



**VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ**

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

**FAKULTA INFORMAČNÍCH TECHNOLOGIÍ**

FACULTY OF INFORMATION TECHNOLOGY

**ÚSTAV INTELIGENTNÍCH SYSTÉMŮ**

DEPARTMENT OF INTELLIGENT SYSTEMS

**EFEKTIVNÍ ŘEŠENÍ OBYČEJNÝCH DIFERENCIÁLNÍCH  
ROVNIC METODAMI VYŠŠÍCH ŘÁDŮ**

EFFECTIVE SOLUTION OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS USING HIGH ORDER ME-

THODS

**BAKALÁŘSKÁ PRÁCE**

BACHELOR'S THESIS

**AUTOR PRÁCE**

AUTHOR

**OSKÁR GAZDÍK**

**VEDOUCÍ PRÁCE**

SUPERVISOR

**Ing. VÁCLAV ŠÁTEK, Ph.D.**

BRNO 2019

## Zadání bakalářské práce



22275

Student: **Gazdík Oskár**  
Program: Informační technologie  
Název: **Efektivní řešení obyčejných diferenciálních rovnic metodami vyšších řádů**  
**Effective Solution of Ordinary Differential Equations Using High Order Methods**  
Kategorie: Modelování a simulace

Zadání:

1. Prostudujte numerické metody využívané k řešení obyčejných diferenciálních rovnic (počátečních úloh).
2. Navrhněte metodu vyššího řádu založenou na Taylorově řadě pro výpočet lineárních a kvadratických soustav obyčejných diferenciálních rovnic.
3. Implementujte tuto metodu efektivně s využitím maticového-vektorového výpočtu v softwarovém prostředí MATLAB.
4. Porovnejte na sadě vhodných příkladů efektivitu (stabilitu, přesnost a rychlost výpočtu) Vaší metody s ostatními běžně používanými metodami.

Literatura:

- M. Kubíček, M. Dubcová, D. Janovská. Numerické metody a algoritmy. Vydavatelství VŠCHT Praha, 2005. ISBN 80-7080-558-7.
- L. Čermák and R. Hlavička. Numerické metody. Akademické nakladatelství CERM, s.r.o. Brno, 2005. ISBN 80-214-3071-0.
- L. Čermák. Numerické metody II. Akademické nakladatelství CERM, s.r.o. Brno, 2004. ISBN 80-214-2722-1.
- ŠÁTEK Václav, KOCINA Filip, KUNOVSKÝ Jiří a SCHIRRER Alexander. Taylor Series Based Solution of Linear ODE Systems and MATLAB Solvers Comparison. In: MATHMOD VIENNA 2015 - 8th Vienna Conference on Mathematical Modelling. Vienna: ARGE Simulation News, 2015, s. 693-694. ISBN 978-3-901608-46-9.

Podrobné závazné pokyny pro vypracování práce viz <http://www.fit.vutbr.cz/info/szz/>

Vedoucí práce: **Šátek Václav, Ing., Ph.D.**  
Vedoucí ústavu: Hanáček Petr, doc. Dr. Ing.  
Datum zadání: 1. listopadu 2018  
Datum odevzdání: 15. května 2019  
Datum schválení: 13. května 2019

## Abstrakt

Práca sa zameriava na riešenie obyčajných diferenciálnych rovníc (ODR) a sústav obyčajných diferenciálnych rovníc. Čitateľ je najskôr oboznámený s numerickým riešením diferenciálnych rovníc jednotlivými metódami a porovnaním výsledkov, chýb medzi nimi a ich stability. Ďalej je ukázané riešenie sústavy jednoduchých lineárnych rovníc jednotlivými metódami a opäť porovnanie výsledkov, chýb metód a ich stability a v závere je ukázané riešenie sústav nelineárnych obyčajných diferenciálnych rovníc Taylorovou radou a vstavá-ných funkcií MATLABU , porovnanie chýb medzi nimi a porovnanie časovej náročnosti metód. Ďalej bude ukázaný obvod, ktorý je zložený zo 100 malých obvodov, ktoré budú po-písané diferenciálnymi rovnicami a vypočítané metódami a porovnanie časovej náročnosti ako u nelineárnych rovníc. V poslednej časti bude ukázané ďalšie využitie diferenciálnych rovníc a to pre popis pohybu kyvadla.

## Abstract

Work is focusing on solution of ordinary differential equations and systems of ordinary differential equations. Firstly, reader is informed with numerical solution of differential equations with each method and comparing results, errors between them and their stability. Next is shown of solution of systems of ordinary differential linear equations with each methods and comparing results, errors between them and their stability and in conclusion , there is showed solution of system of non linear ordinary differential equations with Taylor series and built-in functions of MATLAB , comparing error between them and comparing time requirement between them. In next part, there is shown circuit created from 100 small circuits, which will be described with differential equations and solved with method and compared time requirement between them like with non linear equations. In the last part, there will be shown another usage of differential equations and that will be for movement of pendulum.

## Klíčová slova

obyčajná diferenciálna rovnica, Taylorova rada, metóda Runge-Kutta, Eulerova metóda

## Keywords

ordinary differential equation, Taylor Series, Runge-Kutta method, Euler method

## Citace

GAZDÍK, Oskár. *Efektivní řešení obyčejných diferenciálních rovnic metodami vyšších řádů*. Brno, 2019. Bakalářská práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta informačních technologií. Vedoucí práce Ing. Václav Šátek, Ph.D.

# Efektivní řešení obyčejných diferenciálních rovnic metodami vyšších řádů

## Prohlášení

Prehlasujem, že som túto bakalársku prácu vypracoval samostatne pod vedením pána Ing. Václava Šátka PhD. Uviedol som všetky literárne pramene a publikácie, z ktorých som čerpal.

.....

Oskár Gazdík  
15. května 2019

## Poděkování

Chcel by som sa veľmi poďakovať svojmu školiteľovi Ing. Václavovi Šátkovi PhD., za odborné vedenie, cenné rady a podporu pri tvorbe mojej práce.

# Obsah

<b>1</b>	<b>Úvod</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Obyčajné diferenciálne rovnice</b>	<b>4</b>
2.1	Počiatočné úlohy . . . . .	5
2.2	Analytický výpočet diferenciálnych rovníc . . . . .	5
2.3	Numerický výpočet diferenciálnych rovníc . . . . .	7
2.3.1	Jednokrokové metódy . . . . .	8
2.3.2	Viacrokové metódy . . . . .	9
2.4	Stabilita numerických metód . . . . .	10
<b>3</b>	<b>Riešenie ODR a porovnanie metód</b>	<b>11</b>
3.1	Dôležitosť kroku . . . . .	11
3.2	Riešenie diferenciálnych rovníc Eulerovou metódou . . . . .	12
3.3	Riešenie diferenciálnych rovníc metódou Runge-Kutta . . . . .	13
3.4	Riešenie diferenciálnych rovníc Taylorovou radou . . . . .	13
3.5	Porovnanie presnosti a stability metód . . . . .	14
3.6	Využitie Taylorovej Metódy . . . . .	18
<b>4</b>	<b>Riešenie sústavy lineárnych diferenciálnych rovníc</b>	<b>19</b>
4.1	Analytické riešenie . . . . .	20
4.2	Numerické riešenie . . . . .	22
4.3	Riešenie sústavy Eulerovou metódou . . . . .	22
4.4	Riešenie sústavy metódou Runge-Kutta . . . . .	23
4.5	Riešenie sústavy Taylorovou radou . . . . .	25
4.6	Porovnanie presnosti a stability metód . . . . .	27
<b>5</b>	<b>Riešenie sústavy nelineárnych diferenciálnych rovníc</b>	<b>30</b>
5.1	Stiff systémy . . . . .	30
5.2	ODE Solvery . . . . .	30
5.3	Riešenie SNDR a porovnanie s ODE solvermi . . . . .	30
<b>6</b>	<b>Telegrafická linka</b>	<b>36</b>
6.1	Telegrafická rovnica . . . . .	36
<b>7</b>	<b>Matematické kyvadlo</b>	<b>39</b>
<b>8</b>	<b>Aplikácia</b>	<b>43</b>
<b>9</b>	<b>Záver</b>	<b>46</b>

Literatura	47
Přílohy	48
A Zadania rovnic vypočítaných v tabulkách	49

# Kapitola 1

## Úvod

Cieľom tejto práce je navrhnúť metodu vyššieho rádu pre numerický výpočet lineárnych a kvadratických sústav obyčajných diferenciálnych rovníc a implementovať túto metódu v softwarovom prostredí MATLAB a porovnať efektivitu tejto metódy s bežne používanými metódami.

V kapitole 2 sa zoznámime so základmi diferenciálnych rovníc a popíšeme si jednotlivé jednokrokové metódy pre ich riešenie. Predstavíme si najčastejšie používané metódy ako sú Eulerova metóda, Taylorova rada a metóda Runge-Kutta.

V kapitole 3 si uvedieme jednoduchú diferenciálnu rovnicu, ktorá popisuje nabíjanie kondenzátoru v RC obvode a odvodíme si analytické riešenie. Rovnicu, ktorá popisuje RC obvod si zároveň vypočítame jednotlivými metódami, ktoré budú implementované v SW prostredí MATLAB a na výsledkoch a grafoch porovnáme presnosť a efektivitu jednotlivých metód.

V kapitole 4 si predstavíme niečo zložitejšie a to je RLC obvod, pre ktorý si odvodíme už sústavu diferenciálnych rovníc. Ukážeme si analyticky výpočet rovnice a opäť si vypočítame sústavu jednotlivými metódami implementovanými v prostredí MATLAB a porovnáme presnosť a efektivitu metód na výsledkoch a grafoch.

V kapitole 5 si predstavíme sústavu nelineárnych rovníc, povieme si niečo o stiff systémoch a ODE solveroch a vypočítame si sústavu nelineárnych rovníc Taylorovou radou a porovnanie výsledkov Taylorovej rady s ODE solvermi a porovnáme časy výpočtov jednotlivých metód.

V kapitole 6 si ukážeme, čo sa vznikne zložením 100 RLC obvodov, popíšeme si to, vypočítame Taylorovu radou, ODE solvermi a opäť porovnáme časy jednotlivých metód.

Kapitola 7 nám povie niečo o matematickom kyvadle a popise pohybu kyvadla diferenciálnymi rovnicami.

V záverečnej kapitole si zhrneme všetky naimplementované časti práce do jednoduchej aplikácie s rôznymi možnosťami výpočtu ODR metódami a vykresľovanie grafov.

## Kapitola 2

# Obyčajné diferenciálne rovnice

Diferenciálne rovnice majú široký rozsah praktického využitia vo väčšine vedeckých oborov. Najviac sú uplatnené v matematike a fyzike, kde je pomocou nich definovaná väčšina fyzikálnych zákonov. Diferenciálne rovnice sú taktiež jednou z možností ako popísať a riešiť elektronické obvody. V tejto práci bude použitý diferenciálny výpočet k popisu a riešeniu RC a RLC obvodu a ďalších rovníc.

Diferenciálnu rovnicu definujeme ako rovnicu, v ktorej sa neznáma funkcia nachádza v derivácii. Môžeme ju opísať ako matematickú rovnicu derivácie funkcie jednej alebo viacerých premenných. Z toho vychádza delenie diferenciálnych rovníc na obyčajné diferenciálne rovnice a parciálne diferenciálne rovnice. Ak funkcia, ktorú hľadáme, je funkciou jednej premennej, jedná sa o obyčajnú diferenciálnu rovnicu. V prípade, že je funkcia, ktorú hľadáme, funkciou viac premenných, nazývame ju parciálnou diferenciálnou rovnicou. Rád diferenciálnej rovnice je rád najvyššej derivácie v nej obsiahnutý. Za rád sústavy diferenciálnych rovníc považujeme hodnotu najvyššej derivácie, ktorá sa v sústave vyskytuje. Podľa rádu bývajú diferenciálne rovnice rozdelené na diferenciálne rovnice prvého rádu a diferenciálne rovnice vyšších rádov.

Obyčajnú diferenciálnu rovnicu  $n$ -tého rádu rozumieme ako rovnicu:

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (2.1)$$

Ak je diferenciálna rovnica rozriešená vzhľadom k najvyššej derivácii, vyjadríme ju v tvare:

$$f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) = y^n \quad (2.2)$$

Napríklad diferenciálnu rovnicu prvého rádu:

$$F(x, y, y') = 0 \quad (2.3)$$

je rozriešená vzhľadom v prvej derivácii:

$$y' = f(x, y) \quad (2.4)$$

Ak chceme nájsť riešenie diferenciálnej rovnice, musíme nájsť funkciu v danom obore čísel, ktorý má príslušné derivácie a vyhovuje zadanej diferenciálnej rovnici. Riešenie diferenciálnej rovnice znázorníme pomocou integrálnej krivky a môžeme ho rozdeliť na obecné alebo partikulárne. Obecné riešenie chápeme ako riešenie ktoré obsahuje ľubovoľnú integračnú konštantu. Partikulárne riešenie je také riešenie, kde každej integračnej konštante obecného riešenia pridáme určité číselné hodnoty. Partikulárne riešenie je možné získať



analytickou metódou alebo numericou metódou riešenia diferenciálnych rovníc. Riešenia, ktoré nemôžeme získať z obecného riešenia a vyskytujú sa len v niektorých bodoch oboru, nazývame singulárnym riešením. [6] [10]

## 2.1 Počiatočné úlohy

Obyčajné diferenciálne rovnice prvého rádu zo zadanou počiatočnou podmienkou:

$$y' = f(x, y), y(x_0) = y_0$$

Základom, z ktorého vychádza väčšina numerických metód riešenia začiatočných úloh je *diskretizácia premenných*. Znamená to, že približné riešenie sa nekonztruuje ako spojitá funkcia, ale postupne sa pre množinu navzájom rôznych bodov  $x_0$ , (bod, v ktorom je daná začiatočná podmienka),  $x_1, x_2, \dots$  hľadajú čísla  $y_0$  (hodnota začiatočnej podmienky),  $y_1, y_2, \dots$ , ktoré aproximujú hodnoty  $y(x_0), y(x_1), \dots$  presného riešenia v bodoch siete  $x_0, x_1, \dots$ . Body siete (uzly) nemusia byť *ekvidistantné* to jest vzdialenosť medzi nimi, tzv. *krok metódy*  $h_i = x_{i+1} - x_i$  môže závisieť na  $i$ . Pritom aproximácia  $y_n$  presného riešenia  $y(x_n)$  v bode  $x_n$  sa počíta z hodnôt približného riešenia v už vypočítaných uzloch. Týmto metódam hovoríme *metódy diskretnej premennej* alebo *diferenčné metódy*. Metóda, ktorá k tomuto riešeniu používa rekurentný vzťah, v ktorom je  $y_{n+1}$  vyjadrená pomocou  $k$  hodnôt  $y_n, y_{n-1}, \dots, y_{n+1-k}$  sa nazýva *k-kroková metóda*. Ak je  $k = 1$ , hovoríme o *jednokrokovej metóde*. [1]

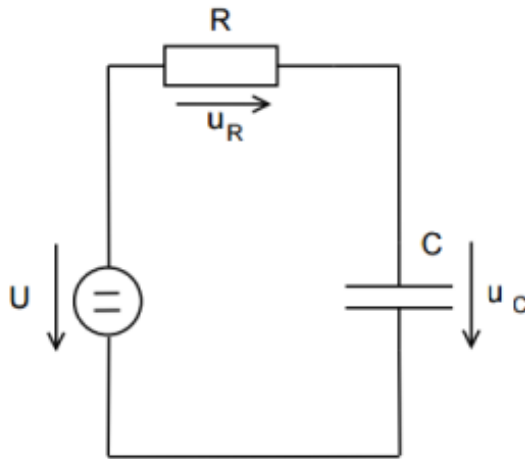
## 2.2 Analytický výpočet diferenciálnych rovníc

Jednou z variant výpočtu diferenciálnej rovnice je analytické riešenie. Výsledkom tohoto riešenia je funkcia času, ktorá sa získa dosadením daného času do vypočítanej rovnice. V akomkoľvek bode, v ktorom je funkcia definovaná, môžeme určiť konkrétnu hodnotu. Jedná sa z jedného pohľadu o veľmi presnú metódu. Z iného pohľadu môžeme u mnohých úloh zistiť, že je nemožné úlohu vyriešiť, či sa jedná o veľmi časovo náročný výpočet. V technickej praxi sa pre svoju zložitosť príliš nevyžívajú, vzhľadom k možnostiam dnešnej výpočtovej technike sú uprednostňované numerické metódy, ktorými môžeme riešiť širší okruh daných úloh. Analyticky riešime obyčajné diferenciálne rovnice pomocou obecných pravidiel, ktoré platia pre dané typy diferenciálnych rovníc. Snažíme sa nájsť riešenie v známom tvare. Rôzne typy rovníc sa snažíme previesť na lineárne rovnice s konštantnými koeficientami. Nelineárne rovnice prevedieme na lineárne, ale ich riešime pomocou priamej integrácie. Pre predstavu zložitosti výpočtu analytického riešenia diferenciálnych rovníc si analyzujeme príklad jednoduchého elektrického obvodu RC a prevedieme porovnanie s numericým riešením.

K postaveniu rovníc riešiace obvod RC podľa Obr. 2.1 použijeme postupne II. Kirchhoffov zákon, Ohmov zákon a dif. rovnicu [13]:

$$U = u_R + u_C \tag{2.5}$$

$$u_R = Ri \tag{2.6}$$



Obrázek 2.1: RC obvod

$$u'_C = \frac{i}{C} \quad (2.7)$$

Do rovnice (2.5) dosadíme rovnicu (2.6) a dostaneme

$$U = Ri + u_C \quad (2.8)$$

Z rovnice (2.7) vyjadríme  $i = u'_C C$  a dosadíme do (2.8)

$$U = RCu'_C + u_C \quad (2.9)$$

Riešme nehomogénnu diferenciálnu rovnicu prvého rádu

$$\tau u'_C + u_C = U, \quad (2.10)$$

kde  $\tau = RC$  je konštanta. Pomocou charakteristickej rovnice prepíšeme

$$\begin{aligned} \tau\lambda + 1 &= 0 \\ \lambda &= -\frac{1}{\tau} \end{aligned}$$

Očakávané obecné riešenie rovnice ma tvar

$$u_C = C(t)e^{-\frac{1}{\tau}t}, \quad (2.11)$$

kde  $C(t)$  je neznáma premenná.

Pre dopočítanie konštanty očakávané riešenie derivujeme

$$u'_C = C'(t)e^{-\frac{1}{\tau}t} + \left(-\frac{1}{\tau}\right)C(t)e^{-\frac{1}{\tau}t}$$

a spolu s očakávaným riešením (2.11) dosadíme do rovnice (2.10) a upravíme na tvar

$$\tau C'(t)e^{-\frac{1}{\tau}t} = U$$

Pre výpočet neznámej  $C(t)$  integrujeme a dostaneme tvar

$$C(t) = \tau U e^{\frac{1}{\tau}t} + k$$

Dosadíme do obecného riešenia a upravíme

$$u_C = U + ke^{-\frac{1}{\tau}t}$$

Pre dopočítanie integračnej konštanty  $k$  použijeme počiatočnú podmienku  $u_C(0) = u_{C_0}$ , ktorú dosadíme do obecného riešenia

$$\begin{aligned}u_{C_0} &= U + ke^0 \\ k &= u_{C_0} - U\end{aligned}$$

Potom analytické riešenie je rovné

$$u_c = \tau U + (u_{C_0} - \tau U)e^{-\frac{1}{\tau}t} \quad (2.12)$$

## 2.3 Numerický výpočet diferenciálnych rovníc

Pri modelovaní elektrických obvodov s využitím diferenciálneho počtu je veľakrát možné použiť len jediné riešenie. Daným riešením je využitie numerického výpočtu diferenciálnych rovníc popisujúcich jednotlivé prvky elektrického obvodu. Numerickými metódami diferenciálnych rovníc môžeme získať približné riešenie obyčajných diferenciálnych rovníc. Tieto metódy su väčšinou rýchlejšie a jednoduchšie než analytické. Výsledkom numerického riešenia je postupnosť hodnôt v určených bodoch a danom definičnom obore funkcie  $f(t)$ . Hodnoty medzi určenými bodmi môžeme vypočítať opakovaným použitím zvolenej metódy, zmeňujúcim sa krokom výpočtu, poprípade interpoláciou z okolných bodov, ktoré sme vypočítali. Pri riešení nám môže dôjsť k veľkej chybe výpočtu, pokiaľ nevhodne zvolíme krok vybranej metódy.

U numerického riešenia diferenciálnych rovníc vychádzame z bodu  $t_0$ , kde máme určenú počiatočnú podmienku. Ďalší postup spočíva v nájdení riešenia v ďalších bodoch  $t_n$ .

Majme obyčajnú diferenciálnu rovnicu:

$$y'(t) = f(t, y) \quad (2.13)$$

kde je počiatočná podmienka:

$$y(t_0) = y_0 \quad (2.14)$$

Základom väčšiny numerických metód pre riešenie počiatočných úloh na intervale  $\langle a, b \rangle$  je diskretizácia premennej. Množinu bodov  $t_i, i \in \langle 0, k \rangle$  z intervalu  $\langle a, b \rangle$ , kde

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{k-1} < t_k = b \quad (2.15)$$

nazývame sieť a ich prvky uzly siete. Výraz  $t_{n+1} - t_i = h$  nazývame intergračným krokom siete v uzlu  $t_i$ . Ak je navyac  $h_i = h = konst.$ , hovoríme o pravidelnej sieti.

Numerickým riešením rovnice 2.13 rozumieme postupnosť  $y_i$  hodnôt  $y(t_0), y(t_1), \dots, y(t_i)$ , ktoré odpovedajú príslušným hodnotám uzlov siete. Hodnoty  $y(t_i)$  numerického riešenia budeme označovať  $y_i$ .

Pre použiteľnosť numerickej metódy je nutnou podmienkou existencie limity postupnosti  $y_i$  pre  $h \rightarrow 0, i \rightarrow \infty$ , kde  $h_i = t$  je pevné, to je postupnosť  $y_i$  musí konvergovať pre  $h \rightarrow 0$  k exaktnému riešeniu.

V závislosti na skutočnosti, koľko potrebujeme k výpočtu novej hodnoty predchádzajúcich bodov, rozdeľujeme metódy numerickeho riešenia diferenciálnych rovníc na [3]:

- Metódy, ktoré zisťujú hodnoty funkcie  $f(t, y)$  medzi jednotlivými uzlami siete  $(t_i, y_i)$ . Sú zastúpené jednokrokovými metódami.
- Metódy, ktoré počítajú hodnoty funkcie  $f(t, y)$  len v bodoch  $(t_i, y_i)$ , kde  $y_i$  je hodnota numerického riešenia v bode  $t = t_i$ . Jedná sa o viackrokové metódy.

### 2.3.1 Jednokrokové metódy

U jednokrokových metódach počítame hodnotu riešenia v bode  $y_{i+1}$  len na základe hodnoty riešenia v predchádzajúcom uzle  $y_i$ . Medzi najznámejšie jednokrokové metódy patrí Eulerova metóda, metódy Runge-Kuttova a metóda Taylorovho rádu.

#### Eulerova metóda

Jedná sa o najjednoduchšieho predstaviteľa jednokrokových metód. K výpočtu používa len prvé dva členy Taylorovej rady a preto je výpočet veľmi rýchly. Metóda je veľmi jednoduchá a hrubá. S rastúcim krokom  $h$  sa jej presnosť veľmi znižuje a v rade praktických aplikácií nedáva dostatočne presné výsledky. Ak je hodnota kroku  $h$  dostatočne malá, môžeme v Taylorovom rozvoji zanedbať všetky členy pravej strany začínajúce tretím a zapísať:

$$y_{t+h} = y_t + h * y' \quad (2.16)$$

V prvom kroku tak dostaneme:

$$y_1 = y_0 + h * y'_{t_0} = y_0 + h * f(t_0, y_0) \quad (2.17)$$

#### Metódy Runge-Kutta

Najpoužívanejšie pre numerické riešenie diferenciálnych rovníc sú metódy Runge-Kutta. Je známych viacero modifikácií podľa počtu členov, a to Runge-Kutta 2., 4. a 8. rádu. Najznámejšia a najpoužívanejšia z nich je Runge-Kutta 4. rádu. Metóda vypadá na prvý pohľad ako veľmi zložitá, ale zároveň sa jedná o jednoduchú metódu. Vychádza tiež z Taylorovej rady, ale zahŕňa aj členy vyšších rádov. Je preto presnejšia a takisto patrí do skupiny jednokrokových numerických metód.

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}h(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (2.18)$$

$$k_1 = f(t_i, y_i)$$

$$k_2 = f(t_{i+1} + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1)$$

$$k_3 = f(t_{i+1} + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_2)$$

$$k_4 = f(t_{i+1} + h, y_i + tk_3)$$

Ukážeme si aj tvar Runge-Kutta 2. aj 3. rádu.

$$y_{i+1} = y_i + \frac{k_1 + k_2}{2} \quad (2.19)$$

$$k_1 = f(t_i, y_i)$$

$$k_2 = f(t_{i+1} + k_1)$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{9}(2k_1 + 3k_2 + 4k_3) \quad (2.20)$$

$$k_1 = f(t_i, y_i)$$

$$k_2 = f(t_{i+1} + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1)$$

$$k_3 = f(t_{i+1} + \frac{3}{4}h, y_i + \frac{3}{4}k_2)$$

Metódy Runge-Kutta sú numericky stabilné. Teoreticky existuje niekoľko variant podobných algoritmov, ktoré sa vyznačujú presnosťou štvrtého rádu. Pre výpočet  $y_{i+1}$  sú potrebné medzivýsledky  $k_1, k_2, k_3$  a  $k_4$ , čo výpočet spomaľuje. Uvedená varianta patrí medzi veľmi oblúbené.[5]

### Taylorova rada

Metóda Taylorovej rady patrí medzi jednokrokové metódy. Pre výsledné riešenie, ktoré je závislé na požadovanej presnosti používa metóda vyšší počet členov Taylorovej rady. Pokiaľ zvolíme integračný krok  $h$  a porovnáme výsledné hodnoty vypočítané Eulerovou a Runge-Kuttovou metódou, dosahujeme presnejšie hodnoty. Taylorovu radu definujeme ako nekonečnú mocninu rady:

$$y_{i+1} = y_i + hy'_i + \frac{h^2}{2!}y''_i + \frac{h^3}{3!}y'''_i + \frac{h^4}{4!}y^{(4)}_i + \dots + \frac{h^n}{n!}y^{(n)}_i, \quad (2.21)$$

Presnosť výpočtu ovplyvňujeme zvolením počtu členov Taylorovej rady a veľkosťou integračného kroku, ktorý nemusí byť konštantný a pre jednotlivé kroky výpočtu sa môže zmeniť. Rýchlosť výpočtu sa výrazne zvyšuje za zväčšovaní integračného kroku pri klesajúcej presnosti. Opačný jav pozorujeme, pokiaľ použijeme väčší počet členov Taylorovej rady, keď dosahujeme vyššiu presnosť, ale znižuje sa rýchlosť výpočtu. Pri výpočte každého ďalšieho člena Taylorovej rady využívame vyššej derivácie funkcie  $f(x)$ , ktorej môžeme vypočítať z predchádzajúceho člena a tým sa vyhnúť priamemu a náročnému výpočtu. Príklad a použitie na výpočet obyčajnej diferenciálnej rovnice si uvedieme v nasledujúcej kapitole zároveň s porovnaním jednotlivých metód.

### 2.3.2 Viackrokové metódy

Viackrokové metódy používajú k vyjadreniu nového stavu systému znalosť  $n$  predchádzajúcich stavov. Obecne nemôžeme povedať, že viackroková metóda je nutne efektívnejšia než

jednokroková. Pokiaľ budeme predpokladať spojitý systém, ktorý sa nevyvíja príliš dramaticky, je pravdepodobné, že odhad nového stavu bude presnejší. Viackrokové metódy používajú pri štarte výpočtu niektoré jednokrokové metódy. Pomocou jednokrokových metód vypočítame prvých  $n$  hodnôt, ktoré sú potrebné k výpočtu prvej hodnoty.

Obece vypadá lineárna  $k$ -kroková metóda takto:

$$y_{n+1} = a_1 y_n + a_2 y_{n-1} + \dots + a_k y_{n-k+1} + h(b_0 f_{n+1} + b_1 f_n + \dots + b_k f_{n+1-k}) \quad (2.22)$$

kde  $k$  je prirodzené číslo a aspoň jedna z konštant  $a_k, b_k$  je rôzna od nuly. Zrejmom nevýhodou  $k$ -krokovej metódy je, že riešenie v prvých  $k$  uzlových bodoch  $x_0, \dots, x_{k-1}$  musíme získať nejakým iným spôsobom. K tomuto účelu sa zpravidla používa jednokroková metóda rovnakého rádu presnosti, ako je ďalej použitá viackroková metóda.

## 2.4 Stabilita numerických metód

U nestabilnej metódy sa relatívne malé chyby v jednotlivých krokoch výpočtu postupne akumulujú tak, že dôjde k veľkej strate presnosti numerického riešenia úlohy.

U stabilných metód rastie chyba výsledku s počtom krokov  $N$  nanajvýš lineárne. U nestabilných rastie chyba rýchlejšie.

Nestabilita metódy vzniká v dôsledku akumulácie chýb. Typicky sa objavuje v rekurzívnych algoritmoch. Nestabilita metódy môže vznikáť v dôsledku akumulácie zaokrúhľovacích chýb, akumulácie chyby metódy, stabilita metódy môže závisieť na veľkosti použitého kroku  $h$ . Nestabilita metódy sa často objavuje pri numerickom riešení pre obyčajné a parciálne diferenciálne rovnice. A my si taktiež budeme porovnávať stabilitu jednotlivých metód pri výpočtoch v nasledovných kapitolách.

## Kapitola 3

# Riešenie ODR a porovnanie metód

### 3.1 Dôležitosť kroku

Vezmime si jednoduchý príklad počiatkovej úlohy  $y' = x^2 - y, y(0) = 1$  a riešme explicitnou Eulerovou metódou pre ODR na intervale  $< 0; 3 >$  najprv pre krok  $h = 0.2$ , potom pre  $h = 0.5$ .

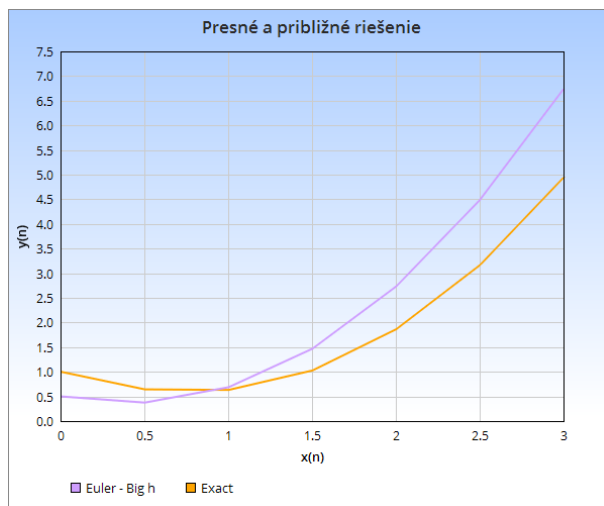
Na vyriešenie použijeme vzorec (2.17), dosadíme hodnoty a tým dostaneme ďalší vzorec:  $y_{n+1} = y_n + 0.5(x_n^2 - y_n), n = 0, 1, \dots, 6$  pomocou ktorého už ľahko vieme doplniť nasledujúcu tabuľku.

n	x(n)	y(n)Eul	y(n)Exact
0	0	0.5	1
1	0.5	0.375	0.643469340287367
2	1	0.6875	0.632120558828558
3	1.5	1.4688	1.02686983985157
4	2	2.7344	1.864664716763387
5	2.5	4.4922	3.167915001376101
6	3	6.7461	4.950212931632136

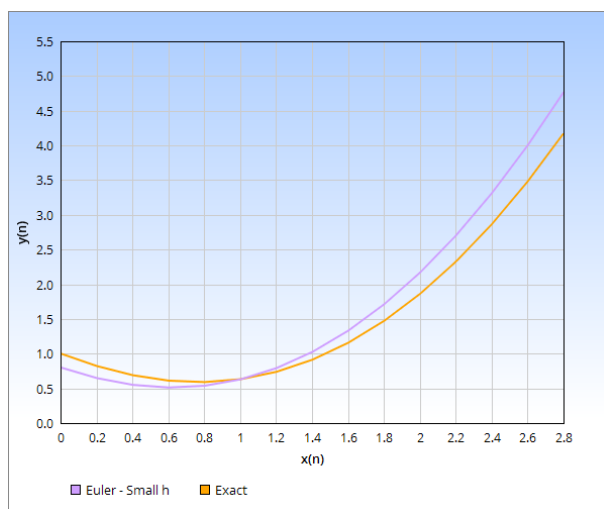
Stĺpec  $y(n)Exact$  je presné riešenie v daných uzlových bodoch, ktoré sme dostali použitím analytického riešenia z dole uvedenej rovnice, a použijeme ju na výpočet chyby:

$$y(n)Exact = -e^{-x} + x^2 - 2x + 2 \quad (3.1)$$

Tabuľku výsledkov pred krok  $h = 0.2$  si neukážeme. Ukážeme si len grafické výsledky a porovnáme si vplyv veľkosti kroku  $h$  na riešenie zadanej úlohy.



Obrázek 3.1: Presné a približné riešenie pri veľkom kroku



Obrázek 3.2: Presné a približné riešenie pri malom kroku

Na obrázku 3.1 vidíme riešenie, kde bol použitý väčší krok v porovnaní s exaktným riešením a vidíme, že chyba je dosť vysoká a na obrázku 3.2 vidíme riešenie s menším krokom a vidíme, že chyba je oveľa nižšia a riešenie sa blíži k exaktnému viac ako u väčšieho kroku.

## 3.2 Riešenie diferenciálnych rovníc Eulerovou metódou

V tejto časti si vypočítame hodnotu pre prvý krok Eulerovou metódou. Tentokrát budeme namiesto  $x(n)$  použiť  $t$  ako čas. My budeme riešiť rovnicu RC obvodu podľa obrázku 2.1. Máme zadané nasledujúce údaje odpor  $R = 200\Omega$ , kondenzátor  $C = 10^{-5}F$ , počiatočný čas  $t = 0$  a zdroj napätia  $U = 100V$ . Pre rovnaký integračný krok  $h = 0.1$  a počiatočnú podmienku  $u_c(0) = 1$  máme zadanú počiatočnú úlohu, ktorá vyzerá nasledovne:



$$u'_c = -\frac{1}{\tau}u_c + U$$

a ideme ju riešiť podľa vzorca (2.17).

Implementáciou metódy sme získali nasledovné hodnoty, ktoré sme doplnili do nasledovnej tabuľky:

n	t	uC(t)Eul
1	0.1	10.99
2	0.2	20.8801
3	0.3	30.671299
4	0.4	40.36458601
⋮	⋮	⋮
49	0.49	389.4938777067
50	0.5	395.5989389296
51	0.51	401.6429495403
⋮	⋮	⋮
98	0.98	626.9091838262
99	0.99	630.6400919879
100	1	634.3336910680

### 3.3 Riešenie diferenciálnych rovníc metódou Runge-Kutta

V tejto časti si vypočítame hodnotu pre prvý krok metódou Runge-Kutta. V prvom rade si musíme vypočítať hodnoty medzivýsledkov s použitím konštant z predchádzajúcich podkapitol  $k_1, k_2, k_3$  a  $k_4$  podľa vzorcov. Dosadíme to vzorca (2.18) a vyplníme nasledujúcu tabuľku:

n	t	y(t)RK4
1	0.1	10.9402160838
2	0.2	20.7815253649
3	0.3	30.5249119826
4	0.4	40.1713502836
⋮	⋮	⋮
49	0.49	387.9862321846
50	0.5	394.0758709216
51	0.51	400.1049167408
⋮	⋮	⋮
98	0.98	625.0642122166
99	0.99	628.7948856381
100	1	632.4884382388

### 3.4 Riešenie diferenciálnych rovníc Taylorovou radou

Pre výpočet zadanej diferenciálnej rovnice je použitá Taylorova rada 8. rádu. Vzorec (2.21) je možné prepísať na tvar:

$$y_{i+1} = y_i + DY1_i + DY2_i + DY3_i + DY4_i + \dots + DY(N)_i, \quad (3.2)$$

kde význam jednotlivých členov je nasledujúci:

$$\begin{aligned} DY1_i &= hy_i \\ DY2_i &= \frac{h^2}{2!}y_i = \frac{h}{2}DY1_i \\ DY3_i &= \frac{h^3}{3!}y_i = \frac{h}{3}DY2_i \\ DY4_i &= \frac{h^4}{4!}y_i = \frac{h}{4}DY3_i \\ DY(N)_i &= \frac{h^n}{n!}y_i = \frac{h}{n}DY(N-1)_i \end{aligned} \quad (3.3)$$

Implementáciou metódy sme získali nasledovné hodnoty, ktoré sme doplnili do nasledovnej tabuľky:

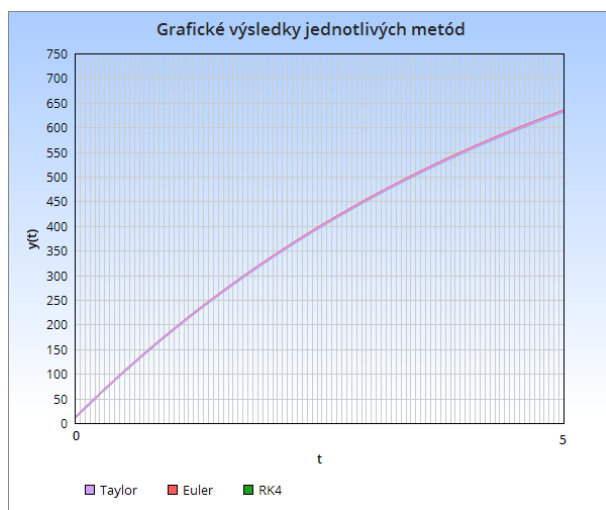
n	t	y(t)Taylor
1	0.1	10.9402160838
2	0.2	20.7815253649
3	0.3	30.5249119826
4	0.4	40.1713502836
⋮	⋮	⋮
49	0.49	387.9862321846
50	0.5	394.0758709216
51	0.51	400.1049167408
⋮	⋮	⋮
98	0.98	625.0642122166
99	0.99	628.7948856381
100	1	632.4884382388

### 3.5 Porovnanie presnosti a stability metód

Teraz, aby to bolo prehľadne, všetko si zhrnieme do nasledovnej tabuľky a porovnáme s exaktným riešením:

n	t	y(t)Eul	y(t)RK4	y(t)Taylor	y(t)Exact
1	0.1	10.99	10.9402160838	10.9402160846	10.9402160846
2	0.2	20.8801	20.7815253649	20.7815253666	20.7815253666
3	0.3	30.671299	30.5249119826	30.5249119850	30.5249119850
4	0.4	40.36458601	40.1713502836	40.1713502868	40.1713502868
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
49	0.49	389.4938777067	387.9862321846	387.9862322098	387.9862322098
50	0.5	395.5989389296	394.0758709216	394.0758709471	394.0758709471
51	0.51	401.6429495403	400.1049167408	400.1049167665	400.1049167665
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
98	0.98	626.9091838262	625.0642122166	625.0642122475	625.0642122475
99	0.99	630.6400919879	628.7948856381	628.7948856690	628.7948856690
100	1	634.3336910680	632.4884382388	632.4884382697	632.4884382697

Ďalej si zobrazíme grafické výsledky:

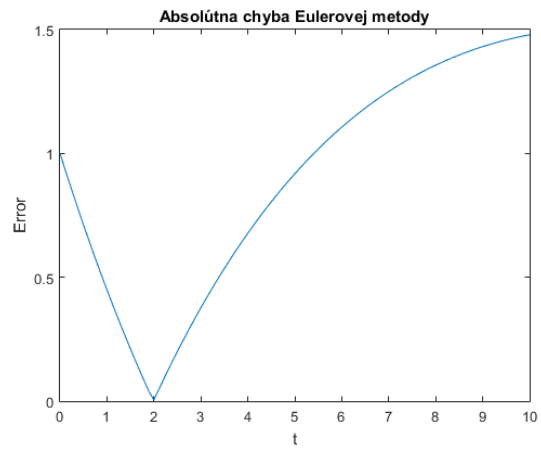


Obrázek 3.3: Grafické výsledky jednotlivých metód

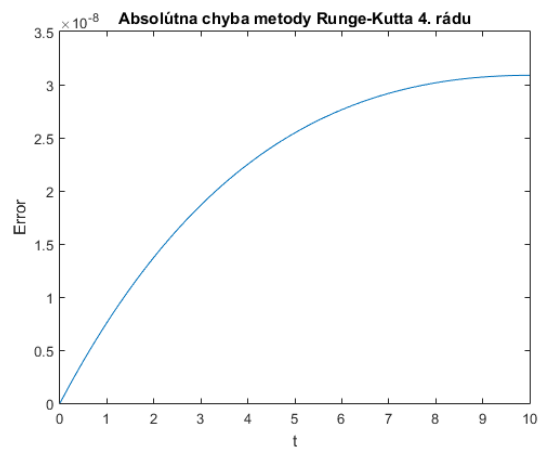
Avšak nie je vidno veľký rozdiel medzi metódami. Pre porovnanie metód však bude najjednoduchšie zobrazit ich absolútnu chybu.  $e_n = |y(t_n) - y_n|$

n	y(t)Eul	y(t)RK4	y(t)Taylor
1	0.0497839154	0.0000000008	0.000000000000078
2	0.0985746334	0.0000000016	0.000000000000021
3	0.1463870150	0.0000000024	0.000000000000043
4	0.1932357232	0.0000000032	0.000000000000007
⋮	⋮	⋮	⋮
49	1.5076454969	0.0000000252	0.000000000000057
50	1.5230679825	0.0000000255	0.000000000000057
51	1.5380327738	0.0000000257	0.0000000000000171
⋮	⋮	⋮	⋮
98	1.8449715787	0.0000000309	0.0000000000000341
99	1.8452063189	0.0000000309	0.0000000000000455
100	1.8452527983	0.0000000309	0.0000000000000341

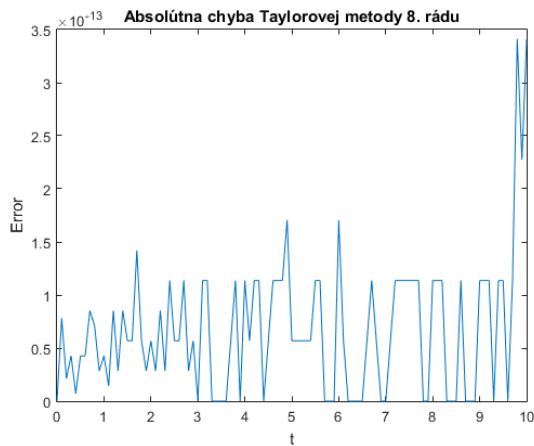
Teraz si zobrazíme grafy chýb jednotlivých metod.



Obrázek 3.4: Chyba Eulerovej metódy



Obrázek 3.5: Chyba RK4 metódy



Obrázek 3.6: Chyba Taylorovej metódy

Z grafov a tabuľky je jednoznačné, ktorá z metód je najpresnejšia. A tou je metóda Taylorovej rady, ktorá je presná až na 14 desatinných miest, za ňou nasleduje metóda RK4, ktorá je presná na 7 desatinných miest a najmenej presná ale zase zároveň najrýchlejšia je Eulerova metóda. Z pohľadu stability vidíme, že u Eulerovej metódy sa chyba presnosti postupne akumuluje a vedie v väčšej odýchlke od exaktného riešenia. U metódy Runge-Kutta sa chyba akumuluje značne pomalšie ako u Eulerovej metódy a u metódy Taylorovej rady sa chyba akumuluje ešte pomalšie než u metódy Runge-Kutta, z čoho vyplýva, že metóda Taylorovej rady je z týchto metód najstabilnejšia. Stabilitu jednotlivých metód by bolo výraznejšie vidieť v prípade použitia väčšieho integračného kroku  $h$ .

### 3.6 Využitie Taylorovej Metódy

Riešenie diferenciálnych rovníc metódou Taylorovej rady sa vyznačuje vysokou presnosťou a stabilitou. Pri prevádzaní experimentálnych výpočtov bolo zistené, že táto metóda dosahuje ďaleko rýchlejšie a presnejšie výpočty než u bežne v praxi používaných metód numerickeho riešenia diferenciálnych rovníc. Metóda Taylorovej rady je moderná metóda a mnoho výpočtov, ktoré su pomocou metódy realizované, môžu byť prevádzané nezávisle na sebe v paralelne oddelených procesoch. Podľa požadovanej presnosti je použitých toľko členov Taylorovej rady, koľko je potreba k danej presnosti. Stabilitu a rýchlosť je možné ovplyvniť úpravou dĺžky použitého integračného kroku pre daný rád. Metódu Taylorovej rady navrhol a vyvinul na Ústave informatiky a výpočtovej techniky FEI VUT v Brne Doc. Kunovský.

## Kapitola 4

# Riešenie sústavy lineárnych diferenciálnych rovníc

Sústavou lineárnych diferenciálnych rovníc s konštantnými koeficientami rozumieme sústavu

$$\begin{aligned}y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12} + \cdots + a_{1n}y_n + b_1 \\y_2' &= a_{21}y_1 + a_{22} + \cdots + a_{2n}y_n + b_2 \\&\vdots \\y_n' &= a_{n1}y_1 + a_{n2} + \cdots + a_{nn}y_n + b_n,\end{aligned}$$

kde  $a_{ij} \in R, i, j = 1, 2, \dots, n$  nazývame koeficienty sústavy a funkcia  $b_i, i = 1, 2, \dots, n$  definovanej na nejakom intervale  $I$  nazývame pravé strany.

Ak sú pravé strany nulové, nazývame sústavu homogénnou, v opačnom prípade nehomogénne. Počiatočnými podmienkami v bode  $t_0 \in I$  rozumieme

$$\begin{aligned}y_1(t_0) &= y_{1,0}, \\y_2(t_0) &= y_{2,0}, \\&\vdots \\y_n(t_0) &= y_{n,0}.\end{aligned}$$

Sústavu diferenciálnych rovníc môžeme tiež zapísať v maticovom tvare

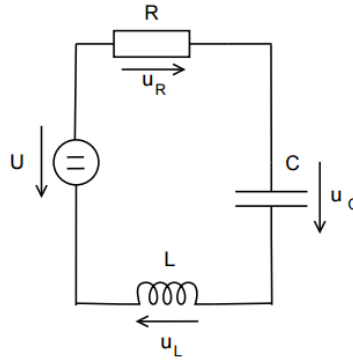
$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

alebo taktiež vektorovo

$$\vec{y}' = A\vec{y} + \vec{b}, \tag{4.1}$$

kde vektorové funkcie  $\vec{y}, \vec{y}'$  a  $\vec{b}$  su zapísané ako stĺpcové vektory. Matica  $A$  sa nazýva matica sústavy.<sup>[2]</sup>

## 4.1 Analytické riešenie



Obrázek 4.1: RLC obvod

Máme zadaný sériový obvod RLC ako na Obr.4.1 na vetvy tvorenej sériovo spojeným odporom  $R = 10\Omega$ , cievkou  $L = 2,5H$  a kondenzátorom  $C = 0,1F$  v okamihu  $t = 0s$  pripojíme na zdroj jednosmerného napätia. Napätie na kondenzátore v okamihu  $t = 0s$  je  $u_C(0) = 0V$ ,  $i_L(0) = 0A$ ,  $U = 1V$ .

Riešením obvodu na Obr.4.1 pomocou II. Kirchhoffovho zákona, Ohmovho zákona a dif. rovníc, dostávame diferenciálnu rovnicu 2. rádu obecné takto: Obvod popíšeme systémom rovníc [14]:

$$\begin{aligned}u_L &= U - u_r - u_C = U - Ri - u_C \\u'_C &= \frac{1}{C}u_L, u_C(0) = 1 \\i'_L &= \frac{1}{L}u_L, i_L(0) = 1\end{aligned}$$

Deriváciami a dosadením dostaneme:

$$LCu''_C + RCu'_C + u_C = U, \quad u_C(0) = 1, \quad u'_C = \frac{i_L(0)}{C} = \frac{1}{C} \quad (4.2)$$

Hľadáme analytické riešenie nehomogénnej dif. rovnice 2. rádu (počiatočnej úlohy) s konštantnými koeficientami (4.2).

Riešime najprv charakteristickú rovnicu homogénnej diferenciálnej rovnice:

$$LC\lambda^2 + RC\lambda + 1 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-RC \pm \sqrt{(RC)^2 - 4LC}}{2LC} \quad (4.3)$$

Rovnica (4.3) má 3 možné riešenia, rozhodujeme podľa hodnoty diskriminantu  $D = (RC)^2 - 4LC$ :

1.  $\lambda_{1,2}$  reálne rôzne  $D > 0 \rightarrow \lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R}$



2.  $\lambda_{1,2}$  reálne zhodné  $D = 0 \rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 \in R$
3.  $\lambda_{1,2}$  komplexne združené  $D < 0 \rightarrow \lambda_{1,2} = a \pm ib \in I$

potom očakávané riešenia k jednotlivým možnostiam budú:

1.  $u_{Ch} = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$
2.  $u_{Ch} = e^{\lambda t} (C_1 t + C_2)$
3.  $u_{Ch} = e^{at} (C_1 \cos(bt) + C_2 \sin(bt))$

V nasom prípade  $\lambda_{1,2}$  sú reálne zhodné.  $D = (10 * 0.1)^2 - (4 * 2.5 * 0.1) = 0$

Hľadáme obecné analyticky riešenie pre prípad keď  $D = (RC)^2 - 4LC = 0$ , korene charakteristickej rovnice (4.3) potom sú:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{R}{2L}$$

Očakávané riešenie homogénnej rovnice je

$$u_{Ch} = e^{\lambda t} (C_1 t + C_2)$$

Teraz vypočítame partikulárne integrály:

$$u_{Cp} = C_3$$

$$u'_{Cp} = 0$$

$$u''_{Cp} = 0$$

Dosadíme  $u_{Cp}, u'_{Cp}$  a  $u''_{Cp}$  do pôvodnej nehomogénnej rovnice (4.2)

$$C_3 = U$$

Obecné riešenie nehomogénnej diferenciálnej rovnice (4.2)

$$u_C = u_{Ch} + u_{Cp}$$

$$u_C = e^{-\frac{R}{2L}t} (C_1 t + C_2) + U \quad (4.4)$$

Počiatočnú podmienku  $u_C(0) = 0$  dosadíme do obecného riešenia (4.4):

$$0 = C_2 + UC_2 = -U \quad (4.5)$$

Pre dosadenie  $u'_C(0) = 0$  musíme najprv obecné riešenie (4.4) derivovať

$$u'_C = -\frac{R}{2L} e^{-\frac{R}{2L}t} (C_1 t + C_2) + e^{-\frac{R}{2L}t} C_1 \quad (4.6)$$

$$0 = -\frac{R}{2L} C_2 + C_1$$

$$C_1 = \frac{R}{2L} C_2 = -\frac{RU}{2L} \quad (4.7)$$

Výsledné analytické riešenie  $u_C$  je potom

$$u_C = e^{-\frac{R}{2L}t} \left( -\frac{RU}{2L} t - U \right) + U \quad (4.8)$$

Partikulárne riešenie  $i$  získame zo vzťahu  $i = u'_C * C$ , deriváciu  $u'_C$  sme už vypočítali (4.6)

$$i_L = \left( -\frac{R}{2L} e^{-\frac{R}{2L}t} \left( -\frac{RU}{2L} t - U \right) + e^{-\frac{R}{2L}t} \left( -\frac{RU}{2L} \right) \right) * C \quad (4.9)$$

## 4.2 Numerické riešenie

Majme diferenciálne rovnice popisujúce napätie na kondenzátore a prúd pretekajúci cievkou obvodom Obr.4.1.

$$\begin{aligned}i_L' &= \frac{1}{L} * (U - R * i_L - u_C), \\u_C' &= -\frac{1}{C} * i_L\end{aligned}\tag{4.10}$$

s počiatočnými podmienkami

$$\begin{aligned}i_L(0) &= 0 \\u_C(0) &= 0,\end{aligned}$$

kde  $U, R, L, C$  sú konštanty.

## 4.3 Riešenie sústavy Eulerovou metódou

Majme explicitnú Eulerovu metódu (numerická metóda prvého rádu) tvaru

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + hy'(t_i),\tag{4.11}$$

kde  $h$  je intergračný krok.

Ak riešime diferenciálne rovnice (4.10) pomocou Eulerovej metódy (4.11) dostaneme výsledný vzťah

$$\begin{aligned}i_{L_{i+1}} &= i_{L_i} + h * \left(\frac{1}{L} * (U - R * i_{L_i} - u_{C_i})\right) \\u_{C_{i+1}} &= u_{C_i} + h * \left(-\frac{1}{C} * i_{L_i}\right)\end{aligned}\tag{4.12}$$

Sústava je riešená nasledovných vzorcom:

$$y_{i+1} = \vec{y}_i + h * (A * \vec{y}_i + \vec{b})\tag{4.13}$$

kde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1/C \\ -1/L & -R/L \end{pmatrix}, \vec{y}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 \\ U/L \end{pmatrix}$$

V nasledovnej tabulke si ukážeme výsledky sústavy Eulerovou metódou pre  $u_C$  a  $i_L$ .

n	t	Euler(iL)	Euler(uC)
1	0.00000	0	0.0
2	0.05000	0.02	0
3	0.10000	0.036	0.01
4	0.15000	0.0486	0.028
⋮	⋮	⋮	⋮
19	0.90000	0.0600378541188	0.549716094109003
20	0.95000	0.05703596141286	0.579735021168402
21	1.00000	0.05403406870692	0.608253001874832
⋮	⋮	⋮	⋮
38	1.85000	0.015409425288738	0.904704869924907
39	1.90000	0.014233442832493	0.912409582569277
40	1.95000	0.013138562614609	0.919526303985523

#### 4.4 Riešenie sústavy metódou Runge-Kutta

Metóda RK4 pre sústavu rovníc má nasledovný tvar:

$$\begin{aligned}
\vec{k}_1 &= \vec{F}(t_i, \vec{y}_i), \\
\vec{k}_2 &= \vec{F}\left(t_i + \frac{1}{2}h, \vec{y}_i + \frac{1}{2}h * \vec{k}_1\right), \\
\vec{k}_3 &= \vec{F}\left(t_i + \frac{1}{2}h, \vec{y}_i + \frac{1}{2}h * \vec{k}_2\right), \\
\vec{k}_4 &= \vec{F}(t_i + h, \vec{y}_i + h * \vec{k}_3), \\
\vec{y}_{i+1} &= \vec{y}_i + \frac{1}{6}h * (\vec{k}_1 + 2 * \vec{k}_2 + 2 * \vec{k}_3 + \vec{k}_4).
\end{aligned}$$

kde  $\vec{F}$  je vektor rovníc (4.10) vektory  $\vec{k}_1 - \vec{k}_4$  sú vektory konštant pre rovnice a  $\vec{y}_i$  pre  $i = 0$  je vektor počiatočných podmienok a pre  $i > 0$  vektor veľkosti hodnôt napätia a prúdu.

Ako v predchádzajúcej kapitole si vyplníme nasledovnú tabuľku:

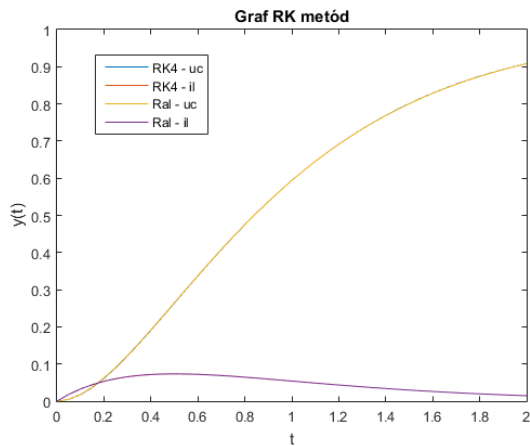
n	t	RK4(iL)	RK4(uC)
1	0.00000	0	0.0
2	0.05000	0.018096666666667	0.004679166666667
3	0.10000	0.032749085250000	0.017523672343750
4	0.15000	0.044448900637345	0.036937074812096
⋮	⋮	⋮	⋮
19	0.90000	0.059507422762287	0.537163728444138
20	0.95000	0.056835911401652	0.566251566346164
21	1.00000	0.054133962087255	0.593994661141933
⋮	⋮	⋮	⋮
38	1.85000	0.017001766842945	0.892620316924255
39	1.90000	0.015788674000642	0.900814647040510
40	1.95000	0.014652496729288	0.908421811100356

Okrem najpoužívanejšieho typu metódy Runge-Kutta 4. rádu poznáme aj iné ďalšie typy. Pre zaujímavosť si spravíme podobnú metódu založenú na RK4 nazývanú Ralstonova metóda a porovnáme si ju s RK4. Má nasledovný tvar:

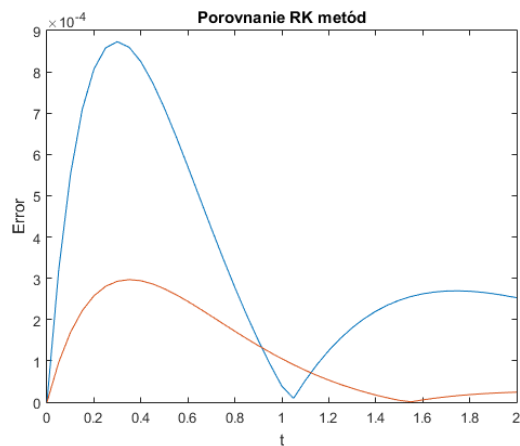
$$\begin{aligned}
 k_1 &= f(t_n, y_n), \\
 k_2 &= f\left(t_n + \frac{2}{3}h, y_n + \frac{2}{3}hk_1\right), \\
 y_{n+1} &= y_n + h\left(\frac{1}{4}k_1 + \frac{3}{4}k_2\right).
 \end{aligned}$$

n	t	RK4(iL)	RK4(uC)	Ral(iL)	Ral(uC)
1	0.00000	0	0.0	0	0.0
2	0.05000	0.018096666666667	0.004679166666667	0.018	0.005
3	0.10000	0.032749085250000	0.017523672343750	0.03258	0.018075
4	0.15000	0.044448900637345	0.036937074812096	0.04422735	0.062359704375
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
19	0.90000	0.059507422762287	0.537163728444138	0.059370520541353	0.537313072941617
20	0.95000	0.056835911401652	0.566251566346164	0.056715338928253	0.566343241820518
21	1.00000	0.054133962087255	0.593994661141933	0.054028822873757	0.594033428129130
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
38	1.85000	0.017001766842945	0.892620316924255	0.017023683339887	0.892357557828929
39	1.90000	0.015788674000642	0.900814647040510	0.015811865881087	0.900556427542734
40	1.95000	0.014652496729288	0.908421811100356	0.014676654997317	0.908168985051509

Ďalej si zobrazíme grafické výsledky a nasledované porovnaním týchto metód. Na obrázku 4.2 vidíme grafický výsledok oboch metód a na obrázku 4.3 vidíme ich rozdiel medzi sebou.



Obrázek 4.2: Grafický výsledok



Obrázek 4.3: Rozdiel medzi metódami

## 4.5 Riešenie sústavy Taylorovou radou

Najpresnejšie numerické riešenie diferenciálnych rovníc nám poskytuje Taylorova rada tvaru

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + hy'(t_i) + \frac{h^2}{2!}y''(t_i) + \dots + \frac{h^n}{n!}y^{(n)}(t_i), \quad (4.14)$$

kde  $h$  je integračný krok. Riešme sústavu diferenciálnych rovníc (4.10) pomocou Taylorovej rady (4.14)

$$\begin{aligned} i_{L_{i+1}} &= i_{L_i} + h'i_{L_i} + \frac{h^2}{2!}i_{L_i}'' + \dots + \frac{h^n}{n!}i_{L_i}^{(n)} \\ u_{C_{i+1}} &= u_{C_i} + h'u_{C_i} + \frac{h^2}{2!}u_{C_i}'' + \dots + \frac{h^n}{n!}u_{C_i}^{(n)} \end{aligned}$$

Musíme si vyjadriť vyššie derivácie funkcie  $i_L$

$$\begin{aligned}
i'_L &= \frac{1}{L}(U - Ri_L - u_C) \\
i''_L &= \frac{1}{L}(U - Ri'_L - u'_C) = \frac{1}{L}\left(-R\left(\frac{1}{L}(U - Ri_L - u_C)\right) - \frac{1}{C}(i_L)\right) \\
i'''_L &= \frac{1}{L}(U - Ri''_L - u''_C) = \frac{1}{L}\left(-R\left(\frac{1}{L}\left(-R\left(\frac{1}{L}(U - Ri_L - u_C)\right) - \frac{1}{C}(i_L)\right)\right) - \frac{1}{C}\left(\frac{1}{L}(-Ri_L - u_C)\right)\right) \\
&\vdots
\end{aligned}$$

a vyššie derivácie  $u_C$

$$\begin{aligned}
u'_C &= \frac{1}{C}(i_L) \\
u''_C &= \frac{1}{C}(i'_L) = \frac{1}{C}\left(\frac{1}{L}(U - Ri_L - u_C)\right) \\
u'''_C &= \frac{1}{C}(i''_L) = \frac{1}{C}\left(\frac{1}{L}\left(-R\left(\frac{1}{L}(U - Ri_L - u_C)\right) - \frac{1}{C}(i_L)\right)\right) \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Výsledný tvar Taylorovej rady pre numerické riešenie sústavy diferenciálnych rovníc (4.14) je

$$\begin{aligned}
i_{L_{i+1}} &= i_{L_i} + h\left(\frac{1}{L}(-Ri_{L_i} - u_{C_i})\right) + \\
&\quad + \frac{h^2}{2}\left(\frac{1}{L}\left(-R\left(\frac{1}{L}(U - Ri_{L_i} - u_{C_i})\right) - \frac{1}{C}(i_{L_i})\right)\right) + \\
&\quad + \frac{h^3}{3!}\left(\frac{1}{L}\left(-R\left(\frac{1}{L}\left(-R\left(\frac{1}{L}(U - Ri_{L_i} - u_{C_i})\right) - \frac{1}{C}(i_{L_i})\right)\right) - \frac{1}{C}\left(\frac{1}{L}(-Ri_{L_i} - u_{C_i})\right)\right)\right) + \\
&\quad + \dots \\
u_{C_{i+1}} &= u_{C_i} + h\left(\frac{1}{C}(i_{L_i})\right) + \\
&\quad + \frac{h^2}{2}\left(\frac{1}{C}\left(\frac{1}{L}(U - Ri_{L_i} - u_{C_i})\right) - \frac{1}{C}(i_{L_i})\right) + \\
&\quad + \frac{h^3}{3!}\left(\frac{1}{C}\left(\frac{1}{L}\left(-R\left(\frac{1}{L}(U - Ri_{L_i} - u_{C_i})\right) - \frac{1}{C}(i_{L_i})\right)\right)\right) + \\
&\quad + \dots
\end{aligned}$$

Rovnicu (4.10) si prepíšeme na maticový zápis

$$\begin{pmatrix} u'_c \\ i'_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} u_c \\ i_L \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{U}{L} \end{pmatrix}$$

Pomocou vektorového zápisu (4.1) a maticového zápisu si vieme zapísať na podobný tvar ako je (3.2)

$$\overrightarrow{y_{i+1}} = \overrightarrow{y_i} + \overrightarrow{DY1_i} + \overrightarrow{DY2_i} + \overrightarrow{DY3_i} + \dots + \overrightarrow{DYN_i}, \quad (4.15)$$

kde jednotlivé členy podobne ako u vzorcov (3.3) vieme rozpisat na

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{DY0} &= \vec{y}_i \\
 \overrightarrow{DY1} &= h\vec{y}_i' = h(A\vec{y} + b) \\
 \overrightarrow{DY2} &= \frac{h^2}{2!}\vec{y}_i'' = \frac{h^2}{2!}(A\vec{y}_i') = \frac{h}{2!}A\overrightarrow{DY1} \\
 \overrightarrow{DY3} &= \frac{h}{3}A\overrightarrow{DY2} \\
 &\vdots \\
 \overrightarrow{DYN} &= \frac{h}{n}A\overrightarrow{DY(N-1)}
 \end{aligned}$$

a všeobecný tvar pre výpočet n-tej derivácie je odvodený nasledovne

$$\overrightarrow{DYN} = \frac{h^n}{n!}(A^n\vec{y} + A^{n-1}\vec{b})$$

Po výpočtoch vidíme výsledky v nasledovnej tabuľke:

n	t	Taylor(iL)	Taylor(uC)
1	0.00000	0	0.0
2	0.05000	0.018096748360714	0.004678840160466
3	0.10000	0.032749230123110	0.017523096306461
4	0.15000	0.044449093240891	0.036936313113819
⋮	⋮	⋮	⋮
19	0.90000	0.059507599759758	0.537163112979615
20	0.95000	0.056836075304589	0.566251004254412
21	1.00000	0.054134113294633	0.593994150290212
⋮	⋮	⋮	⋮
38	1.85000	0.017001786610683	0.892620295090417
39	1.90000	0.015788690927725	0.900814633915569
40	1.95000	0.014652511110985	0.908421805556338

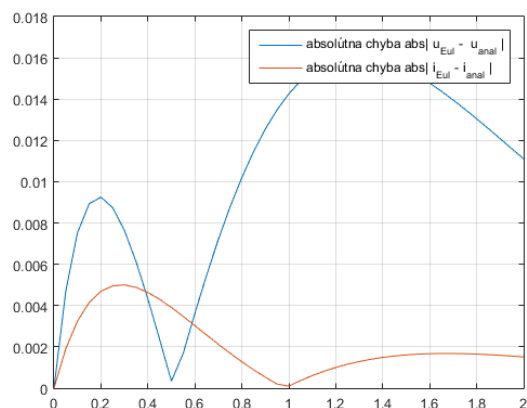
## 4.6 Porovnanie presnosti a stability metód

Na zhrnutie si v nasledujúcich tabuľkách ukážeme výsledky a porovnáme ich s exaktným riešením.

n	t	Eul(il)	RK4(il)	Taylor(il)	Exact(il)
1	0	0.0	0.0	0.0	0.0
2	0.05	0.02	0.018096666666667	0.018096748360714	0.018096748360719
3	0.1	0.036	0.032749085250000	0.032749230123110	0.032749230123119
4	0.15	0.0486	0.044448900637345	0.044449093240891	0.044449093240903
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
19	0.90	0.0600378541188	0.059507422762287	0.059507599759758	0.059507599759771
20	0.95	0.05703596141286	0.056835911401652	0.056836075304589	0.056836075304601
21	1	0.05403406870692	0.054133962087255	0.054134113294633	0.054134113294645
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
38	1.85	0.015409425288738	0.017001766842945	0.017001786610683	0.017001786610686
39	1.9	0.014233442832493	0.015788674000642	0.015788690927725	0.015788690927727
40	1.95	0.013138562614609	0.014652496729288	0.014652511110985	0.014652511110987

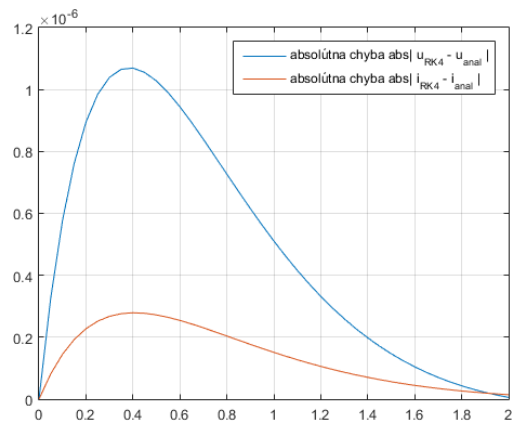
n	t	Eul(uc)	RK4(uc)	Taylor(uc)	Exact(uc)
1	0	0.0	0.0	0.0	0.0
2	0.05	0.01	0.004679166666667	0.004678840160466	0.004678840160444
3	0.1	0.028	0.017523672343750	0.017523096306461	0.017523096306422
4	0.15	0.0523	0.036937074812096	0.036936313113819	0.036936313113767
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
19	0.90	0.579735021168402	0.537163728444138	0.537163112979615	0.537163112979558
20	0.95	0.608253001874832	0.566251566346164	0.566251004254412	0.566251004254358
21	1	0.635270036228292	0.593994661141933	0.593994150290212	0.593994150290162
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
38	1.85	0.904704869924907	0.892620316924255	0.892620295090417	0.892620295090405
39	1.9	0.912409582569277	0.900814647040510	0.900814633915569	0.900814633915558
40	1.95	0.919526303985523	0.908421811100356	0.908421805556338	0.908421805556329

Teraz si zobrazíme grafické chyby pre lepší prehľad.

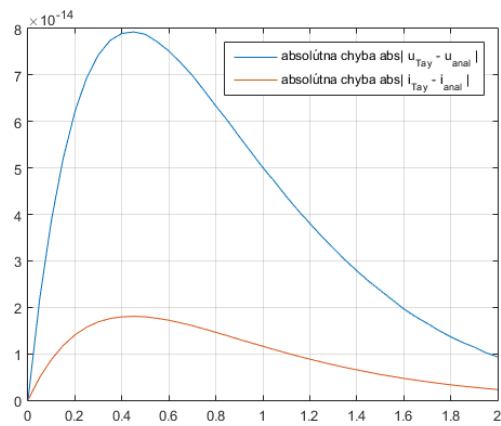


Obrázek 4.4: Chyba Euler





Obrázek 4.5: Chyba RK4



Obrázek 4.6: Chyba Taylor

Opäť sa ukázalo, že Taylorova rada je najbližšie k exaktnému riešeniu, nasledované metódou Runge-Kutta a Eulerovou metódou. Z pohľadu stability je to podobné ako v predchádzajúcej kapitole. V tomto prípade bol použitý malý integračný krok a nárast a akumulácia chýb pri jednotlivých metódach je veľmi malý avšak opäť sa ukázalo, že najstabilnejšie metóda je Taylorova rada nasledovaná metódou Runge-Kutta a nakoniec Eulerovou metódou.

## Kapitola 5

# Riešenie sústavy nelineárnych diferenciálnych rovníc

### 5.1 Stiff systémy

Stiff systémy(rovnice) sú diferenciálne rovnice, pre ktoré numerická metóda je numericky nestabilná, pokiaľ nie je krok metódy extrémne malý. V rovnici sa vyskytujú členy, ktoré spôsobujú rýchlu zmenu riešenia. Sú to napríklad rovnice typu:

$$y' = ky + f(t),$$

kde  $k \in C$ ,  $|k|$  je veľka  
alebo sústavy

$$y' = Ky + f(t),$$

kde  $K$  je pomer tuhosti, ktorý sa získa podielom maximálne reálnej časti vlastného čísla v absolútnej hodnote a minimálnej reálnej časti vlastného čísla v absolútnej hodnote.

### 5.2 ODE Solvery

ODE solver je súčasť softwaru MATLAB, ktorý je určený pre riešenie obyčajných diferenciálnych rovníc. Jedná sa o funkciu s danými parametrami ako je časový interval, počiatočné podmienky, daná rovnica na vyriešenie a popríklad ďalšie možnosti pre funkciu. V nasledovnej kapitole sa stretneme s ODE solvermi ODE23 a ODE45. Obidva tieto solvery sú založené na metóde Runge-Kutta, ODE23 na základe RK2 a ODE45 na základe RK4. Budú využité na porovnanie presnosti a času výpočtu s Taylorovou metódou a aj medzi sebou na niekoľkých rôznych príkladoch stiff aj nonstiff ODR.

### 5.3 Riešenie SNDR a porovnanie s ODE solvermi

Doposiaľ sme počítali s jednoduchými lineárnymi rovnicami a sústavami lineárnych rovníc. Tento krát si budeme počítať sústavy nelineárnych rovníc, ktoré budú zahrňovať nelineárny

člen v tomto prípade to bude kvadratický člen a zmiešaný člen.

Máme nasledovnú sústavu rovníc:

$$\begin{aligned}y_1' &= a_{11}y_1^2 + a_{12}y_2^2 + b_1y_1y_2 + c_{11}y_1 + c_{12}y_2 \\y_2' &= a_{21}y_1^2 + a_{22}y_2^2 + b_2y_1y_2 + c_{21}y_1 + c_{22}y_2,\end{aligned}$$

kde vidíme, že už máme okrem lineárneho člena ( $c_{11}y_1, c_{12}y_2, \dots$ ) kvadratický člen ( $a_{11}y_1^2, a_{12}y_2^2, \dots$ ) a zmiešaný člen ( $b_1y_1y_2, b_2y_1y_2$ ). My si ďalej budeme rozoberať kvadratický člen.

Máme nasledovný kvadratický člen:

$$\begin{aligned}y_1' &= a_{11}y_1^2 + a_{12}y_2^2 \\y_2' &= a_{21}y_1^2 + a_{22}y_2^2,\end{aligned}$$

ktorý vieme zapísať skrátene vektorovo

$$\vec{y}' = A * \vec{y}^2,$$

kde

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, y^2 = \begin{pmatrix} y_1^2 \\ y_2^2 \end{pmatrix}$$

alebo maticovo

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} y_1 & 0 \\ 0 & y_2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}y_1^2 + a_{12}y_2^2 \\ a_{21}y_1^2 + a_{22}y_2^2 \end{pmatrix}$$

alebo

$$\begin{pmatrix} a_{11}y_1 & a_{12}y_2 \\ a_{21}y_1 & a_{22}y_2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}y_1^2 + a_{12}y_2^2 \\ a_{21}y_1^2 + a_{22}y_2^2 \end{pmatrix}$$

Ďalej si odvodíme vyššie derivácie rovníc.

$$\begin{aligned}y_1'' &= a_{11}y_1'y_1 + a_{11}y_1y_1' + a_{12}y_2'y_2 + a_{12}y_2y_2' \\y_2'' &= a_{21}y_1'y_1 + a_{21}y_1y_1' + a_{22}y_2'y_2 + a_{22}y_2y_2'\end{aligned}\tag{5.1}$$

V tomto prípade vidíme, že platí pravidlo komutatívnosti. A to nasledovne:

$$\vec{y}'' = 2 * A * \vec{y}' * \vec{y} = 2 * A * \vec{y} * \vec{y}',$$

kde

$$\vec{y}' * \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1' y_1 \\ y_2' y_2 \end{pmatrix}$$

Takže druhú deriváciu (5.1) vieme zjednodušiť na

$$\begin{aligned} y_1'' &= 2a_{11}y_1'y_1 + 2a_{12}y_2y_2' \\ y_2'' &= 2a_{21}y_1'y_1 + 2a_{22}y_2y_2' \end{aligned}$$

Tretiu deriváciu zapíšeme maticovo/vektorovo nasledovne:

$$\vec{y}''' = 2 * A * (\vec{y}' * \vec{y})' = 2 * A * (\vec{y}'' * \vec{y} + \vec{y}' * \vec{y}') \quad (5.2)$$

Štvrtú deriváciu podobne:

$$\vec{y}^4 = 2 * A * (\vec{y}''' * \vec{y} + \vec{y}'' * \vec{y}' + \vec{y}'' * \vec{y}' + \vec{y}' * \vec{y}'') \quad (5.3)$$

Na všetkých tých deriváciách vidíme istú podobnosť. A to, že všetky výrazy v zátvorkách pri jednotlivých vyšších deriváciách zodpovedajú presnej polovici Pascalovho trojuholníka, ktorý vyzerá nasledovne aj s doplnenými deriváciami.

$y'$ :				$1^{(y*y)}$					
$y''$ :			$1^{(y'*y)}$		$1^{(y'*y)}$				
$y'''$ :			$1^{(y''*y)}$	$2^{(y'*y')}$		$1^{(y*y'')}$			
$y^{(4)}$ :		$1^{(y'''*y)}$		$3^{(y''*y')}$	$3^{(y'*y'')}$		$1^{(y*y''')}$		
$y^{(5)}$ :	$1^{(y^4*y)}$		$4^{(y'''*y')}$		$6^{(y''*y'')}$		$4^{(y''*y''')}$		$1^{(y*y^4)}$

Avšak okrem zápisu vyšších derivácií podľa Pascalovho trojuholníka, je možné vzťah pred našu sústavu obecné a to takto:

$$\vec{y}^{(p)} = A * \left( \sum_{i=0}^{p-2} \vec{y}^{(p-1*i)} \vec{y}^{(i)} \frac{(p-1)!}{i! * (p-i)!} + \vec{y} * \vec{y}^{(p-1)} \right)$$

A teraz ukážeme konkrétny príklad a jeho riešenie rôznymi metodami, porovnáme výsledky a vypočítame absolútne chyby metód a porovnáme rozdiely v čase výpočtu jednotlivých metód.

Majme zadanú jednoduchú sústavu dvoch nelineárnych rovníc a ich počiatkové podmienky:

$$\begin{aligned} y_1' &= 2 * (y_1 - y_1 y_2), & y_1(0) &= 1, \\ y_2' &= -(y_2 - y_1 y_2), & y_2(0) &= 3, \end{aligned}$$

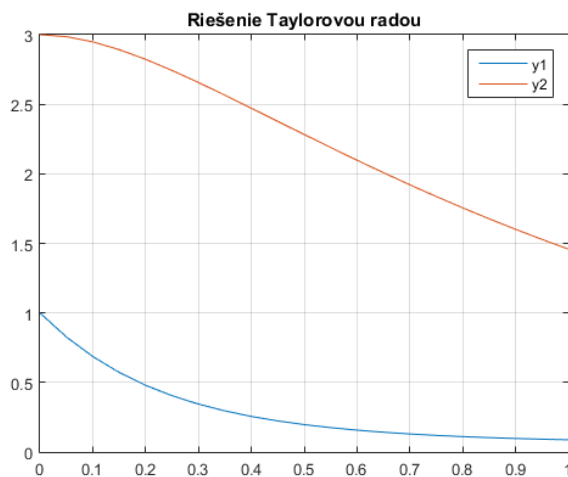
Určíme si matice pre výpočet, kde matica A zodpovedá konštantám pri rýdzo kvadratických členoch, matica B zodpovedá konštantám pri zmiešaných členoch, matica C zodpovedá konštantám pri lineárnych členoch a matica D sú len konštanty.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

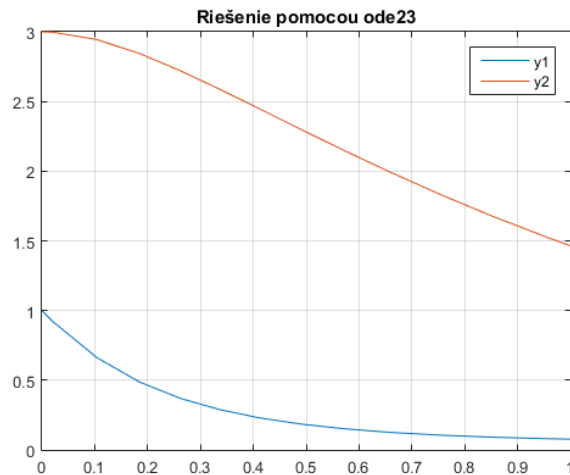
A teraz vypočítame sústavu jednotlivými metódami, ukážeme si grafy výsledkov týchto metód, určíme absolútne chyby a porovnáme časové rozdiely výpočtov jednotlivými metódami. [12].

Na nasledujúcich dvoch grafoch uvidíme výsledky sústavy Taylorovou radou a Ode23 solverom pre intergračný krok  $h = 0.05$  a čas  $Tmax = 1$ , kde

- x-ová osa zobrazuje čas Tmax
- y-ová osa zobrazuje hodnotu riešenia v danom časovom okamihu



Obrázek 5.1: Graf výsledkov Taylorovou radou



Obrázek 5.2: Graf výsledkov Ode23 solverom.

Tabulka 5.1: Tabulka mediánov časov výpočtu a porovnanie pre stiff(tuhé) systémy a druhá časť pre nonstiff(netuhé) systémy

	Steps	Ode23[s]	Ode45[s]	Taylor[s]	Ratio1(ode23/Taylor)	Ratio2(ode45/Taylor)
C4	100	0.2120	0.2053	0.1501	1.6554	1.4427
C5	100	0.1404	0.1199	0.0781	1.6841	1.4452
D1	59	0.1150	0.0956	0.0443	2.8193	2.2121
D4	35	0.1362	0.0993	0.0243	5.8295	4.2522
F2	100	0.1226	0.0929	0.0361	3.0653	2.5214
	Steps	Ode23[s]	Ode45[s]	Taylor[s]	Ratio1(ode23/Taylor)	Ratio2(ode45/Taylor)
B1	20	0.1059	0.0876	0.0202	5.2356	4.3374
B3	20	0.2540	0.2103	0.0499	6.4821	4.4399
B5	20	0.1609	0.0985	0.0206	7.3935	4.6942
E4	20	0.1081	0.0881	0.0180	5.9157	4.9080

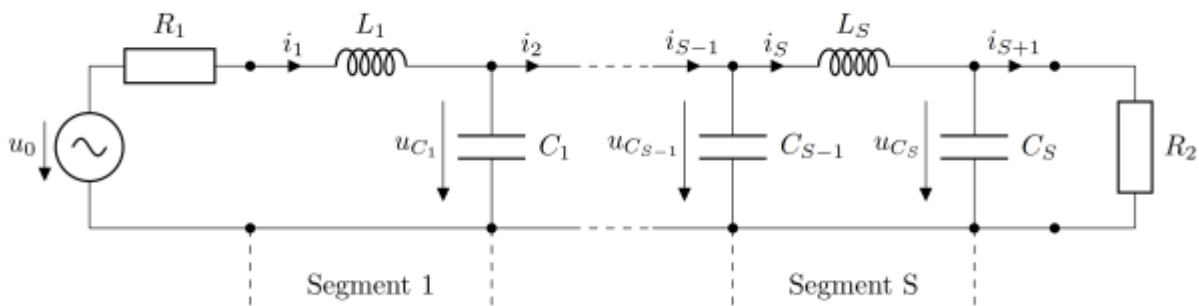
Na grafoch Obr.5.1 a Obr.5.2 a vidíme výsledný graf výsledkov pred tieto metódy. Grafický výsledok metódou ode45 si nebudeme ukazovať pretože je aj tak veľmi podobný ostatným dvom grafom. Vidíme, že sú si celkom podobné, avšak mi nebudeme tentokrát skúmať chyby medzi metódami ale časovú náročnosť pre jednotlivé metódy. Časové náročnosti nájdeme v tabulke 5.1 pre niekoľko rôznych tuhých aj netuhých systémov. Pre zadania jednotlivých príkladov viz. príloha alebo [4]. Viac informácií o stiff systémoch nájdete tu [7].

Podľa tabuliek výsledkov vidíme, že rýchlosť Taylorovej rady je niekoľkokrát vyššia ako u ostatných metód.

## Kapitola 6

# Telegrafická linka

V tejto kapitole si predstavíme nasledujúci obvod, ktorý reprezentuje Telegrafickú linku zloženú z  $S$  segmentov. V našom prípade to bude  $S = 100$  segmentov.



Obrázek 6.1: Model linky - Séria  $S$  segmentov

### 6.1 Telegrafická rovnica

Teraz si podme tento obvod vyriešiť. Riešenie daného obvodu sa dá popísať vektorovo nasledujúcou rovnicou:

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{b}, \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0 \quad (6.1)$$

kde,  $\mathbf{A}$  je matica konštant ( $R, L, C$  parametrov obvodu),  $\mathbf{y}$  je vektor premenných (napätia a prúdy),  $\mathbf{b}$  je vektor konštant a  $\mathbf{y}_0$  je vektor počiatkových podmienok. Blokovaná štruktúra matice  $\mathbf{A}$  a vektorov  $\mathbf{y}$  a  $\mathbf{b}$  je nasledovná:



$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} u_{C_1} \\ \vdots \\ u_{C_S} \\ i_1 \\ \vdots \\ i_S \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{u_0}{L_1} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

kde  $A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}$  sú jednotlivé blokové matice veľkosti  $S \times S$

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{-1}{R_2 C_S} \end{pmatrix} A_{12} = \begin{pmatrix} \frac{1}{C_1} & \frac{-1}{C_1} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_2} & \frac{-1}{C_2} & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \frac{1}{C_S} \end{pmatrix}$$

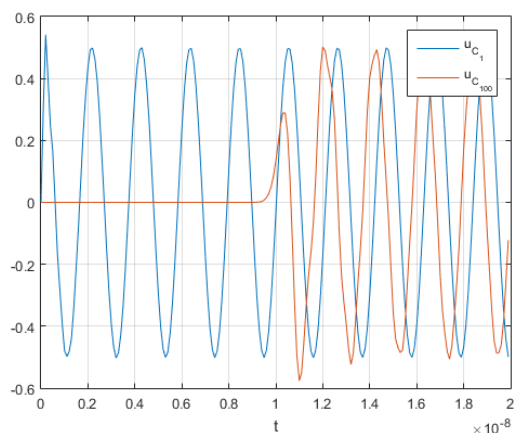
$$A_{21} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{L_1} & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \frac{1}{L_2} & \frac{-1}{L_2} & 0 & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \frac{-1}{L_S} & \frac{1}{L_S} \end{pmatrix} A_{22} = \begin{pmatrix} \frac{-R_1}{L_1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Pre naše experimenty, kapacity a indukcie sú rovnaké,  $C = C_1 = \cdots = C_S = 1pF$  a  $L = L_1 = \cdots = L_S = 10nH$ . Navyše je prenosová linka upravená ak  $R_1 = R_2 = \sqrt{L/C} = 100\Omega$ . Uhlová rýchlosť je udaná  $\omega = 3 * 10^9 rad/s$ . Vstupné napätie  $u_0$  by malo byť všeobecne konštantné (DC obvod) alebo harmonický signál (AC obvod). V prípade DC obvodu vstupné napätie  $u_0$  je skryté v konštantách pravej strany  $\mathbf{b}$ . V prípade AC obvodu vstupné napätie  $u_0 = U_0 \sin(\omega t)$  môže byť spočítané použitím pomocnej sústavy lineárnych ODR

$$\begin{aligned} u_0' &= \omega x, & u_0(0) &= 0 \\ x' &= -\omega u_0, & x(0) &= U_0 \end{aligned}$$

V našom príklade používame AC obvod so vstupným napätím  $u_0 = \sin(\omega t)$ . Šírenie konštant pre jednotku dĺžky jedného segmentu pre jednoduchý model prenosovej linky Obr. 6.1 is známa ako  $t_{LC} = \sqrt{LC}$ . Potom celkové opozdenie vstupného signálu môže byť spočítané ako  $t_{delay} = S t_{LC}$ . Opozdenie výstupného napätia  $u_{C_{100}}$  pre 100 segmentov je ukázané v nasledujúcom obrázku. Čas simulácie bol nastavený na  $t_{max} = 2t_{delay}$  pre všetky experimenty. [11]

My sme si telegrafickú rovnicu naprogramovali vo MATLABE ako sústava lineárnych ODE vypočítaných Taylorovou radou. Pri výpočtoch bola testovaná sada príkladov s rôznym počtom segmentov. V našom prípade počet segmentov ovplyvňuje len  $Tmax$  nie počet



Obrázek 6.2: Opozdenie signálu v prenosovej linke.

Tabulka 6.1: Porovnanie časov

S	Taylor	Ratio1(ode23/Taylor)	Ratio2(ode45/Taylor)	ORD
200	0.0243	5.8295	4.2522	20
600	0.0361	3.0653	2.5214	20
1000	0.0443	2.8193	2.2121	20
1400	0.0781	1.6841	1.4452	20
1800	0.1501	1.6554	1.4427	20

malých obvodov v linke. Výsledky Taylorovej rady boli porovnané s MATLABovskými explicitnými ode solvermi. Presnosť pre všetky riešenia bola nastavená na  $10^{-7}$ . Referenčné výsledky pre Taylorovu radu s konkrétnym počtom krokov  $t_{max}/h = 200$  sú ukázané v tabuľke 6.1. Pomery časov výpočtu  $ratio = ode/Tay > 1$  indikujú rýchlejší výpočet vo všetkých prípadoch Taylorov rady.

## Kapitola 7

# Matematické kyvadlo

Matematické kyvadlo je idealizovaným modelom reálneho kyvadla. Tento model sa skladá z nehmotnej, neroztiahnuteľnej tyče, na ktorej je zavesený hmotný bod. Tyč je pripevnená k závesu, u ktorého zanedbávame trenie. Pohyb matematického kyvadla popisuje nelineárna diferenciálna rovnice  $\varphi'' + k_1\varphi' + \sin\varphi = 0$  [9]. Konštanta  $a$  predstavuje tuhosť kyvadla a  $k_1$  útlm.

Našou úlohou je nájsť počiatočnú uhlovú rýchlosť  $\varphi'(0)$ , tak aby kyvadlo prešlo horným úvratom.

Rovnicu si upravíme.  $\sin\varphi$  nahradíme premennou  $u$ .

Dostaneme tvar

$$\varphi'' + k_1\varphi + au = 0 \quad (7.1)$$

V ďalšom kroku použijeme Laplaceovu transformáciu a dostaneme nasledujúci operátorový tvar:

$$p^2\varphi + k_1p\varphi + au = 0 \quad (7.2)$$

Ďalej uplatíme metódu znižovania rádu diferenciálnej rovnice

$$p^2\varphi = -(k_1p\varphi + au)$$

$$p\varphi = \frac{1}{p}p^2\varphi$$

$$\varphi = \frac{1}{p}p\varphi$$

a víde nám nasledovná sústava dvoch rovníc:

$$p\varphi = -\frac{1}{p}(k_1 * p\varphi + au), \quad p\varphi(0) = ?$$

$$\varphi = \frac{1}{p}(p\varphi), \quad \varphi(0) = 0$$

Už nám ostáva vypočítať  $u$ . Hodnotu  $u$  dostaneme z tvoriacich diferenciálnych rovníc, ktorú dostaneme nasledovne:

$$\begin{aligned}u &= \sin(\varphi) \\q &= \cos(\varphi) \\u' &= \varphi' \cos(\varphi) \\q' &= -\varphi' \sin(\varphi)\end{aligned}$$

Z tohoto odvodenia dostaneme sústavu dvoch diferenciálnych rovníc:

$$\begin{aligned}u' &= \varphi' q \\q' &= -\varphi' u\end{aligned}$$

Odvodíme si počiatočné podmienky:

$$\begin{aligned}u(0) &= \sin(\varphi(0)) \\q(0) &= \cos(\varphi(0)) \\u(0) &= 0 \\q(0) &= 1\end{aligned}$$

Ďalej si odvodíme operátorový tvar ako s rovnicami na začiatku a dostaneme:

$$\begin{aligned}pu &= p\varphi q \\pq &= p\varphi u \\u &= \frac{1}{p}(p\varphi q) \\q &= -\frac{1}{p}(p\varphi u)\end{aligned}$$

Dostali sme tvoriace diferenciálne rovnice, z ktorých získame  $u$ .

Teraz máme sústavu 4 diferenciálnych rovníc s počiatočnými podmienkami:

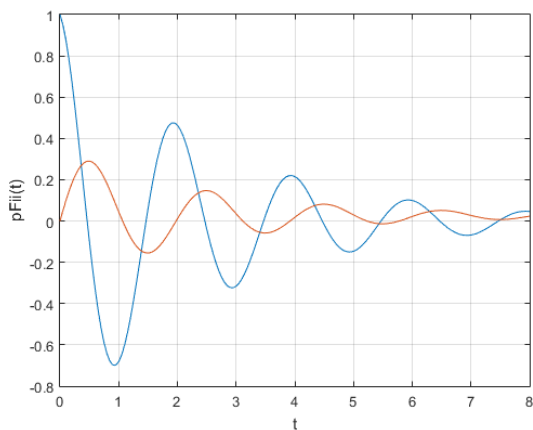
$$\begin{aligned}p\varphi' &= -(k_1 * p\varphi + au), & p\varphi(0) &=? \\ \varphi' &= (p\varphi), & \varphi(0) &= 0 \\ u' &= (p\varphi q), & u(0) &= 0 \\ q' &= -(p\varphi u), & q(0) &= 1\end{aligned}$$

z ktorých si odvodíme matice pre ich výpočet. Jedná sa o sústavu nelineárnych rovníc, takže budeme mať dve matice, maticu  $B$  pre zmiešané členy a maticu  $C$  pre lineárne členy a tie

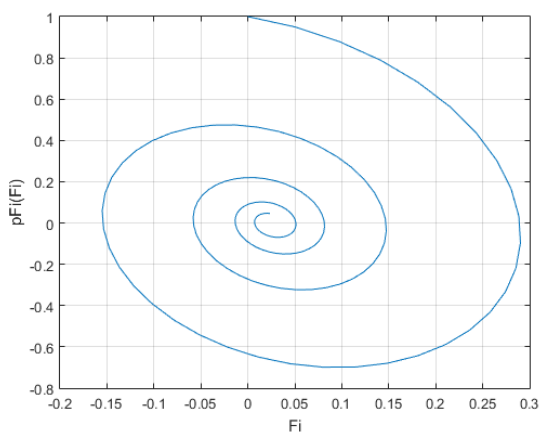
sú nasledovné:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -k_1 & 0 & -a & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Teraz si vypočítame sústavu podobne ako v kapitole 5 a zobrazíme si grafické výsledky.

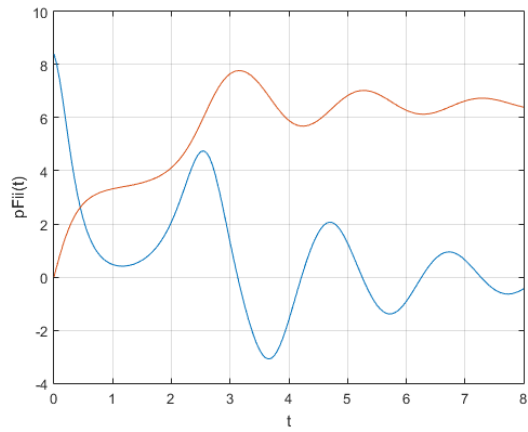


Obrázek 7.1: Tlmené kmity

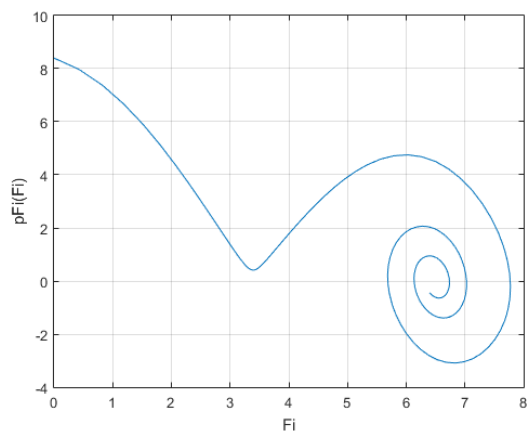


Obrázek 7.2: Riešenie vo fázovej rovine

Po mnohých experimentoch sme našli takú počiatočnú uhlovú rýchlosť, aby kyvadlo prešlo horným úvratom. Hodnota tejto uhlovej rýchlosti sa pohybuje od 8.35 rad/s. [8]



Obrázek 7.3: Tlmené kmity

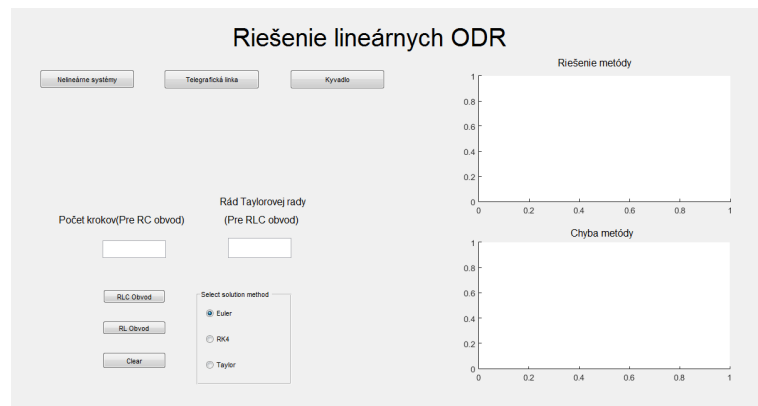


Obrázek 7.4: Riešenie vo fázovej rovine

# Kapitola 8

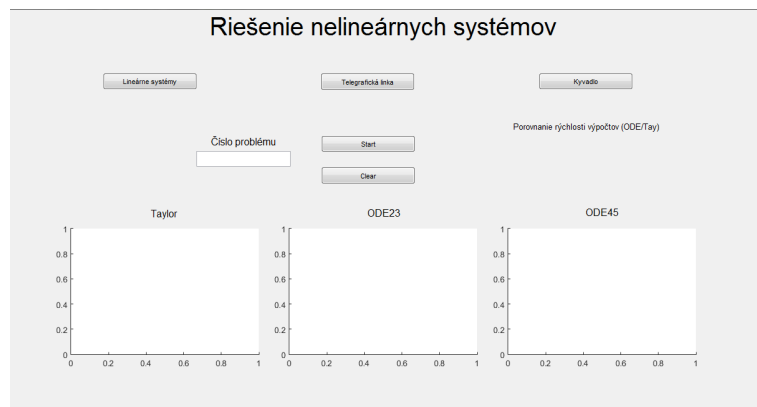
## Aplikácia

Všetky implementované metódy v predošlých kapitolách si zhrnieme do jednoduchej aplikácie, ktorá sa bude skladať z niekoľkých častí. Prvá časť bude zahrňovať riešenie RC obvodu s výberom metódy a RLC obvodu s výberom metódy. Prvá časť vyzerá nasledovne:



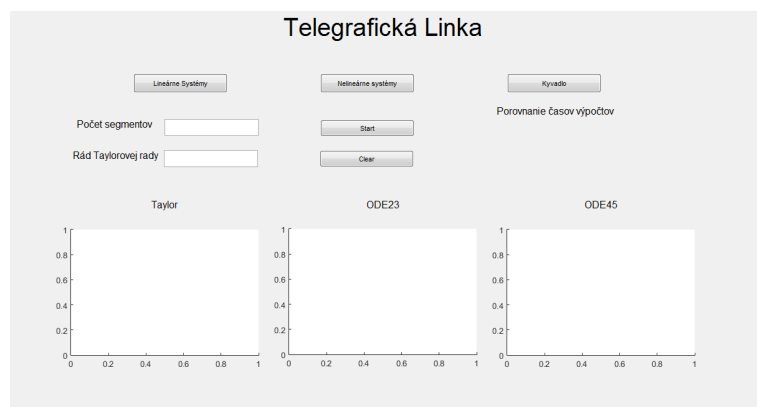
Obrázek 8.1: Prvá časť aplikácie, ktorá ukazuje riešenie ODR jednotlivými metódami

Vidíme, že aplikácia bude ukazovať len grafické výsledky a chybu metódy podľa vyberu. Pre RC obvod bude možnosť si zadať počet krokov pre riešenie a pre RLC obvod bude možnosť zadania rádu Taylorovej rady. Je to odlišné z dôvodu rôznej implementácie jednotlivých metód. Tlačítkom *Nelineárne systémy* sa prepne do druhej časti aplikácie, ktorá vyzerá nasledovne:



Obrázek 8.2: Druhá časť aplikácie, ktorá ukazuje riešenie nelineárnych ODR

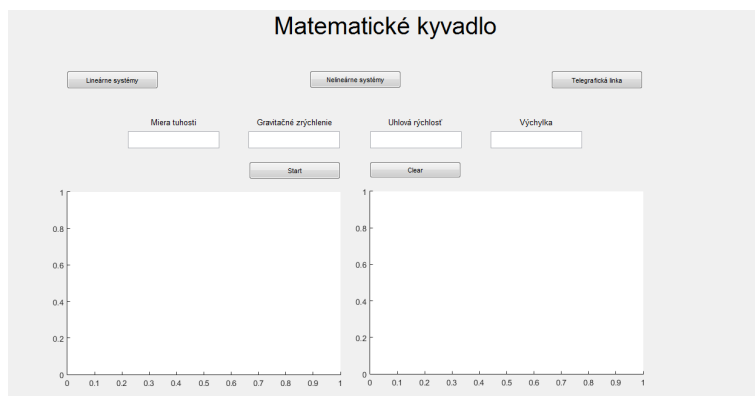
Užívateľ má možnosť zadať číslo problému, ktorý chce vyriešiť. Čísla jednotlivých problémov nájdeme v prílohe. V prípade, že užívateľ nezadá číslo problému, číslo je automaticky nastavené na problém 105. Po stlačení tlačítka *Start* sa na jednotlivých grafoch ukázu riešenia vybraného problému. Pod každým grafom sa vypíše čas výpočtu príslušnou metódou a napravo sa ukáže koľkokrát rýchlejší/pomalší bol výpočet Taylorovou radou. Pred každým prepnutím sa do inej časti aplikácie je nutné použiť tlačítko *Clear*, ktoré vynuluje hodnoty premenných, aby sa predošlo chybným výsledkom. Tlačítkom *Telegrafická Linka* sa prepne do 3. časti aplikácie, ktorá vyzerá nasledovne:



Obrázek 8.3: Tretia časť aplikácie, ktorá ukazuje riešenie Telegrafickej linky



V tomto prípade užívateľ má možnosť zadať *Počet segmentov*, ktorý ovplyvňuje  $T_{max}$  a rád Taylorovej rady, ktorý ovyplňuje čas a presnosť výpočtu. Podobne ako u predchádzajúcej časti, tlačítko *Start* nám vykreslí grafy riešení jednotlivých metód s časom výpočtu a porovnanie rýchlosti výpočtu s rýchlosťou Taylorovej rady. A nakoniec, tlačítko *Kyvadlo* nás presunie do poslednej časti aplikácie, ktorá vyzera takto:



Obrázek 8.4: Štvrtá časť aplikácie, ktorá ukazuje riešenie pohybu Kyvadla

Vidíme, že užívateľ má možnosť zvoliť si hodnoty istých premenných, ktoré boli popísané v predchádzajúcej kapitole. Pokiaľ užívateľ nezadá žiadne hodnoty budú nastavené automaticky, kde miera tuhosti bude 1, gravitačné zrýchlenie 9.81, uhlová rýchlosť 1, a výchylka 0. Po spustení sa nám v ľavo vykreslí graf závislosti uhlovej rýchlosti na čase, ktorý zobrazí tlmené kmity a napravo sa nám vykreslí graf zobrazujúci závislosť uhlovej rýchlosti od výchylky kyvadla.

# Kapitola 9

## Záver

Cieľom tejto bakalárskej práce bolo navrhnúť metódu vyššieho rádu založenú na Taylorovej rade pre numerický výpočet lineárnych a nelineárnych kvadratických sústav obyčajných diferenciálnych rovníc, implementovať ju v prostredí MATLAB a porovnať efektivitu našej metódy s ostatnými metódami, ktoré sa bežne používajú. Pre implementáciu častí bola využitá verzia MATLABu R2015a.

V tejto práci sme si predviedli najprv riešenia jednoduchých diferenciálnych rovníc bežne používanými metódami a Taylorovou radou vyššieho rádu a porovnali sme presnosť našich výsledkov s výsledkami exaktného riešenia ukázali chyby jednotlivých metód a na základe týchto chýb sme porovnali stabilitu jednotlivých metód.

Ďalej sme si predviedli riešenie sústav ODR Eulerovou metódou, metódou Runge-Kutta 4. rádu a Taylorovou radou, ktorých výsledky sme opäť porovnali s výsledkami exaktného riešenia a pozorovali sme efektivitu Taylorovej rady vyššieho rádu oproti Eulerovej metóde a metóde Runge-Kutta 4. rádu a opäť sme porovnali stability jednotlivých metód.

V ďalšej časti sme si predviedli niečo zložitejšie a to je riešenie sústavy nelineárnych obyčajných diferenciálnych rovníc, ktoré zahrňovali kvadratické aj zmiešané členy. Ukázali sme si riešenie Taylorovou radou vyššieho rádu a pomocou ODE solveru v MATLABu a porovnali sme opäť výsledky metód a porovnali sme časovú náročnosť jednotlivých metód a ukázalo sa, že Taylorova rada bola v každom prípade niekoľkokrát rýchlejšia než ostatné metódy.

Ukázali sme si čo vznikne hromadným poskladaním RC a RLC obvodov v podobe telegrafickej linky, kde sme si porovnali čas výpočtu Taylorovej rady s ODE solvermi.

Ako posledné sme si ukázali ďalšie využitie diferenciálnych rovníc a to pre popis pohybu kyvadla. A nakoniec sme všetky implementované časti zhrnuli do výslednej aplikácie, ktorá môže byť použitá na rôzne účely.

# Literatura

- [1] Katedra matematiky a deskriptívnej geometrie STU: KMaDGWiki [online]. mar 2010.  
URL <http://www.math.sk/skripta2/node79.html>
- [2] Anna, K.: Soustavy lineárních diferenciálních rovnic. dec 2012.  
URL <https://math.feld.cvut.cz/ftp/kalous/laa/prednasky/difsoust.pdf>
- [3] Antoš, R.: *Modelování lineárních a nelineárních elektronických obvodů*. Diplomová práce, FEI VUT v Brne, 2001.
- [4] Enright, W.; Pryce, J.: Two fortran packages for assessing initial value methods. In ACM Trans. Math. Softw. *ACM*, ročník 13, 1987.
- [5] Janko, R.: Simulátor procesora s operáciou delenia. 2011.
- [6] Krupková, V.; Studená, V.: *Matematická analýza II*. Nakladatelství VUT v Brně, 1991, ISBN: 80-214-0232-6.
- [7] Kunovský, J.: Modern Taylor Series Method. 1994.
- [8] Kunovský, J.; Šátek, V.; Sehnalová, P.: *Vysoce náročné výpočty*.  
URL <https://www.fit.vutbr.cz/study/courses/VNV/private/>
- [9] Kučerová, B.: Matematické kyvadlo. 2010.
- [10] Minarik, M.: Autonomní metoda řešení elektrických obvodů. 2007.
- [11] Nečasová, G.; Veigend, P.; Šátek, V.: Modern Taylor series method in numerical integration: PART 2. In *17th Czech-Polish Conference Modern Mathematical Methods in Engineering (3mi)*, VŠB - Technical University of Ostrava, 2018, ISBN 978-80-248-4135-9, s. 211–220.  
URL [http://www.fit.vutbr.cz/research/view\\_pub.php?id=11639](http://www.fit.vutbr.cz/research/view_pub.php?id=11639)
- [12] Čermák, L.; Hlavička, R.: *Numerické metody*. Akademické nakladatelství CERM, s.r.o Brno, 2005, ISBN 80-214-3071-0.
- [13] Šátek, V.: *Sériový obvod - Nabíjení kondenzátoru*.  
URL [http://www.fit.vutbr.cz/~satek/FRVS/data/projekty/proj/RC\\_nabijeni.pdf](http://www.fit.vutbr.cz/~satek/FRVS/data/projekty/proj/RC_nabijeni.pdf)
- [14] Šátek, V.: *Sériový obvod RLC - Nabíjení kondenzátoru*.  
URL [http://www.fit.vutbr.cz/~satek/FRVS/data/projekty/proj/RLC\\_nabijeni.pdf](http://www.fit.vutbr.cz/~satek/FRVS/data/projekty/proj/RLC_nabijeni.pdf)

# Přílohy

## Příloha A

# Zadania rovníc vypočítaných v tabulkách

C4 (105) pre krok  $h = 10^{-2}$ ,  $\beta = 10$  a  $Tmax = 1$ :

$$\begin{aligned}y_1' &= -y_2 + 2, & y_1(0) &= 1, \\y_2' &= -10y_2 + \beta y_1^2, & y_2(0) &= 1, \\y_3' &= -40y_3 + 4\beta(y_1^2 + y_2^2), & y_3(0) &= 1, \\y_4' &= -100y_4 + 10\beta(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2), & y_4(0) &= 1\end{aligned}$$

C5 (106) : Zadanie a krok  $h$  je rovnaké ako u C4, len C5 je pre  $\beta = 20$

D1 (201) pre krok  $h = 1.7 * 10^{-2}$  a  $Tmax = 1$ :

$$\begin{aligned}y_1' &= 0.2(y_2 - y_1), & y_1(0) &= 0, \\y_2' &= 10y_1 - (60 - 0.125y_3)y_2 + 0.125y_3, & y_2(0) &= 0, \\y_3' &= 1, & y_3(0) &= 0\end{aligned}$$

D4 (204) pre krok  $h = 2.9 * 10^{-2}$  a  $Tmax = 0.01$ :

$$\begin{aligned}y_1' &= -0.013y_1 - 1000y_1y_3, & y_1(0) &= 1, \\y_2' &= -2500y_2y_3, & y_2(0) &= 1, \\y_3' &= -0.013y_1 - 1000y_1y_3 - 2500y_2y_3, & y_3(0) &= 0\end{aligned}$$

F2 (402) pre krok  $h = 10^{-2}$  a  $Tmax = 1$ :

$$\begin{aligned}y_1' &= -y_1 - y_1y_2 + 294y_2, & y_1(0) &= 1, \\y_2' &= \frac{y_1(1 - y_2)}{98} - 3y_2, & y_2(0) &= 0\end{aligned}$$

B1 (501) pre krok  $h = 5 * 10^{-2}$  a  $Tmax = 2$ :

$$\begin{aligned}y_1' &= 2(y_1 - y_1 y_2), & y_1(0) &= 1, \\y_2' &= -(y_2 - y_1 y_2), & y_2(0) &= 3\end{aligned}$$

B3 (502) pre krok  $h = 5 * 10^{-2}$  a  $Tmax = 1$ :

$$\begin{aligned}y_1' &= -y_1, & y_1(0) &= 1, \\y_2' &= y_1 - y_2^2, & y_2(0) &= 0, \\y_3' &= y_2^2, & y_3(0) &= 0\end{aligned}$$

B5 (503) pre krok  $h = 5 * 10^{-2}$  a  $Tmax = 1$ :

$$\begin{aligned}y_1' &= y_2 y_3, & y_1(0) &= 0, \\y_2' &= -y_1 y_3, & y_2(0) &= 1, \\y_3' &= y - 0.51 y_1 y_2, & y_3(0) &= 1\end{aligned}$$

E4 (504) pre krok  $h = 5 * 10^{-2}$  a  $Tmax = 1$ :

$$\begin{aligned}y_1' &= y_2, & y_1(0) &= 30, \\y_2' &= 0.032 - 0.4 y_2^2, & y_2(0) &= 0\end{aligned}$$