$. Ten je definovaný takým spôsobom, že označením pozície ľavého spodného rohu uvažovaného elementárneho objemu ako O ,

má deformovaný bod pozíciu $O + \delta$. S použitím rovnakej lineárnej interpolácie ako pri konštrukcii napätí je možné definovať deformáciu pravého horného rohu O' ako $\delta' = (\xi + \frac{\partial \xi}{\partial x} \Delta x)\mathbf{i} + (\eta + \frac{\partial \eta}{\partial y} \Delta y)\mathbf{j} + (\zeta + \frac{\partial \zeta}{\partial z} \Delta z)\mathbf{k}$. Z toho je možné odvodiť zmenu veľkosti elementárneho objemu tekutiny v x dimenzii výpočtom limity rozdielu každého bodu, pre Δx približujúce sa nule ako je možné vidieť v rovniciach 2.19.



Obr. 2.5: Komponenty lineárnej časti deformačného tenzoru ilustrované kvôli lepšej zrozumiteľnosti v 2D - každý komponent reprezentuje deformáciu príslušnej steny v smere príslušnej osi.

$$\epsilon_x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\xi + \frac{\partial \xi}{\partial x} \Delta x) - (\xi)}{\Delta x} \quad (2.19)$$

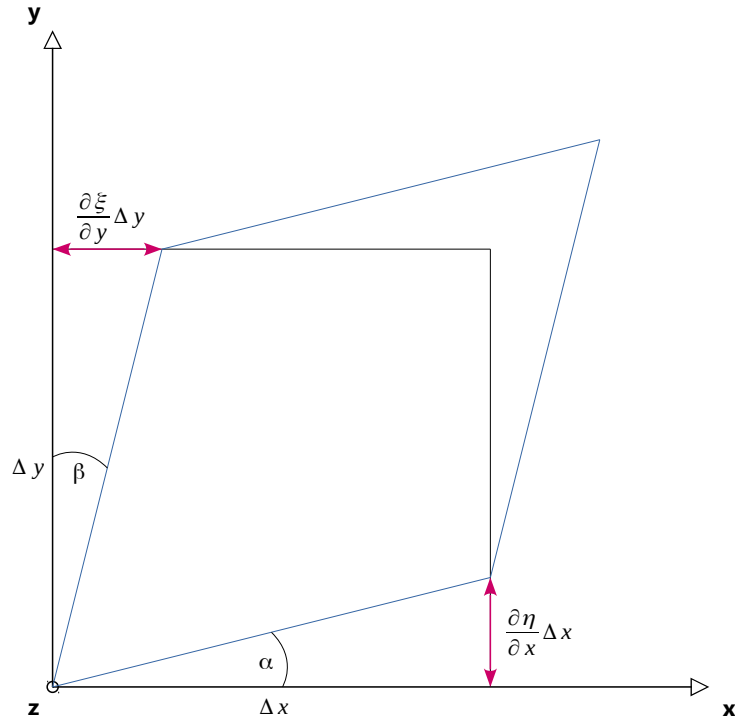
$$\epsilon_x = \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{\partial \xi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} \mathbf{k}$$

Takto je vypočítaná *normálová deformácia* $\boldsymbol{\epsilon}$, analogicky s normálovým napätím $\boldsymbol{\sigma}$. Deformácia v smere normály steny elementárneho objemu tekutiny teda produkuje natiahnutie alebo skrútenie.

Tangenciálne deformácie vytvárajú zmeny v elementárnom objeme tekutiny rovnakým spôsobom ako afinná maticová operácia zkosenia - iba ortogonálne komponenty steny sú deformované a paralelné línie sú zachované. To znamená, že jedna časť tekutiny zaznamenaná

väčšiu zmenu ako k nej priamo opačná časť, čo má za následok zmenu v uhle γ_{xy} , ktorý zvierajú strany skúmanej steny. Táto deformácia môže vo všeobecnosti nastať v smere každej osi plochy súčasne a teda celková deformácia tohto typu u skúmanej plochy, t.j. celková zmena uhlu γ_{xy} , je rovná súčtu deformácií vo všetkých smeroch, ktoré je možné označiť α a β . Na výpočet hodnoty deformácie v jednom smere je možné použiť pravidlo aproximácie malého uhla, čím je získaná výsledná hodnota ako podiel medzi rozdielom zmien vzájomne opačných strán tekutiny a ich vzdialenosťou. Toto je zachytené v rovnici 2.20 a ilustrované obrázkom 2.6. Z obrázku je tiež zrejmé, že $\gamma_{xy} = \gamma_{yx}$ nakoľko sa jedná len o súčet deformácií v jednotlivých smeroch v opačnom poradí.



Obr. 2.6: Tangenciálna deformácia jednej z plôch elementárneho objemu predstavujúca jeden komponent deformačného tenzoru. β označuje časť deformácie v smere osi x, α časť v smere osi y.

$$\gamma_{xy} = \alpha + \beta \quad (2.20)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\eta + \frac{\partial \eta}{\partial y} \Delta x - \eta}{\Delta x} + \frac{\xi + \frac{\partial \xi}{\partial x} \Delta y - \xi}{\Delta y}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial y}$$

Vzťahy pre zvyšné steny je možné vytvoriť analogicky. Výsledné vzťahy je možné vidieť v rovnici 2.21.

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial z} \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} \quad (2.21)$$

Jednotlivé deformácie popisované vyššie sú zlučiteľné pod spoločný pojem *tenzor elementárnych deformácií* (tenzor malých deformácií, Cauchyho tenzor deformácií) značený ε , ktorý má tvar podľa rovnice 2.22.

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \epsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \epsilon_z \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

Dôležitým detailom tohto vzťahu je fakt, že tangenciálne komponenty tenzoru sú polovica tangenciálnych deformácií odvodených vyššie, ktorých vyjadrenie je označované aj pojmom *inžinierske*. Intuitívne je možné tieto zápisy chápať nasledovne: po aplikácii napätia na časť elementárneho objemu tekutiny v nej vzniká vnútorné napätie, ktoré má za cieľ znovu nastoliť ekvilibrium, čím vznikne napätie rovnako veľké opačného smeru. Inžinierske vyjadrenie tangenciálnej deformácie vrámci jednej steny teda predstavuje súčet dvoch takýchto párov, pričom tangenciálne komponenty tenzoru len súčet dvoch napätí v danom smere.

Ďalšia dôležitá charakteristika je vzťah medzi napätím a deformáciou, ktorý vyjadruje aké sily a v konečnom dôsledku napätia, vznikajú pri deformácii objektu. Táto charakteristika predstavuje hlavné spojenie medzi tangenciálnymi a normálovými silami a je vnútornou vlastnosťou každého materiálu. V jednoduchých elastických pevných materiáloch má lineárny charakter, teda vratná sila je proporcionálna veľkosti deformácie a nazýva sa *modul pružnosti*. Analogickým predstaviteľom pre tekutiny je Newtonovská tekutina, spomínaná v úvode tejto kapitoly v sekcii 2.1. Pre Newtonovskú tekutinu je však napätie, ako bolo empiricky zistené, pomerné *rýchlosti zmeny deformácie* $\tau \propto \varepsilon$. Konštantou tejto proportionality je veličina analogická modulu pružnosti nazývaná *viskozita* a značená μ . Toto je jedným z fundamentálnych rozdielov medzi správaním pevných a tekutých látok.

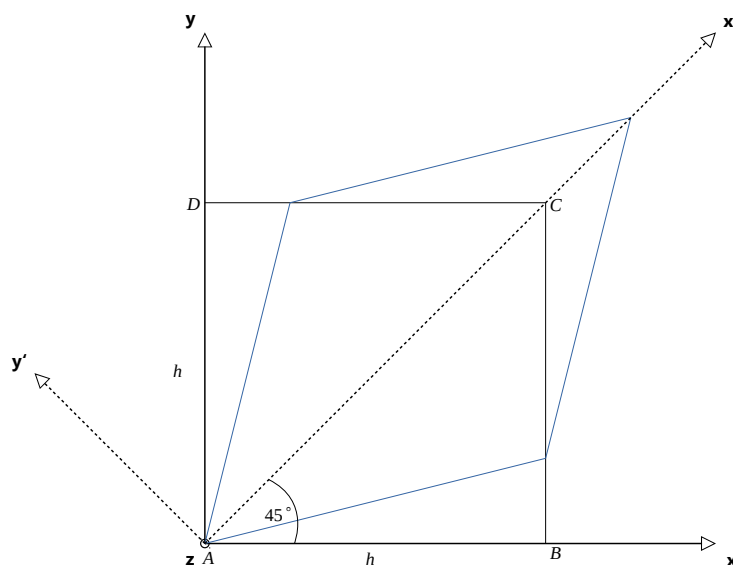
Skúmanie rýchlosti zmeny pozície δ s ohľadom na čas dá za výsledok momentálnu rýchlosť v elementárnom objeme tekutiny, čo je možné vidieť v rovnici 2.23.

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} = \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \mathbf{i} + \frac{\partial \eta}{\partial t} \mathbf{j} + \frac{\partial \zeta}{\partial t} \mathbf{k} \right) = (u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k}) = \mathbf{v} \quad (2.23)$$

S predpokladom, že viskozita μ je časovo nemenná, je možné pomocou vzťahu medzi napätím a deformáciou vytvoriť vzťah medzi tangenciálnym napätím a rýchlosťou tekutiny ako je možné vidieť v rovnici 2.24.

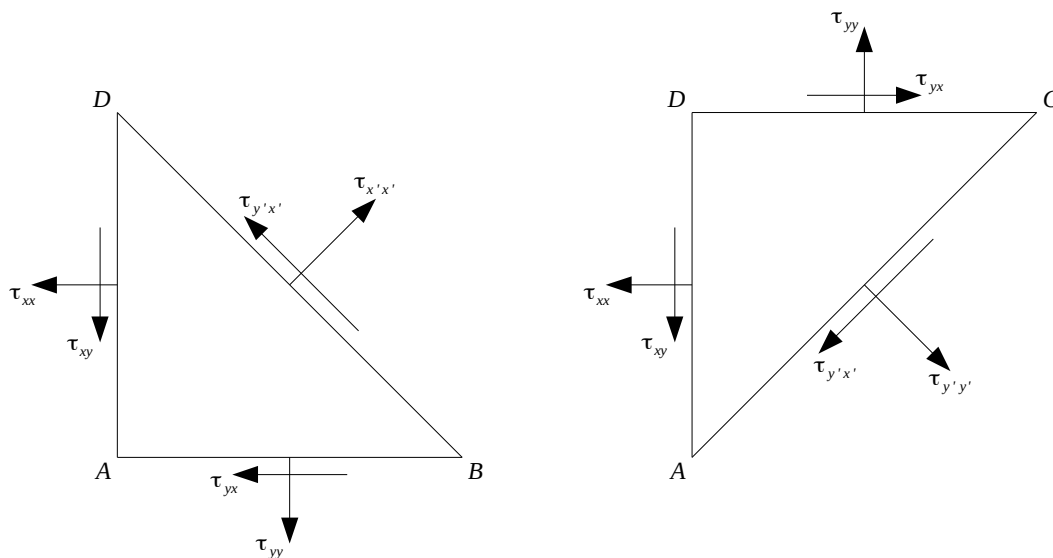
$$\tau_{xy} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\mu \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) \right) = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (2.24)$$

Obdobný vzťah pre normálové napätie je zložitejší na odvodenie. Trik k jeho odvodeniu spočíva vo vytvorení vzťahu medzi normálovým napätím a deformáciou a tangenciálnym napätím a deformáciou. Ako je znázornené na obrázku 2.7 tangenciálna deformácia elementárneho objemu tekutiny vrámci z-ovej steny produkuje lineárnu deformáciu jeho diagonál vo vhodne zvolenej súradnicovej sústave otočenej o 45° od pôvodnej súradnicovej sústavy z-ovej steny. Keďže nová súradnicová sústava je zvolená náhodne, vzťah medzi napätiami a deformáciami v tejto sústave musí byť všeobecne platný. Je teda potrebné nájsť vzájomný vzťah medzi napätiami diskutovaných súradnicových sústav ako aj medzi ich deformáciami [19, kapitola 5].



Obr. 2.7: Vzťah medzi normálovými a tangenciálnymi deformáciami. Pomocná súradnicová sústava je rotovaná o 45° .

Prvým krokom je zváženie síl pôsobiacich na dve trojuholníkové časti, ďalej označené ABD a ACD , ktoré vzniknú zo skúmanej steny a sú znázornené na obrázku 2.8. Nakoľko sa pracuje s elementárnym objemom tekutiny, pomer povrchu k objemu je zanedbateľný a je postačujúca rovnovážnosť síl vrámci trojuholníkového elementu. Táto rovnovážnosť v otočenej súradnicovej sústave, pre trojuholník ABD v smere x' a pre trojuholník ACD v smere y' , je vyjadrená vzťahom v rovnici 2.25.



Obr. 2.8: Napätia na trojuholníkové časti steny (x, y).

$$\tau'_{xx} = \frac{\tau_{xx} + \tau_{yy}}{2} + \tau_{xy} \quad \tau'_{yy} = \frac{\tau_{xx} + \tau_{yy}}{2} - \tau_{xy} \quad (2.25)$$

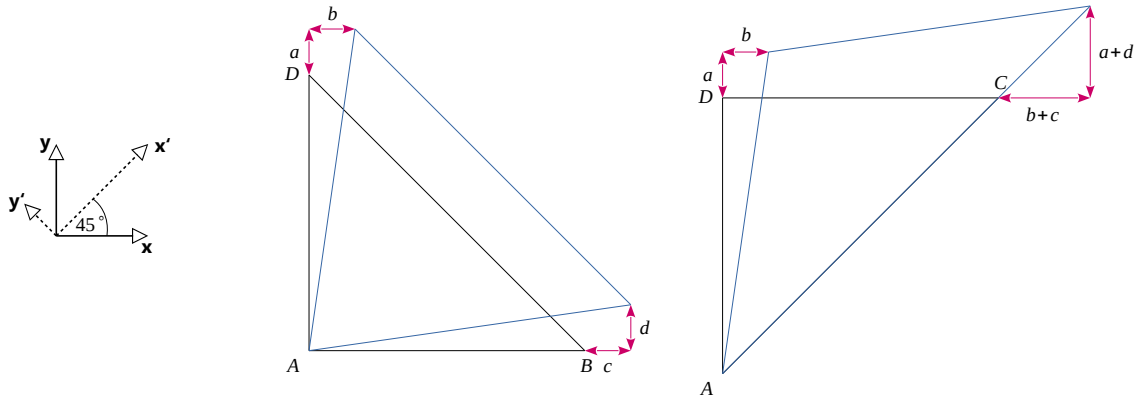
Ich sčítaním vzniká vzťah v rovnici 2.26, do ktorého je ďalej možné substituovať už vyjadrený vzťah medzi tangenciálnym napätím a deformáciou. Tým je vytvorený vzťah medzi diagonálnym napätím v súradnicovej sústave (x' , y') k tangenciálnej rýchlosti deformácie v sústave (x , y).

$$\tau'_{xx} - \tau'_{yy} = 2\tau_{xy} \quad (2.26)$$

$$\tau'_{xx} - \tau'_{yy} = 2\mu \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial t}$$

$$\tau'_{xx} - \tau'_{yy} = 2\mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

Ďalej je potrebné vytvoriť vzťah medzi tangenciálnou deformáciou v sústave (x , y) k deformáciám v súradnicovej sústave (x' , y'). Obrázok 2.9 zobrazuje deformovanie trojuholníkových častí ABD a ACD, kde sa deformované časti označené a , b , c , d vzťahujú ku lineárnym a tangenciálnym deformáciám v súradnicovej sústave (x , y) vzťahmi 2.27.



Obr. 2.9: Deformácie trojuholníkových častí steny (x , y).

$$\epsilon_x = \frac{c}{h} \quad \epsilon_y = \frac{a}{h} \quad \gamma_{xy} = \frac{b+d}{h} \quad (2.27)$$

Normálové deformácie v rotovanej súradnicovej sústave (x' , y') sú vypočítané ako zmena dĺžky diagonály AC v smere x' a diagonály BD v smere y' . Vďaka rovnoramennosti trojuholníkových častí a práci s nekonečne malými zmenami vznikajú vzťahy 2.28.

$$\epsilon_{x'} = \frac{d(AC)}{AC} = \frac{\frac{a+d}{\sqrt{2}} + \frac{b+c}{\sqrt{2}}}{h\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \left(\frac{c}{h} + \frac{a}{h} + \frac{b+d}{h} \right) = \frac{1}{2} (\epsilon_x + \epsilon_y + \gamma_{xy}) \quad (2.28)$$

$$\epsilon_{y'} = \frac{d(BD)}{BD} = \dots = \frac{1}{2} (\epsilon_x + \epsilon_y - \gamma_{xy})$$

Spojenie predošlých rovníc ukazuje, že rozdiel normálových deformácií v sústave (x', y') je rovný tangenciálnym deformáciám v sústave (x, y) , čo je možné vidieť v rovnici 2.29.

$$\epsilon_{x'} - \epsilon_{y'} = \gamma_{xy} \quad (2.29)$$

Použitím rýchlosti zmeny získaných deformácií a elimináciou referencií k súradnicovej sústave (x, y) pomocou rovnice 2.26 vzniká vzťah 2.30, ktorý je možné obdobne vyjadriť aj pre zvyšné steny (y', z') a (z', x') .

$$\tau_{x'x'} - \tau_{y'y'} = 2\mu \left(\frac{\partial \epsilon_{x'}}{\partial t} - \frac{\partial \epsilon_{y'}}{\partial t} \right) \quad (2.30)$$

$$\tau_{x'x'} - \tau_{y'y'} = 2\mu \left(\frac{\partial u_{x'}}{\partial x'} - \frac{\partial v_{y'}}{\partial y'} \right)$$

Spojením tohto vzťahu pre dve zo stien, ktoré obsahujú osu x , vzniká rovnica 2.31, ktorá predstavuje finálny vzťah medzi normálovým napätím a rýchlosťou tekutiny. To je možné vďaka vyššie zmieňovanému faktu, že nasledovný vzťah musí byť platný pre ľubovoľný súradnicový systém, nakoľko pomocný súradnicový systém používaný pri odvodzovaní bol zvolený náhodne.

$$\tau_{x'x'} - \tau_{y'y'} + \tau_{x'x'} - \tau_{z'z'} = 2\mu \left(\frac{\partial u_{x'}}{\partial x'} - \frac{\partial v_{y'}}{\partial y'} \right) + 2\mu \left(\frac{\partial u_{x'}}{\partial x'} - \frac{\partial w_{z'}}{\partial z'} \right) \quad (2.31)$$

$$2\tau_{x'x'} - \tau_{y'y'} - \tau_{z'z'} = 2\mu \left(2\frac{\partial u_{x'}}{\partial x'} - \frac{\partial v_{y'}}{\partial y'} - \frac{\partial w_{z'}}{\partial z'} \right)$$

$$3\tau_{x'x'} - \tau_{x'x'} - \tau_{y'y'} - \tau_{z'z'} = 3 \cdot 2\mu \frac{\partial u_{x'}}{\partial x'} + 2\mu \left(-\frac{\partial u_{x'}}{\partial x'} - \frac{\partial v_{y'}}{\partial y'} - \frac{\partial w_{z'}}{\partial z'} \right)$$

$$3\tau_{x'x'} = \tau_{x'x'} + \tau_{y'y'} + \tau_{z'z'} + 3 \cdot 2\mu \frac{\partial u_{x'}}{\partial x'} - 2\mu \left(\frac{\partial u_{x'}}{\partial x'} + \frac{\partial v_{y'}}{\partial y'} + \frac{\partial w_{z'}}{\partial z'} \right)$$

$$\tau_{x'x'} = \frac{\tau_{x'x'} + \tau_{y'y'} + \tau_{z'z'}}{3} + 2\mu \frac{\partial u_{x'}}{\partial x'} - \frac{2}{3}\mu (\nabla \cdot \mathbf{v}')$$

$$\sigma_x = \tau_{xx} = -p_m + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu \nabla \cdot \mathbf{v}$$

Veličina p_m , ktorá sa vyskytuje vo vzťahu 2.31 je tzv. *mechanický tlak* a predstavuje zjednodušené vyjadrenie tlaku, ktoré je bežnou konvenciou v oblasti mechaniky tekutín. Táto veličina spája dokopy *termodynamický tlak* p_t a príspevok, ktorý vzniká rýchlosťou zmeny deformácie pri roztahovaní, čo je možné vidieť v rovnici 2.32. Dôvodom pre toto zjednodušenie je fakt, že pri nestlačiteľných tekutinách je zmieňovaný príspevok takmer nulový a teda zanedbateľný a u stlačiteľných tekutín dosahuje nezanedbateľnú hodnotu iba v špecifických prípadoch, kedy dochádza k rapídne roztiahnutiu tekutiny ako napríklad pri

rázových vlnách alebo explózií [14]. Parameter λ , ktorý sa tiež vyskytuje v tomto vzťahu, je nazývaný *druhý (objemový) koeficient viskozity* a je z väčšej časti experimentálne získaným koeficientom proporcionality lineárneho vzťahu medzi príspevkom rýchlosti zmeny deformácie a mechanickým tlakom [19, kapitola 5].

$$\frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} = -p_m = -p_t + \lambda(\nabla \cdot \mathbf{v}) \quad (2.32)$$

Využitím tenzorovej notácie je možné vyjadriť spojenie medzi napätiami a deformáciami jedným vzťahom 2.33. Člen δ_{ij} je tzv. *Kroneckerova delta*, čo je binárna funkcia s hodnotou 0 ak $i \neq j$ a 1 ak $i = j$. Z tohto vzťahu je taktiež zrejmé, že vonkajšie povrchové sily majú za následok zmeny v tlaku a rýchlosti.

$$\sigma_{ij} = - \left(p + \frac{2}{3} \mu (\nabla \cdot \mathbf{v}) \right) \delta_{ij} + 2\mu(\varepsilon_{ij}) \quad (2.33)$$

Spojenie vzťahov

V tejto podsekcii je ukázané ako kombináciou výsledných rovníc predošlých častí 2.16 a 2.33 vzniká známy Navier-Stokes vzťah používaný v oblasti simulácie tekutín.

Prvým krokom je vyjadrenie síl pôsobiacich na elementárny objem tekutiny v smere jednotlivých osí. Telesové sily pôsobiace v smere osi x sú jednoducho vyjadriteľné vzťahom 2.34. V praxi sa spravidla len veľmi zriedkavo vyskytujú iné sily tohto typu než gravitácia.

$$dF_{B_x} = dma_x = \rho dV a_x = \rho a_x dx dy dz \quad (2.34)$$

Povrchové sily elementárneho objemu tekutiny v smere osi x sú vyjadrené vzťahom 2.35.

$$dF_{S_x} = x\text{-steny} + y\text{-steny} + z\text{-steny} \quad (2.35)$$

$$dF_{S_x} = -\sigma_{xx} dy dz + \left(\sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx \right) dy dz + \dots$$

$$dF_{S_x} = \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx \right) dy dz + \left(\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} dy \right) dx dz + \left(\frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} dz \right) dx dy$$

$$dF_{S_x} = \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} \right) dx dy dz$$

V ďalšom kroku nasleduje spojenie jednotlivých týchto častí do spoločnej rovnice. Je zrejmé, že objemový element, je možné odstrániť z tohto vzťahu a ďalej je potrebné substituovať hodnoty napätí vyjadrené pomocou tlaku a rýchlosti, čím vzniká rovnica 2.36.

$$dF_{B_x} + dF_{S_x} = \left(\rho \frac{Du}{Dt} \right) dx dy dz \quad (2.36)$$

$$\rho a_x dx dy dz + \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} \right) dx dy dz = \left(\rho \frac{Du}{Dt} \right) dx dy dz$$

$$\left(\rho a_x + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} \right) dx dy dz = \left(\rho \frac{Du}{Dt} \right) dx dy dz$$

$$\begin{aligned} & \rho a_x + \frac{\partial}{\partial x} \left(-p - \frac{2}{3} \mu \frac{\partial}{\partial x} (\nabla \cdot \mathbf{v}) + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \\ & \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right) = \rho \frac{Du}{Dt} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \rho a_x - \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{2}{3} \mu \frac{\partial}{\partial x} (\nabla \cdot \mathbf{v}) + \\ & \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial x} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial y} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial z} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} = \rho \frac{Du}{Dt} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \rho a_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \\ & \frac{2}{3} \mu \frac{\partial}{\partial x} (\nabla \cdot \mathbf{v}) + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial x} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} = \rho \frac{Du}{Dt} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \rho a_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) - \\ & \frac{2}{3} \mu \frac{\partial}{\partial x} (\nabla \cdot \mathbf{v}) + \mu \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \mu \frac{\partial v}{\partial y} + \mu \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \rho \frac{Du}{Dt} \end{aligned}$$

$$\rho a_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \nabla^2 u - \frac{2}{3} \mu \frac{\partial}{\partial x} (\nabla \cdot \mathbf{v}) + \mu \frac{\partial}{\partial x} (\nabla \cdot \mathbf{v}) = \rho \frac{Du}{Dt}$$

$$\rho a_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \nabla^2 u + \frac{\mu}{3} \frac{\partial}{\partial x} (\nabla \cdot \mathbf{v}) = \rho \frac{Du}{Dt}$$

Obdobne je možné vyjadriť vzťahy pre zvyšné súradnicové smery. Spojením týchto rovníc pre všetky súradnicové smery a ich prevedením do vektorového tvaru vzniká *Navier-Stokes rovnica pre stlačiteľnú tekutinu* 2.37.

$$\rho \mathbf{a} - \nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} + \frac{\mu}{3} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) = \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} \quad (2.37)$$

$$\rho \mathbf{a} - \nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} + \frac{\mu}{3} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) = \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$$

S použitím predpokladu nestlačiteľnosti, t.j. $(\nabla \cdot \mathbf{v}) = 0$, vzniká *Navier-Stokes rovnica pre nestlačiteľnú tekutinu* 2.38.

$$\rho \mathbf{a} - \nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} = \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \quad (2.38)$$

Podelením hustotou ρ , preskupením členov rovnice a vykonaním substitúcie $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ vzniká všeobecne známy zápis 2.39, ktorý je možné nájsť v literatúre zaoberajúcej sa simuláciou tekutín, či už v oblasti CFD alebo počítačovej grafike. Symbol ν značí *kinematickú viskozitu*, čo je *dynamická viskozita* μ podelená hustotou ρ .

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \mathbf{a} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \quad (2.39)$$

Význam členov rovnice

Výsledné Navier-Stokes rovnice je možné vysvetliť po jednotlivých členoch, ktoré sú separovateľné a samostatne vypočítateľné [15, sekcia 10.1]. Toto rozdelenie je zobrazené v rovnici 2.40.

$$\underbrace{\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right)}_{\text{advekcia}} + \underbrace{\frac{\nabla p}{\rho}}_{\text{tlak}} = \underbrace{\nu \nabla^2 \mathbf{v}}_{\text{viskozita}} + \underbrace{\mathbf{a}}_{\text{sily}} \quad (2.40)$$

- **advekcia** - zodpovedná za posun vlastností v poli rýchlostí. Posúva aj rýchlosť samotnú, teda samú seba, čo je nazývané *konvekcia*. Je najkomplikovanejšou časťou týchto rovníc a zdrojom nelinearity. Intuitívne predstavuje spôsob posunu simulácie z jedného kroku do druhého počas jej behu.
- **tlak** - zodpovedá za pohyb tekutiny v smere gradientu a intuitívne je zodpovedný za to, že tekutina sa pohybuje z miest vysokého tlaku, do miest nízkeho tlaku.
- **viskozita** - udáva ako rýchlo tekutiny reagujú na podnety a ako rýchlo sa ustália. V praxi je zodpovedná za difúziu hodnôt, čo je možné chápať aj ako aplikáciu vyhladzovacieho filtru. Pre tekutiny s nízkou viskozitou, ako napríklad kvapaliny, je často vynechaná, čo robí z Navier-Stokes rovnice rovnicu Eulerovu.
- **sily** - tento člen predstavuje externé sily, ako napríklad gravitácia, pôsobiace na tekutiny.
- **nestlačiteľnosť** - hoci technicky nie člen, ale podmienka $(\nabla \cdot \mathbf{v}) = 0$, zodpovedá za zachovanie hmoty počas advekcie vlastností polom rýchlostí.

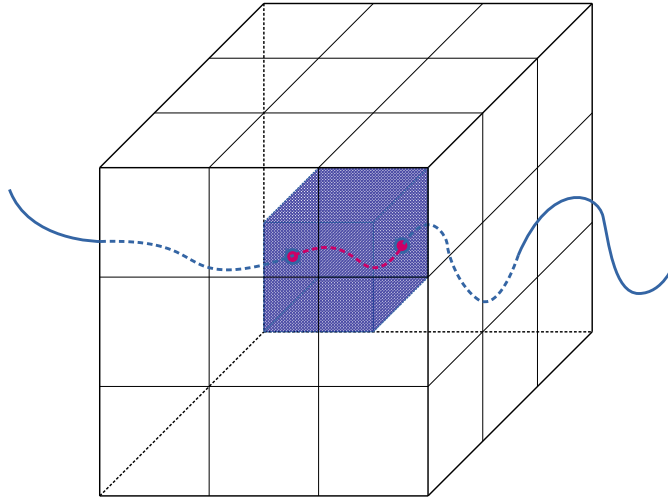
Pre každý z týchto členov existujú rôzne spôsoby výpočtu, ktoré musia spĺňať podmienky špecifické pre daný problém. Náročnosť výpočtu a s tým spojené výpočtové požiadavky sa taktiež líšia pre každý člen. Jednotlivé časti - pridanie síl, advekcia polom rýchlostí a výpočet tlaku predstavujú jeden simulačný krok, ktorý je opakovaný v čase po celý beh simulácie.

Pohľady na Navier-Stokes rovnice

Na tieto fundamentálne rovnice existujú dva základné pohľady na diskretizáciu podľa toku tekutiny - Eulerovský a Lagrangovský. Oba tieto prístupy budú vo všeobecnosti popísané v ďalších podsekciiach.

Eulerovský pohľad

Eulerovský pohľad prezentovaný na obrázku 2.10, funguje na základe delenia priestoru na fixne umiestnené diskkrétne oblasti. V týchto pevných oblastiach je sledovaný prílív a odliv tekutiny v priebehu času a teda zmeny vlastností tekutiny ako rýchlosť, hustota, teplota a podobne [4, sekcia 1.3]. Zvolený elementárny bod \mathbf{x}_i v tomto prípade nepodlieha advekcii, ale má fixnú pozíciu v priestore, ktorá je častokrát zarovnaná do mriežky.



Obr. 2.10: Eulerovský pohľad - sledujú sa časové zmeny vlastností vo fixnej oblasti.

Vyššie definovaná rovnica Navier-Stokes je v každom pohľade používaná v rovnakom tvare, jej zápis je však vhodne upravený pre konkrétny pohľad. Zmena je badateľná hlavne u materiálovej derivácie, ktorá musí byť v Eulerovskom pohľade vyjadrená pre pevnú pozíciu v priestore. Materiálová derivácia rýchlosti je teda pre tento prípad $\frac{D\mathbf{v}_i}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial t} + (\mathbf{v}_i \cdot \nabla)\mathbf{v}_i$.

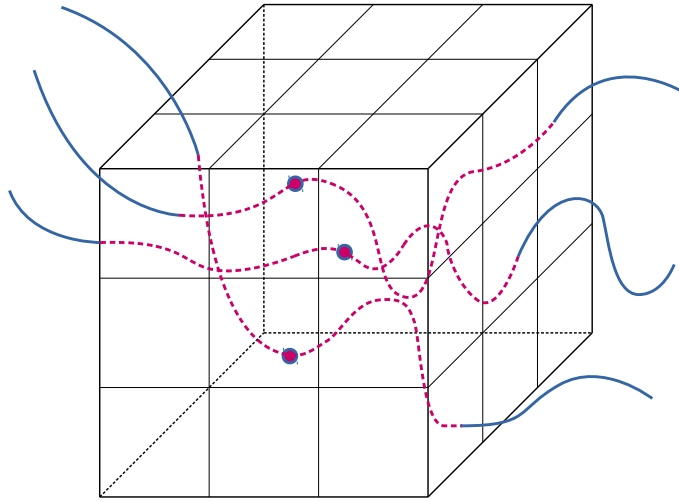
Pre *pevné elementárne body* \mathbf{x}_i v Eulerovom pohľade je teda používaný zápis Navier-Stokes rovnice v tvare 2.41. Ten vyjadruje časovú rýchlosť zmeny rýchlosti \mathbf{v}_i pre fixnú pozíciu \mathbf{x}_i [11, príloha A].

$$\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_i} \nabla p_i + \nu \nabla^2 \mathbf{v}_i + \mathbf{a}_i - (\mathbf{v}_i \cdot \nabla) \mathbf{v}_i \quad (2.41)$$

Výhody a nevýhody tohto pohľadu sa vzťahujú na fixnú mriežku. Výhoda, ktorá z nej plynie, je fixné okolie pre každý krok simulácie, nevýhodou je naopak fakt, že tekutina existuje len v rámci tejto mriežky a preto je zložitejšia adaptácia v prípade potreby rozšíriť mriežku (napr.: rozbitie kontajneru, v ktorom sa tekutina nachádza) [12, sekcia 2.2].

Lagrangovský pohľad

Pri Lagrangovskom pohľade, ktorý je znázornený na obrázku 2.11, je tekutina z teoretického hľadiska rozdelená na nekonečne mnoho bodov [13, sekcia 3.1]. Pozorovateľ sa stavia do pozície častice tekutiny, ktorá sa pohybuje v čase a priestore pod vplyvom poľa rýchlostí. To znamená, že zvolený elementárny bod \mathbf{x}_i podlieha advekcií lokálnou časťou poľa rýchlostí tekutiny \mathbf{v}_i : $\frac{d\mathbf{x}_i}{dt} = \mathbf{v}_i$.



Obr. 2.11: Lagrangovský pohľad - sledovaná je konkrétna častica, ktorej vlastnosti sa menia počas pohybu v čase a priestore.

Rovnica Navier-Stokes je aj v tomto pohľade používaná v rovnakom tvare. Materiálová derivácia sa však v tomto pohľade pretaví do vzťahu $\frac{D\mathbf{v}_i}{Dt} = \frac{d\mathbf{v}_i}{dt}$, čo korešponduje s rýchlosťou zmeny rýchlosti zvoleného bodu, t.j. častice podliehajúcej advekcií vlastným rýchlostným poľom. Je nutné podotknúť, že $\frac{D\mathbf{v}_i}{Dt} = \frac{d\mathbf{v}_i}{dt}$ je platné len v kombinácii s $\frac{d\mathbf{x}_i}{dt} = \mathbf{v}_i$.

Rovnica Navier-Stokes je teda používaná vo forme pre *Lagrangovské elementárne body* \mathbf{x}_i *podliehajúce advekcií vlastným poľom*, čo je s použitím $\frac{d\mathbf{x}_i}{dt} = \mathbf{v}_i$ zapísateľné rovnicou 2.42, ktorá vyjadruje *rýchlosť zmeny rýchlosti v čase pre pohybujúci sa elementárny bod t.j. časticu* \mathbf{x}_i [11, príloha A].

$$\frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = -\frac{1}{\rho_i} \nabla p_i + \nu \nabla^2 \mathbf{v}_i + \mathbf{a}_i \quad (2.42)$$

Výhodou tohto pohľadu je intuitívnosť a jednoduchosť programovania, existuje tu však nutnosť zisťovať okolie každého elementu v každom kroku simulácie, čo vyžaduje ďalšie výpočtové prostriedky.

Kapitola 3

Simulačné metódy

V tejto kapitole je prezentované rozdelenie metód vyskytujúcich sa v oblasti simulácie tekutín. Okrem klasických metód prezentovaných v sekcii 3.1 je tu možné nájsť aj prehľad menej častých metód, ktoré sa odlišujú od štandardných už na teoretickej úrovni, v sekcii 3.2.

3.1 Klasické metódy

Za približne 20 rokov existencie oblasti simulácie tekutín vzniklo množstvo nových metód, založených na, v predošlej kapitole zmieňovaných, Eulerovských a Lagrangovských pohľadoch. Obe tieto skupiny fungujú na báze diskretizácie tekutiny, no každá k tomuto problému pristupuje odlišne. Historicky jeden z najväčších prínosov v tejto oblasti mala skupina T3 z Los Alamos National Laboratory pod vedením Jamesa Harlowa. Spolu s jeho tímom vyvinuli množstvo metód pre CFD, ktoré v dnešnej dobe považujeme za základ oblasti simulácie tekutín [16].

Mriežkové metódy

Tieto metódy tvoria najstaršiu a najlepšie preštudovanú skupinu metód v tejto oblasti. Skupina je založená na Eulerovskom pohľade na Navier-Stokes rovnice a ako taká predstavuje metódy, ktoré diskretizujú tekutinu pomocou fixnej mriežky.

Túto skupinu je možné deliť na ďalšie kategórie podľa niekoľkých kritérií. Hlavnú formu delenia môže predstavovať separácia na 2.5D a 3D metódy. Ďalším kritériom je typ bunky, ktorá môže byť *usporiadaná* alebo *odsadená* [6, sekcia 3.1], čo je určené podľa umiestnenia vlastností tekutiny vrámci tejto bunky. Ďalej to je typ použitej mriežky, kde sa nejedná o tvar jednotlivých buniek, ale o ich *uniformnosť* alebo *adaptívnosť* veľkosti. Tieto mriežky môžu mať v niektorých metódach viacero úrovní, čo zrýchľuje konvergenciu výpočtov [18, kapitola 3].

Hlavnou nevýhodou týchto metód sú pamäťové nároky na častokrát zväčša prázdnu mriežku. Medzi ďalšie patrí limitácia simulácie na priestor tejto mriežky, ktorú je nutné zväčšiť, ak je potrebné simulovať rozbitie kontajnera s tekutinou, zložitejšie zobrazenie malých detailov a nutnosť explicitne si uchovávať informáciu o bunkách na povrchu tekutiny pre potreby vykresľovania. Medzi výhody naopak patrí dobrá paralelizácia, vyššia výpočtová presnosť [3, kapitola 2] a fixné okolie jednotlivých buniek pre každý krok simulácie.

Časticové metódy

Táto skupina metód využíva Lagrangovský pohľad na Navier-Stokes rovnice. Spôsob diskretizácie tekutiny je teda vykonaný jej rozdelením na množstvo diskrétnych zhlukov, ktoré definujú objem tekutiny. Každý zhluk si v sebe nesie informácie o jednotlivých vlastnostiach tekutiny a tieto zhluky sa pohybujú v priestore [12, kapitola 4].

Ich nevýhodou je nižšia výpočtová presnosť a problematické sledovanie hladkých hladín tekutín [3]. Medzi výhody takýchto metód naopak patrí jednoduchosť reprezentácie malých množstiev tekutiny [4, sekcia 7.1], intuitívna predstava a nižšia pamäťová náročnosť.

3.2 Netradičné metódy

Spoločnou vlastnosťou týchto metód je fakt, že sa nezakladajú na Navier-Stokes rovniciach, ale snažia sa o vizuálne vierohodnú simuláciu tekutín. Každá z nich volí iný postup na dosiahnutie tohto cieľa, čo znamená, že metódy v tejto kategórii nemajú veľa spoločného.

Pozičné metódy

Táto skupina metód bola pôvodne vyvinutá na simuláciu pevných látok. Neskôr však bolo ukázané, že pozične založené koncepty, môžu byť použité aj na simuláciu tekutín. Tieto metódy, na rozdiel od klasických fyzikálne založených metód, pracujú tak, že počítajú priamo pozície na základe riešenia kvázistatického problému. Sú veľmi vhodné na interaktívne použitie vďaka ich kontrolovateľnosti a stabilite aj pri použití jednoduchých a rýchlych integračných schém. Vďaka ich jednoduchosti, robustnosti a rýchlosti sú veľmi populárne v počítačovej grafike a hernom priemysle [2, kapitola 1].

Kapitola 4

Architektúra GPU

Simulácie tekutín stále patria medzi výpočtovo náročnejšie úlohy. Preto odhliadnuc od uhla pohľadu, či v teoretickej rovine zvolenej metódy, ak požadujeme simuláciu bežiacu v reálnom čase, musí byť počítaná veľmi rýchlo. Na to sú vhodné moderné grafické karty, ktoré oproti klasickým CPU umožňujú masívnu paralelizáciu s použitím nástrojov na GPGPU, čím teda takéto úlohy typovo patria do SIMD skupiny Flynnovej taxonómie. Hoci prieborníkom v tejto oblasti bola spoločnosť Nvidia, ktorá ako prvá priniesla svoju ucelenú GPGPU platformu CUDA [1, sekcia 1.1], v priebehu rokov vzniklo niekoľko podobných štandardov ako napríklad OpenCL, DirectCompute a tiež OpenGL Compute Shadery, využívané v tejto práci. Aj keď programovanie na GPU môže priniesť niekoľkonásobné zrýchlenie, vhodná paralelizácia metód je netriviálnym problémom riadeným pravidlami, ktorých (ne)dodržanie môže veľmi významne ovplyvniť výsledný výkonnostný zisk. V tejto časti sa preto nachádza všeobecný popis architektúr súčasných GPU spolu so základnými problémami, ktoré sa vyskytujú pri programovaní na GPU.

4.1 OpenGL Compute Shadery

Compute shadery sú pomerne novou technológiou tejto oblasti GPGPU nástrojov. Do jadra OpenGL boli pridané vo verzii 4.3, pričom ako rozšírenie boli dostupné už vo verzii 4.2. Ako také stoja mimo klasického stavového stroja OpenGL zaoberajúceho sa zobrazovaním. Hoci je pre compute shader vyžadovaný samostatný program, v mnohých aspektoch je takýto *compute program* totožný s tradičným OpenGL programom – má prístup k rovnakým zdrojom (uniformy, textúry, obrázky, atomické počítadlá a pod.), obdobné stavy a ďalšie podobné vlastnosti. V čom sa líši je fakt, že neobsahuje nijaké preddefinované vstupy a výstupy podobné iným shaderom a teda jeho výsledky sa prejavujú zmenami pripojených zdrojov ako napríklad bufferov a obrázkov.

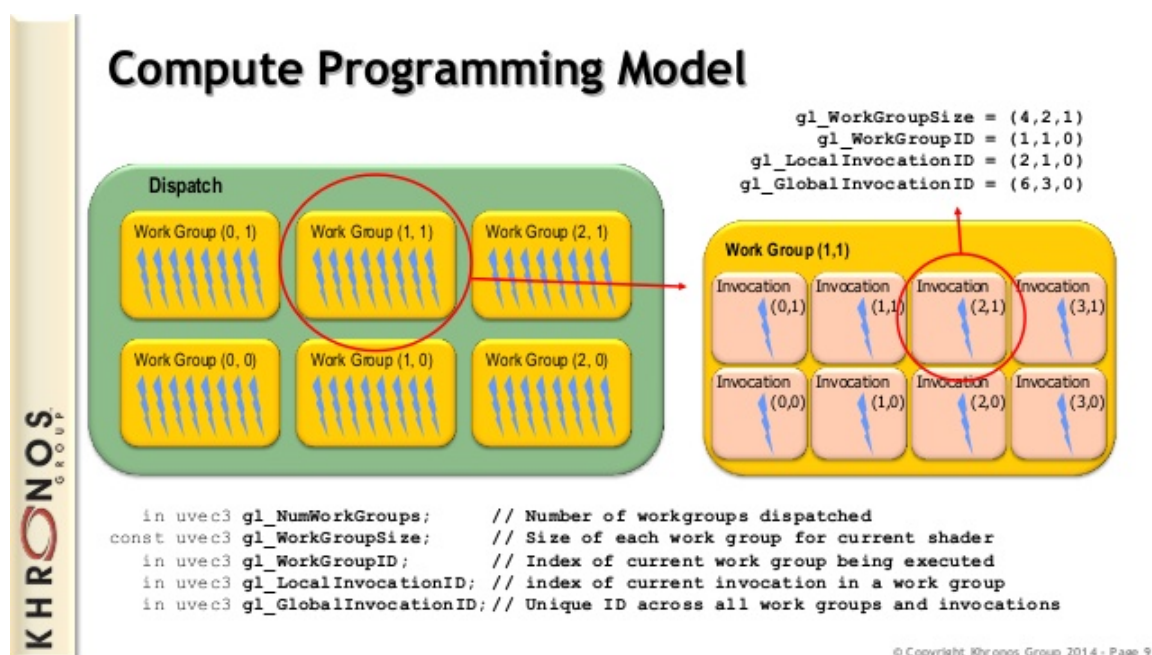
Aj keď je možné získať schopnosti GPGPU pomocou prepojenia s OpenCL, využitie compute shaderov je v mnohých prípadoch jednoduššie a efektívnejšie. Dôvodom je, že technológia OpenCL je dizajnovaná tak, aby bola schopná bežať na rôznych zariadeniach od FPGA po CPU a obsahuje bohatší repertoár funkcií. Výhodou compute shaderov je zameranie sa na GPU ako cieľovú platformu a z toho plynúce optimalizácie, možnosť písať kód v GLSL ako u ostatných OpenGL shaderov a implicitná integrácia do OpenGL, čím odpadáva nutnosť API zabezpečujúceho interoperabilitu, čo je nevyhnutné pri použití OpenCL. Z posledného zmieňovaného plyní možnosť využitia potrebných objektov v sta-

vovom stroji pre grafiku a pri GPGPU výpočtoch súčasne, bez nutnosti tzv. *acquire-release* sémantiky alebo prekladu týchto objektov [9, úvod].

Compute shadery tvoria 2 základné vzájomne úzko prepojené časti – výpočtový priestor a pamäťový model.

Výpočtový priestor

Tento abstraktný priestor, v ktorom operujú compute shadery, je delený na niekoľko častí, ktoré je možné vidieť v grafickej podobe na obrázku 4.1. Jeho základnou jednotkou je *pracovná skupina*, ktorá predstavuje najmenšie množstvo výpočtových operácií, ktoré môže užívateľ vykonať. Pracovná skupina je sama zložená z niekoľkých častí – *invokácií*, ktoré predstavujú instance, potencionálne paralelne vykonávajúce vlastný kód compute shaderu. Poslednou časťou je tzv. *dispatch*, ktorý definuje počet pracovných skupín, ktorých spustenie je požadované, čím tiež efektívne definuje množstvo výpočtov, ktoré je potrebné vykonať.



Obr. 4.1: Výpočtový priestor compute shaderu. Prevzaté z <https://image.slidesharecdn.com/khronos-opengl-es-gdc-mar14-140321110601-phpapp01/95/khronos-opengl-es-gdc-2014-9-638.jpg?cb=1395400782>

Pracovná skupina spolu s dispatchom môžu definovať potrebný výpočtový rozsah v až 3 dimenziách. Definícia veľkosti pracovnej skupiny je vyžadovaná už pri kompilácii compute programu, veľkosti dispatchu naopak nepodliehajú tomuto obmedzeniu a môžu byť definované počas behu aplikácie. Všetky zo zmieňovaných hodnôt sú subjektom limitov, ktorých minimálne a/alebo maximálne hodnoty sú definované v OpenGL a skutočné hodnoty definuje využívaný hardware a k nemu príslušiacie ovládače obsahujúce implementáciu OpenGL. Tieto hodnoty sú získateľné pomocou štandardných funkcií OpenGL využívaných na tieto účely doplnených o príslušné symbolické konštanty hľadaných parametrov.

Ako už bolo spomenuté na začiatku teto kapitoly, pre compute shadery neexistujú nijaké preddefinované užívateľské vstupy alebo výstupy. Existujú však isté vstavané premenné, ktoré poskytujú informácie viažúce sa k adresácii jednotlivých pracovných skupín vrámci

dispatchu, k adrese invokácie vrámci skupiny alebo celého dispatchu a podobne. Tieto informácie sú nevyhnutné pre zadelenie konkrétnych úsekov spracovávanej úlohy jednotlivým invokáciám [17, kapitola 12].

Ďalším dôležitým aspektom tejto oblasti je spôsob, akým skutočne prebieha samotný výpočet, ktorý istou mierou objasňuje, prečo je pracovná skupina základnou výpočtovou jednotkou. Hoci dispatch určuje počet požadovaných pracovných skupín, ich poradie vykonávania je ponechané na samotný systém. To znamená, že skupiny sú spracované vzájomne nezávisle na sebe a compute shader nemá možnosť spoliehať sa na poradie ich vykonávania. Správne poradie vykonávania častí úlohy musí byť preto na globálnej úrovni zaistené programátorom zvonka. Opak však platí pre pracovnú skupinu, ktorej invokácie sú spracované paralelne, hoci nie nevyhnutne súčasne [9, sekcia 5.5]. Súčasné spracovanie prebieha po úsekoch zvaných *warpy* (NVidia) alebo *wavefronty* (AMD), ktoré sú tvorené istým počtom po sebe idúcich invokácií (typicky NVidia – 32, AMD – 64), ktoré naraz vykonávajú rovnaké inštrukcie. Warpy sú potom vykonávané v poradí definovanom implementáciou, typicky tak, že sa vykonáva prvý warp, ktorý má dostupné všetky potrebné operandy a k prepínaniu na ďalší dochádza pri čakaní na dokončenie pamäťových operácií. Vrámci pracovnej skupiny je však možné vynútiť si poradie vykonávania použitím *bariér*, ktoré garantujú, že všetky invokácie dokončili vykonávanie operácií predchádzajúcich bariére.

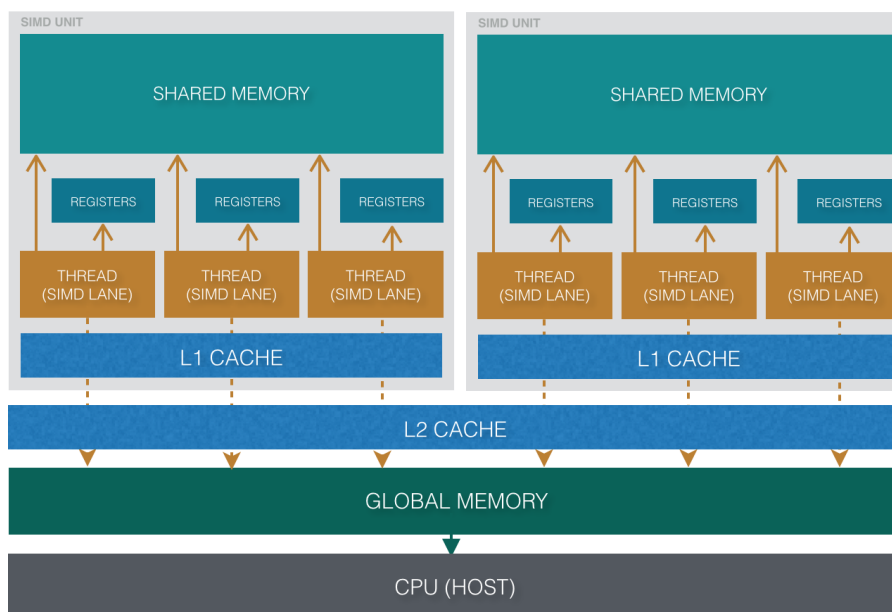
Keďže všetky invokácie vrámci warpu vykonávajú rovnaké inštrukcie, je nutné pri tvorbe compute shaderu uvažovať o použití riadiacich štruktúr, ktoré by mali za následok jeho vetvenie, nakoľko vetvenie vrámci jedného warpu vytvára tzv. *divergenciu*. Tá vedie k potrebe vykonania rôznych inštrukcií, čo znamená, že divergentné časti warpu, musia byť serializované, pričom invokácie warpu nepatriace k momentálne vykonávanej divergentnej časti ostávajú počas jej vykonávania nečinné. Z tohto dôvodu je vhodné vyhnúť sa vetveniu, ak je to možné, úplne alebo zabezpečiť, že k vetveniu dochádza na rozhraní warpov [7, sekcia 4.1].

Pamäťový model

Pre efektívnu paralelizáciu hlavne dátovo intenzívnych úloh je nutné správne pochopenie pamätevej hierarchie, s ktorou compute shader pracuje. Grafické znázornenie tohto pamäťového modelu sa nachádza na obrázku 4.2. Tento model nasleduje typický trend každého pamäťového modelu a síce, že najrýchlejšia pamäť sa nachádza najbližšie k výpočtovým jadrám, ale jej veľkosť je tým viac limitovaná, čím bližšie sa nachádza. Ďalšou veľmi podstatnou vlastnosťou pamätí compute shaderov je ich rozsah viditeľnosti. Tento pamäťový model je možné rozdeliť nasledovne:

1. register - predstavuje najmenšiu a najrýchlejšiu pamäťovú jednotku nachádzajúcu sa priamo na čipe, ktorá je dostupná iba pridelenej invokácii.
2. lokálna pamäť - úsek pamäte dostupný iba konkrétnej invokácii, ktorého hlavná časť sa nachádza mimo čipu. Typicky však býva optimalizovaná pomocou veľmi malej cache pamäti ($\sim 8\text{kB}$) priamo na čipe.
3. zdieľaná pamäť - veľmi dôležitý úsek pamäte priamo na čipe, ktorá je dostupná pre každú invokáciu vrámci jednej pracovnej skupiny a teda umožňuje obojstrannú komunikáciu medzi invokáciami. Jej veľkosť je typicky $\sim 48\text{kB}$. Tento typ pamäte je rozdelený do tzv. *bankov* s krokom 4B. Paralelný prístup k tejto pamäti z jedného warpu je možný iba adresáciou rozličných bankov nakoľko každý pamäťový prístup rozdielnych adres vrámci jedného banku vyžaduje serializáciu.

4. konštantná pamäť - pamäť mimo čipu dostupná každej invokácii, ktorá je opäť cachovaná ($\sim 8\text{kB}$). Táto pamäť je zaujímavá tým, že je dostupná iba na čítanie a je perzistentná t.j. nezaniká po skončení dispatchu.
5. textúrová pamäť - obdobie ako konštantná pamäť je to cachovaná pamäť mimo čipu, ktorá je dostupná iba na čítanie a je perzistentná. Typická veľkosť jej cache je $\sim 48\text{kB}$.
6. globálna pamäť - nachádza sa mimo čipu a je dostupná všetkým výpočtovým jadrám. Má veľkú kapacitu v ráde jednotiek GB s veľkou latenciou. Je dostupná každej invokácii a predstavuje hlavné úložisko dát, s ktorými compute shader pracuje. Zaisťuje tým komunikáciu medzi jednotlivými pracovnými skupinami nakoľko je tiež perzistentná a umožňuje aj zápis. Jej čítanie warpami prebieha po segmentoch o veľkosti $\sim 32 - 128\text{B}$. Jej efektívne využitie preto vyžaduje správne *zarovnanie* dát, aby sa predišlo zbytočným pamäťovým tranzakciám. Pre túto pamäť sú typicky dostupné 2 úrovne cache – L2 nachádzajúca sa mimo čipu, ktorej časti sú poskytnuté jednotlivým pamäťovým kontrolérom a L1, ktorá sa nachádza na čipe a je dostupná každej invokácii. Typická veľkosť L1 cache je $\sim 16\text{kB}$.



Obr. 4.2: Pamäťová hierarchia dostupná compute shaderu. Prevzaté z <http://www.code-bg.com/blogo/img/part3_0.PNG>

Pre všetky typy zapisovateľných pamätí, ku ktorým je možný prístup z viacerých invokácií existuje nutnosť explicitnej synchronizácie v prípade, že dáta zapisované jednou invokáciou je nutné čítať inou. Na tento účel existujú rôzne typy *pamäťových bariér* dostupné v compute shaderoch [21]. V hostiteľskej aplikácii je rovnako dostupná funkcia `void glMemoryBarrier(GLbitfield barriers)`, ktorá umožňuje vyžiadať synchronizáciu pamäte pre ďalšiu vykonávanú operáciu pomocou zvoleného parametru. Dôležité je uvedomiť si fakt, že zvolený parameter nevyjadruje odkiaľ potrebné dáta prichádzajú ale účel, na ktorý budú ďalej využité [17, kapitola 11].

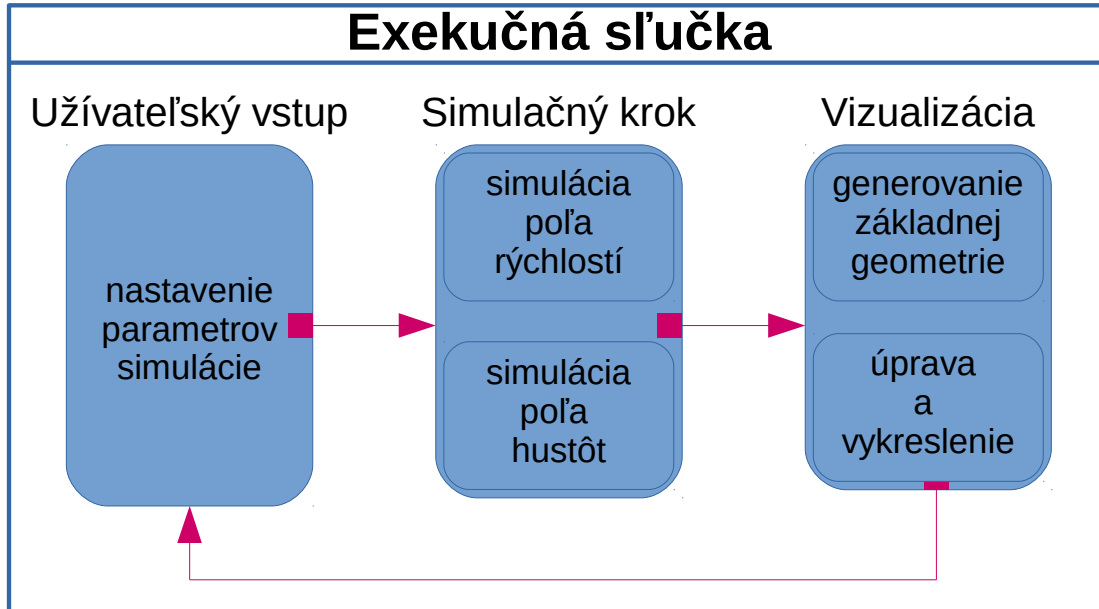
Kapitola 5

Návrh

V tejto kapitole sa nachádza detailný popis navrhovaného riešenia jednotlivých častí zvolenej metódy s ohľadom na použité nástroje reflektujúce požiadavky, ktoré prirodzene vznikajú z podstaty riešeného problému. Ako základ poslužil článok *Real-Time Fluid Dynamics for Games* [20], ktorý popisuje mriežkovú simulačnú metódu.

5.1 Exekučná slučka

Základom tohto riešenia je exekučná slučka na obrázku 5.1. V prvej časti dôjde k spracovaniu užívateľského vstupu, ďalej nasleduje simulačný krok, ktorý je jadrom tejto práce a ako posledná nasleduje vizualizácia simulovanej scény.



Obr. 5.1: Vysokoúrovňový pohľad na beh programu.

Spracovanie vstupu je základnou a očakávanou nevyhnutnosťou na pohodlnú prácu s výslednou aplikáciou, no ako také nie je zaujímavé z pohľadu simulácie tekutín a teda nebude

ďalej zmieňované. Zvyšné časti tohto vysokoúrovňového pohľadu sú rozobrané v nasledujúcich sekciách.

5.2 Simulačný krok

Základom zvolenej metódy je Navier-Stokes rovnica pre nestlačiteľnú tekutinu 2.39, ktorej odvodenie sa nachádza v kapitole 2. Táto rovnica je v analytickom tvare, ktorého riešenie je známe len pre niekoľko veľmi jednoduchých špecifických prípadov. V prvom rade je teda nevyhnutná jej úprava na tvar, ktorý je vhodnejší pre počítanie pomocou numerických metód.

Úprava rovnice

Jednou z možností, na ktorej je založený aj zdrojový článok, je použitie *Chorinovej projekčnej metódy* [5] používajúcej *Helmholtz-Hodgovu dekompozíciu*, ktorá umožňuje rozpojenie počítačnej závislosti rýchlostného a tlakového poľa.

V prvom výpočtovom medzikroku je vypočítané prechodné rýchlostné pole \mathbf{v}^* ignorovaním termu gradientu tlaku ∇p podľa vzťahu 5.1, ktoré nezachováva kontinuitu.

$$\frac{\mathbf{v}^* - \mathbf{v}^n}{\Delta t} = -(\mathbf{v}^n \cdot \nabla)\mathbf{v}^n + \nu \nabla^2 \mathbf{v}^n + \mathbf{a} \quad (5.1)$$

V druhom medzikroku dochádza k úprave využitím Helmholtz-Hodgovej dekompozície, po ktorej vzniká finálne rýchlostné pole pre ďalší krok simulácie, čo je zachytené vo vzťahu 5.2.

$$\mathbf{v}^{n+1} = \mathbf{v}^* - \frac{\Delta t}{\rho} \nabla p^{n+1} \quad (5.2)$$

Výpočet tejto rovnice však závisí na tlakovom poli ďalšieho kroku simulácie, ktoré je neznáme. To je možné získať aplikovaním operátoru divergencie a vynútením kontinuity $\nabla \cdot \mathbf{v}^{n+1} = 0$ ako je možné vidieť v rovnici 5.3.

$$\mathbf{v}^{n+1} + \frac{\Delta t}{\rho} \nabla p^{n+1} = \mathbf{v}^* \quad (5.3)$$

$$\nabla \cdot \left(\mathbf{v}^{n+1} + \frac{\Delta t}{\rho} \nabla p^{n+1} \right) = \nabla \cdot \mathbf{v}^*$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v}^{n+1} + \nabla \cdot \frac{\Delta t}{\rho} \nabla p^{n+1} = \nabla \cdot \mathbf{v}^*$$

$$\frac{\Delta t}{\rho} \nabla^2 p^{n+1} = \nabla \cdot \mathbf{v}^*$$

$$\nabla^2 p^{n+1} = \frac{\rho}{\Delta t} \nabla \cdot \mathbf{v}^*$$

Takto separovanú Navier-Stokes rovnicu je možné vyjadriť tvarom 5.4, ktorý popisuje následnosť medzikrokov pomocou skladania funkcií. Popis v tomto tvare odráža skutočnosť typickej implementácie, kde nezvyknú byť jednotlivé komponenty vypočítané samostatne a vo výsledku sčítané, ale riešenie je získané postupnou kompozíciou transformácií nad pôvodným rýchlostným poľom [8, kapitola 38].

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \mathbf{v}^{n+1} = (\mathcal{P} \circ \mathcal{I})(\mathbf{v}^n) = \mathcal{P}(\mathcal{I}(\mathbf{v}^n)) \quad (5.4)$$

$$\mathcal{I}(\mathbf{v}^n) = (-(\mathbf{v}^n \cdot \nabla)\mathbf{v}^n + \nu \nabla^2 \mathbf{v}^n + \mathbf{a})\Delta t + \mathbf{v}^n = \mathbf{v}^*$$

$$\mathcal{P}(\mathbf{v}^*) = \mathbf{v}^* - \frac{\Delta t}{\rho} \nabla p^{n+1} = \mathbf{v}^{n+1}$$

Obdobne je možné popísať aj prvý medzikrok, čím vznikne kompletná štruktúra simulačného kroku nachádzajúca sa v rovnici 5.5.

$$\mathcal{I}(\mathbf{v}^n) = (\mathcal{C} \circ \mathcal{D} \circ \mathcal{F})(\mathbf{v}^n) = \mathcal{C}(\mathcal{D}(\mathcal{F}(\mathbf{v}^n))) \quad (5.5)$$

$$\mathcal{F}(\mathbf{v}^n) = \Delta t \mathbf{a} = \mathbf{v}^{n_f}$$

$$\mathcal{D}(\mathbf{v}^{n_f}) = \Delta t \nu \nabla^2 \mathbf{v}^{n_f} + \mathbf{v}^{n_f} = \mathbf{v}^{n_d}$$

$$\mathcal{C}(\mathbf{v}^{n_d}) = -\Delta t (\mathbf{v}^{n_d} \cdot \nabla) \mathbf{v}^{n_d} = \mathbf{v}^*$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \mathbf{v}^{n+1} = (\mathcal{P} \circ \mathcal{C} \circ \mathcal{D} \circ \mathcal{F})(\mathbf{v}^n)$$

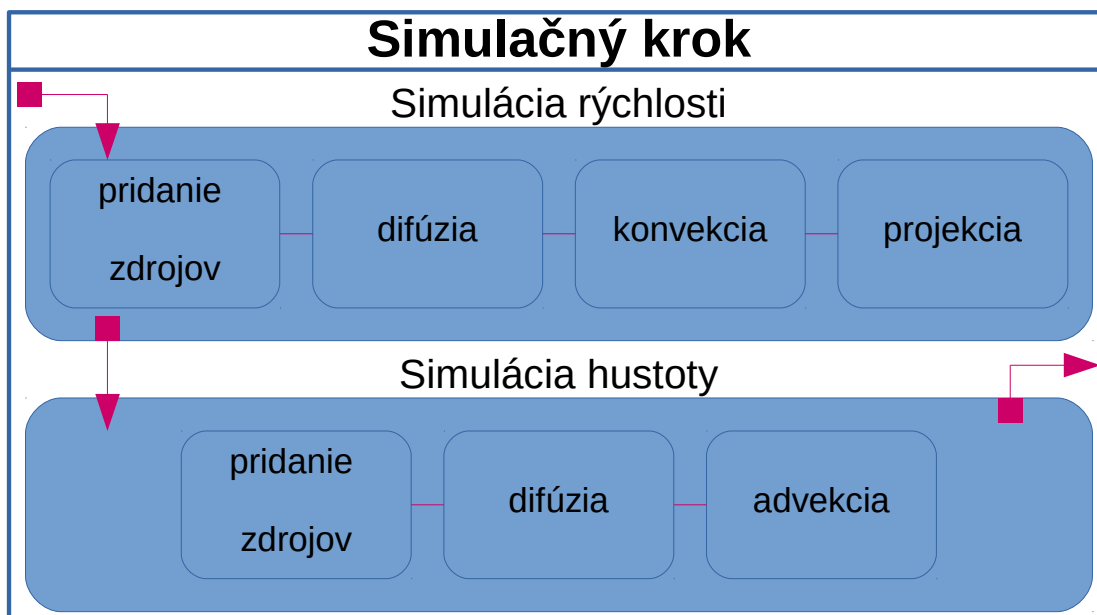
Jednotlivé časti finálneho matematického zápisu predstavujú potrebné simulačné kroky v poradí ich vykonávania. Sprava doľava sa jedná o pridanie externých síl \mathcal{F} , difúziu \mathcal{D} , konvekciu \mathcal{C} , čo je advekcia rýchlostného poľa samým sebou a projekciu \mathcal{P} . Po vykonaní úplného simulačného kroku vzniká nové pole rýchlostí zachovávajúce podmienku kontinuity.

Pole rýchlostí nie je samostatne vizuálne zaujímavé, kým nie je použité na pohyb nejakých objektov. V tomto prípade je zvoleným objektom tekutina samotná, ktorá je reprezentovaná poľom hustoty. Objekty takéhoto typu zvyknú byť nazývané *pasívne skaláry* pretože neovplyvňujú priebeh toku tekutiny, ale sú iba unášané rýchlostným poľom [8, kapitola 38]. Pole hustoty popisuje matematická funkcia 5.6, ktorá je veľmi podobná funkcii poľa rýchlostí a odráža vlastnosti požadované od takéhoto skalárneho poľa. Jedná sa o advekciu \mathcal{A} , ktorá je nevyhnutným dôsledkom jeho existencie v rýchlostnom poli, externý zdroj hustoty \mathcal{S} a voliteľnú difúziu \mathcal{D} , ktorá je využitá nakoľko tvorí vierohodnejšie výsledky simulácie.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -(\mathbf{v} \cdot \nabla)\rho + \kappa \nabla^2 \rho + s \quad (5.6)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \rho^{n+1} = (\mathcal{A} \circ \mathcal{D} \circ \mathcal{S})(\rho^n) \quad (5.7)$$

Získané rovnice dokopy tvoria kompletný simulačný krok, ktorý je vyobrazený na obrázku 5.2.



Obr. 5.2: Všeobecné znázornenie kroku simulačnej slučky. Ako prvé sa aktualizuje pole rýchlosti, až potom pole hustôt.

Výpočtové časti

Z predchádzajúcich úprav rovníc je možné vidieť, že existujú 2 hlavné časti, na ktorých je založená simulácia. Prvou je numerická integrácia obyčajnej diferenciálnej rovnice vyskytujúca sa v advekcii, druhou riešenie Poissonovej rovnice, čo je parciálna diferenciálna rovnica vyskytujúca sa v difúzii a projekcii. Existujú rôzne riešenia oboch týchto problémov. Nižšie sú prezentované riešenia zvolené pre túto prácu. Stojí za zmienku, že prezentované riešenia predpokladajú použitie pravidelnej mriežky, čo zjednodušuje výsledné rovnice.

Advekcia

Z čistej úpravy Navier-Stokes rovnice prezentovanej vyššie vyplýva pre advekciu použitie explicitnej numerickej integrácie pomocou doprednej Eulerovej integračnej metódy nachádzajúcej sa v rovnici 5.8.

$$\mathbf{x}(t + \Delta t) = \mathbf{x}(t) + \mathbf{v}(t)\Delta t \quad (5.8)$$

Hoci existujú aj iné, presnejšie metódy tohto typu, všetky zdieľajú rovnaký problém – pri použití veľkého časového kroku strácajú stabilitu a ak je hodnota $\mathbf{v}(t)\Delta t$ väčšia než veľkosť jednej bunky tzv. vybuchnú. Riešením podľa zdrojového článku [20] je invertovať problém a použiť implicitnú integráciu ako je možné vidieť v rovnici 5.9. To znamená, že sa nepočíta kam sa bod (typicky stred) bunky posunie v ďalšom kroku, ale pozícia, z ktorej sa do daného bodu dostal. Nová kvantita q hľadanej veličiny spätne integrovaného bodu potom pochádza z tejto pozície.

$$\mathbf{x}(t + \Delta t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{v}(t)\Delta t \quad (5.9)$$

$$q(\mathbf{x}, t + \Delta t) = q(\mathbf{x} - \mathbf{v}\Delta t, t)$$

Toto riešenie je nazývané *semi-Lagrangovské* pretože pre každú bunku mriežky sa spätne integruje iba jej stred rovnako ako keby sa jednalo o časticu.

Difúzia a projekcia

Ako už bolo uvedené základom oboch týchto výpočtových blokov je riešenie Poissonovej rovnice. Tá je rovnicou maticového typu a má formu $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, kde \mathbf{b} je vektor konštánt, \mathbf{x} je vektor hľadaných riešení a \mathbf{A} je matica implicitne reprezentovaná Laplacovým operátorom ∇^2 , takže nie je nevyhnutné jej maticové uloženie. Všeobecný zápis tejto rovnice pochádza práve z Laplacovho operátora a je možné ho vidieť v rovnici 5.10.

$$\nabla^2 q = \frac{q_{i+1,j,k} - 2q_{i,j,k} + q_{i-1,j,k}}{(\Delta x)^2} + \frac{q_{i,j+1,k} - 2q_{i,j,k} + q_{i,j-1,k}}{(\Delta y)^2} + \frac{q_{i,j,k+1} - 2q_{i,j,k} + q_{i,j,k-1}}{(\Delta z)^2} \quad (5.10)$$

S vyššie spomínaným predpokladom pravidelnej mriežky je možné zjednodušenie do tvaru 5.11.

$$\nabla^2 q = \frac{q_{i+1,j,k} + q_{i-1,j,k} + q_{i,j+1,k} + q_{i,j-1,k} + q_{i,j,k+1} + q_{i,j,k-1} - 6q_{i,j,k}}{(\Delta x)^2} \quad (5.11)$$

Všeobecný zápis v Poissonovej forme spoločný pre difúziu aj projekciu má tvar 5.12.

$$x_{i,j,k}^{(s+1)or(s)} = \frac{x_{i-1,j,k}^{(s)} + x_{i+1,j,k}^{(s)} + x_{i,j-1,k}^{(s)} + x_{i,j+1,k}^{(s)} + x_{i,j,k-1}^{(s)} + x_{i,j,k+1}^{(s)} + \alpha b_{i,j,k}}{\beta} \quad (5.12)$$

Premenné a konštanty sú pre každú z výpočtových častí rozdielne, no tvar zostáva rovnaký, čo umožňuje jednoduššie znovupoužitie. Výsledná rovnica pre difúziu má teda tvar 5.13 a obdobná rovnica riešiaci Poissonovu rovnicu pre tlakové pole projekcie je tvaru 5.14. Za zmienku stojí, že vyššie definovaná difúzia je opäť v explicitnom vyjadrení a je nutné vykonať prevod do implicitného tvaru za účelom dosiahnutia numerickej stability.

$$\mathbf{v}^{n_d} = \Delta t \nu \nabla^2 \mathbf{v}^{n_f} + \mathbf{v}^{n_f} \quad (5.13)$$

$$\mathbf{v}^{n_f} = \mathbf{v}^{n_d} - \Delta t \nu \nabla^2 \mathbf{v}^{n_d}$$

$$\mathbf{v}^{n_f} = (\mathbf{I} - \Delta t \nu \nabla^2) \mathbf{v}^{n_d}$$

$$v_{i,j,k}^{n_f} = v_{i,j,k}^{n_d} - \frac{\nu \Delta t (u_{-}^{n_d} + u_{+}^{n_d} + v_{-}^{n_d} + v_{+}^{n_d} + w_{-}^{n_d} + w_{+}^{n_d} + 6v_{i,j,k}^{n_d})}{(\Delta x)^2}$$

$$\begin{aligned}
v_{i,j,k}^{n_f} &= \left(1 + 6 \frac{\nu \Delta t}{(\Delta x)^2}\right) v_{i,j,k}^{n_d} - \frac{\nu \Delta t}{(\Delta x)^2} (u_-^{n_d} + u_+^{n_d} + v_-^{n_d} + v_+^{n_d} + w_-^{n_d} + w_+^{n_d}) \\
\left(6 + \frac{(\Delta x)^2}{\nu \Delta t}\right) v_{i,j,k}^{n_d} &= u_-^{n_d} + u_+^{n_d} + v_-^{n_d} + v_+^{n_d} + w_-^{n_d} + w_+^{n_d} + \frac{(\Delta x)^2}{\nu \Delta t} v_{i,j,k}^{n_f} \\
v_{i,j,k}^{n_d} &= \frac{u_-^{n_d} + u_+^{n_d} + v_-^{n_d} + v_+^{n_d} + w_-^{n_d} + w_+^{n_d} + \frac{(\Delta x)^2}{\nu \Delta t} v_{i,j,k}^{n_f}}{6 + \frac{(\Delta x)^2}{\nu \Delta t}} \\
\nabla^2 p^{n+1} &= \frac{\rho}{\Delta t} \nabla \cdot \mathbf{v}^* \\
\frac{\rho}{\Delta t} \nabla \cdot \mathbf{v}^* &= \frac{p_{i-}^{n+1} + p_{i+}^{n+1} + p_{j-}^{n+1} + p_{j+}^{n+1} + p_{k-}^{n+1} + p_{k+}^{n+1} + 6p_{i,j,k}^{n+1}}{(\Delta x)^2} \\
\frac{6p_{i,j,k}^{n+1}}{(\Delta x)^2} &= \frac{p_{i-}^{n+1} + p_{i+}^{n+1} + p_{j-}^{n+1} + p_{j+}^{n+1} + p_{k-}^{n+1} + p_{k+}^{n+1}}{(\Delta x)^2} - \frac{\rho}{\Delta t} \nabla \cdot \mathbf{v}^* \\
p_{i,j,k}^{n+1} &= \frac{p_{i-}^{n+1} + p_{i+}^{n+1} + p_{j-}^{n+1} + p_{j+}^{n+1} + p_{k-}^{n+1} + p_{k+}^{n+1} - \rho \frac{x^2}{\Delta t} \nabla \cdot \mathbf{v}^*}{6}
\end{aligned} \tag{5.14}$$

Na riešenie tohto typu úlohy sú používané iteračné metódy začínajúce počiatočným odhadom, ktorý je postupne vylepšovaný. Existuje množstvo metód na riešenie problému tohto typu ako napríklad Jakobiho, metóda konjugovaných gradientov a pod. s rôznou rýchlosťou konvergencie. Ďalší podstatný aspekt v ktorom sa líšia je opäť stabilita. Rovnako aj pre túto úlohu bola zvolená metóda, ktorá spĺňa tento požiadavok, konkrétne Gauss-Seidlova iteračná metóda.

Poslednou časťou, ktorú je potrebné u tohto výpočtu zvážiť sú už spomínané počiatkové hodnoty a hraničné podmienky. Zatiaľ čo počiatkové hodnoty sú triviálne 0, hraničné podmienky sú zložitejšie a odlišné pre každú z týchto úloh, majú však spoločný trend. Pre skalárnu veličinu ako napríklad tlak je použitá tzv. *Dirichletova hraničná podmienka*, čo prakticky znamená, že sa priamo určí hodnota na hranici čo je v tomto prípade 0. Pre vektorovú veličinu ako napríklad rýchlosť je naopak použitá tzv. *Neumannova hraničná podmienka* ktorá hovorí, že magnitúda veličiny pôsobiaca kolmo na rozhranie je eliminovaná rovnako veľkou silou opačného smeru t.j. $\mathbf{v} \cdot \hat{n} = \mathbf{v}_{solid} \cdot \hat{n}$.

Analýza výpočtových nárokov

Zo získaných rovníc je možné dedukovať niekoľko vlastností, ktoré má riešený systém a určitú oblasť najväčšieho záujmu z pohľadu optimalizácie výkonnosti.

Je zrejmé, že počet požadovaných výpočtových operácií je pomerne nízky a ich obťažnosť je rovnako relatívne malá, nakoľko sa jedná o jednoduché aritmetické operácie. Výpočtová záťaž môže v tejto oblasti signifikantne narásť pri zvolení veľkého počtu iterácií algoritmu riešiaceho Poissonove rovnice, no nie je predpoklad, že by sa stala primárnym zdrojom zníženia výkonu.

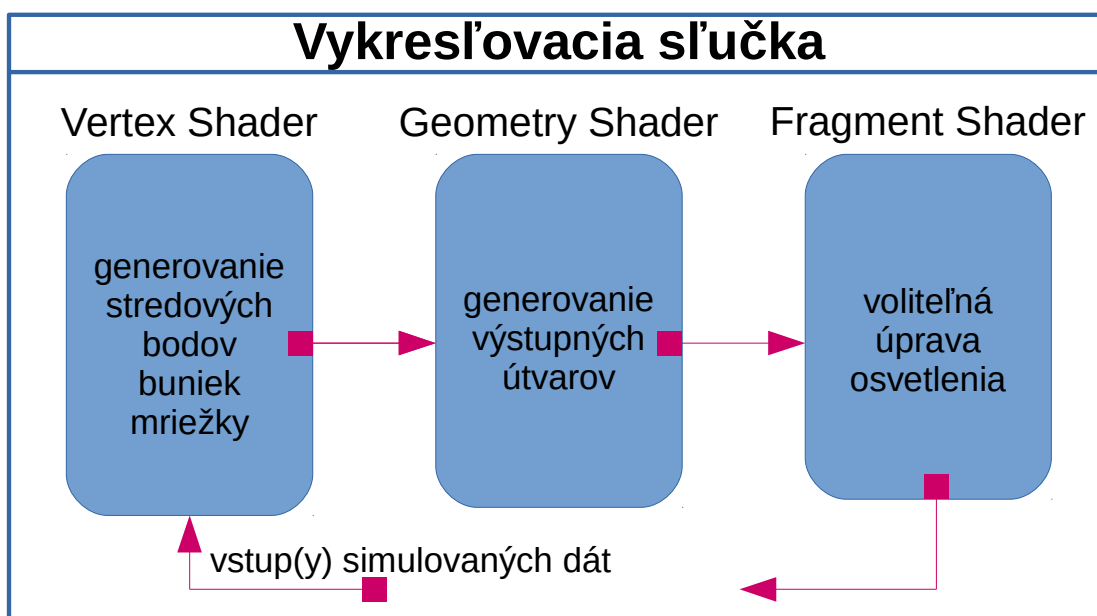
Zdrojom najväčšieho spomalenia sú nepochybne pamäťové operácie, ktoré sa hojne vyskytujú v každej výpočtovej časti simulačnej slučky. To je dôvodom prečo efektívne rozdelenie pamäte a práca s ňou hlavnou oblasťou zamerania pre simulačnú oblasť tejto práce.

5.3 Vykresľovanie

Po ukončení simulačného kroku prirodzene nasleduje potreba vizualizácie vypočítaných dát, nakoľko je de facto jediným spôsobom vyhodnotenia kvality a vôbec validity simulácie. Ďalej je popísaná základná vykresľovacia slučka, veľmi jednoduchý spôsob jej realizácie a jej možné rozšírenie resp. zámena.

5.3.1 Vykresľovacia slučka

Keďže implementovaná metóda patrí medzi mriežkové typy, prirodzene sa naskytá možnosť využiť túto semi-implicitnú informáciu o zobrazovanom priestore. Základná slučka je preto tvorená časťami vyobrazenými na obrázku 5.3.



Obr. 5.3: Kroky, ktorými prechádza aplikácia pri vykresľovaní simulovaných dát.

5.3.2 Jednoduchá vizualizácia

Navrhované riešenie poskytuje len veľmi základné zobrazenie pomocou poľa hustoty.

S využitím implicitne dostupnej mriežky dôjde v prvom kroku ku generovaniu pozícií stredov jednotlivých buniek vertex shaderom. K tomu dochádza kombináciou vstavanej premennej `gl_VertexID` a známou informáciou o veľkosti bunky pravidelnej mriežky.

V ďalšom kroku nasleduje generácia stredového kríža bunky pomocou geometry shaderu, ktorá je veľmi priamočiara.

V poslednom kroku je potom použitá informácia o hustote tekutiny zo skalárneho poľa hustôt k nastaveniu intenzity farby pre každý kríž bunky. Využitím priehľadnosti jednotlivých krížov je možné sledovať dianie vrámci celej scény.

Medzi možné modifikácie by patrilo využitie potencionálne tessellovanej verzie metódy *Marching cubes* alebo nahradenie skalárneho poľa hustoty priamym sledovaním hladiny tekutiny pomocou *Level-set metódy*.

Kapitola 6

Záver

V tejto práci bol prezentovaný fyzikálno-matematický základ, ktorý predstavuje teoretický podklad pre oblasť simulácie kvapalín, spolu s jeho zasadením do širšieho kontextu fyziky. Ako ďalšie boli prezentované typy metód vyvinuté v tejto oblasti, roztriedené podľa ich spoločných charakteristík do väčších skupín a ako ďalší bol spomenutý stručný úvod do architektúry moderných GPU a ich nástrojov, ktorých využitie umožňuje akceleráciu simulácií kvapalín. Ako posledným je dostupný návrh implementovaného riešenia podľa zvoleného článku doplnený o zdôvodnenia jednotlivých rozhodnutí. Hlavnými bodmi navrhovaného pokračovaním tejto práce sú podrobný popis implementácie, testovanie implementácie zvolenej metódy a zhodnotenie získaných výsledkov. Ďalej je možné uvažovať rozličné rozšírenia od sofistikovanejších zobrazovacích a simulačných metód jednotlivých častí, po riešenia kolízií s objektmi a pod.

Literatúra

- [1] Amador, G. N. P.: *Real-time 3D Rendering of Water using CUDA*. Msc thesis, Univeristy of Beira Interior, Covilhã, Portugal, 2009, <https://www.it.ubi.pt/medialab/images/MSc/2009-msc-thesis-of-goncaloamador.pdf>.
- [2] Bender, J.; Müller, M.; Otaduy, M. A.; aj.: A Survey on Position-Based Simulation Methods in Computer Graphics. In *Computer graphics forum*, ročník 33, Wiley Online Library, 2014, s. 228–251.
URL <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.491.1850&rep=rep1&type=pdf>
- [3] Braley, C.; Sandu, A.: Fluid Simulation For Computer Graphics: A Tutorial in Grid Based and Particle Based Methods. 2010.
URL <http://users.encs.concordia.ca/~grogono/Graphics/fluid-5.pdf>
- [4] Bridson, R.; Müller-Fischer, M.: Fluid Simulation: SIGGRAPH 2007 Course notes. In *ACM SIGGRAPH 2007 Courses*, SIGGRAPH '07, New York, NY, USA: ACM, 2007, ISBN 978-1-4503-1823-5, s. 1–81, doi:10.1145/1281500.1281681.
URL <http://doi.acm.org/10.1145/1281500.1281681>
- [5] Chorin, A. J.: The numerical solution of the Navier-Stokes equations for an incompressible fluid. *Bulletin of the American Mathematical Society*, ročník 73, č. 6, 1967: s. 928–931.
URL <http://www.ams.org/journals/bull/1967-73-06/S0002-9904-1967-11853-6/S0002-9904-1967-11853-6.pdf>
- [6] Chrisman, C. L.: *A Comparison of Grid-Based Techniques for Navier-Stokes Fluid Simulation in Computer Graphics*. Master's thesis, UC San Diego: Computer Science and Engineering, San Diego, California, USA, 4 2008, retrieved from: <http://escholarship.org/uc/item/7zd8195h>.
- [7] Corporation, N.: NVIDIA CUDA C Programming Guide. PG-02829-001_v8.0.
URL http://docs.nvidia.com/pdf/CUDA_C_Programming_Guide.pdf
- [8] Fernando, R.: *GPU Gems: Programming Techniques, Tips and Tricks for Real-Time Graphics*. Pearson Higher Education, 2004, ISBN 0321228324.
URL https://developer.nvidia.com/gpugems/GPUGems/gpugems_pref01.html
- [9] Graham Sellers, D. K. J. K., Pat Brown: ARB_compute_shader. ARB Extension 122, The Khronos Group Inc., July 2014.
URL https://www.khronos.org/registry/OpenGL/extensions/ARB/ARB_compute_shader.txt

- [10] Hugo, R.: Introductory Fluid Mechanics.
URL https://www.youtube.com/channel/UCrRKDc1uHcif575CQexIA5Q/playlists?flow=grid&view=50&shelf_id=4
- [11] Ihmsen, M.; Orthmann, J.; Solenthaler, B.; aj.: SPH Fluids in Computer Graphics. In *Eurographics 2014 - State of the Art Reports*, editace S. Lefebvre; M. Spagnuolo, The Eurographics Association, 2014, ISSN 1017-4656, doi:10.2312/egst.20141034.
URL http://cg.informatik.uni-freiburg.de/publications/2014_EG_SPH_STAR.pdf
- [12] Kelager, M.: Lagrangian fluid dynamics using smoothed particle hydrodynamics. *University of Copenhagen: Department of Computer Science*, 2006.
URL <http://www.glowinggoo.com/sph/bin/kelager.06.pdf>
- [13] Kontaxis, C.: *Fluid Simulation for Computer Graphics*. Master's thesis, Utrecht University, Utrecht, Netherlands, 2 2013, http://dspace.library.uu.nl/bitstream/handle/1874/273891/thesis_final.pdf?sequence=2.
- [14] Levicky, R.: Fluid Kinematics and Constitutive Laws – CBE 6333 - Transport Phenomena, Course Notes.
URL http://faculty.poly.edu/~rlevicky/Handout7_6333.pdf
- [15] Müller, M.; Stam, J.; James, D.; aj.: Real Time Physics: Class Notes. In *ACM SIGGRAPH 2008 Classes*, SIGGRAPH '08, New York, NY, USA: ACM, 2008, s. 88:1–88:90, doi:10.1145/1401132.1401245.
URL <http://doi.acm.org/10.1145/1401132.1401245>
- [16] Seymour, M.: The science of fluid sims. 9 2011.
URL <https://www.fxguide.com/featured/the-science-of-fluid-sims/>
- [17] Shreiner, D.; Sellers, G.; Kessenich, J. M.; aj.: *OpenGL Programming Guide: The Official Guide to Learning OpenGL, Version 4.3*. Addison-Wesley Professional, 8 vydání, 2013, ISBN 0321773039, 9780321773036.
- [18] Slocum, J.: Efficient Fluid Simulation Algorithms. 2015.
URL http://apps.cs.utexas.edu/tech_reports/reports/tr/TR-2193.pdf
- [19] Sonin, A. A.: Equation of Motion for Viscous Fluids – 2.25 Advanced Fluid Mechanics, Writing. 8th edition.
URL http://web.mit.edu/2.25/www/pdf/viscous_flow_eqn.pdf
- [20] Stam, J.: Real-time fluid dynamics for games. In *Proceedings of the Game Developer Conference*, ročník 18, March 2003, str. 25.
URL <http://www.dgp.toronto.edu/people/stam/reality/Research/pdf/GDC03.pdf>
- [21] Wiki, O.: Memory Model — OpenGL Wiki. 2017, [Online; accessed 24-May-2017].
URL http://www.khronos.org/opengl/wiki_opengl/index.php?title=Memory_Model&oldid=13833

- [22] Wikipédia: Tekutina — Wikipédia, Slobodná encyklopédia. [Online; prístup 11-január-2017].
URL <https://sk.wikipedia.org/w/index.php?title=Tekutina&oldid=5277828>
- [23] Wikipedia: Navier–Stokes equations — Wikipedia, The Free Encyclopedia. 2017, [Online; accessed 4-January-2017].
URL https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Navier%E2%80%93Stokes_equations&oldid=758348824