

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA INFORMAČNÍCH TECHNOLOGIÍ
ÚSTAV INTELIGENTNÍCH SYSTÉMŮ

FACULTY OF INFORMATION TECHNOLOGY
DEPARTMENT OF INTELLIGENT SYSTEMS

OBECNÉ METODY ŘEŠENÍ ELEKTRICKÝCH OBVODŮ

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

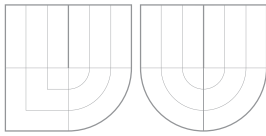
BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE

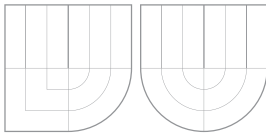
AUTHOR

ALEXANDR SZÖLLÖS

BRNO 2007



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



FAKULTA INFORMAČNÍCH TECHNOLOGIÍ
ÚSTAV INTELIGENTNÍCH SYSTÉMŮ



FACULTY OF INFORMATION TECHNOLOGY
DEPARTMENT OF INTELLIGENT SYSTEMS

OBECNÉ METODY ŘEŠENÍ ELEKTRICKÝCH OBVODŮ

COMMON METHODS OF ANALYSING ELECTRICAL CIRCUITS

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE
BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE
AUTHOR

ALEXANDR SZÖLLÖS

VEDOUCÍ PRÁCE
SUPERVISOR

Doc. Ing. JIŘÍ KUNOVSKÝ, CSc.

BRNO 2007

Abstrakt

Tato bakalářské práce se zabývá metodikou popisu lineárních elektrických obvodů pomocí diferenciálních rovnic a metody smyčkových proudů a uzlových napětí. Pro řešení diferenciálních rovnic je použita Taylorova řada implementována v systému TKSL. Práce se zaměřuje na analýzu a použitelnost metody.

Klíčová slova

Elektrický obvod, diferenciální rovnice, Taylorova řada, TSKL, uzlová napětí, smyčkové proudy, obecné metody.

Abstract

This work deals with a methodology of description linear electrical circuits by using differential equations and the method of mesh currents and node voltages. Taylor series that is implemented in TKSL system is used for solving differential equations. This work is aimed on analysis and usability of this methods.

Keywords

Electrical circuit, differential equations, Taylor series, TKSL, node voltage, mesh current, common methods.

Citace

Alexandr Szöllös: Obecné metody řešení elektrických obvodů, bakalářská práce, Brno, FIT VUT v Brně, 2007

Obecné metody řešení elektrických obvodů

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně pod vedením pana doc. Ing. Kunovského, CSc.

.....

Alexandr Szöllös

14. května 2007

Poděkování

Tímto děkuji panu doc. Ing. Jiřímu Kunovskému, CSc. za vedení této práce, za vytvoření ideální pracovní atmosféry a hlavně za skvělý přístup.

© Alexandr Szöllös, 2007.

Tato práce vznikla jako školní dílo na Vysokém učení technickém v Brně, Fakultě informačních technologií. Práce je chráněna autorským zákonem a její užití bez udělení oprávnění autorem je nezákonné, s výjimkou zákonem definovaných případů.

Obsah

1 Úvod	3
2 Matematický úvod do problematiky	4
2.1 Taylorova řada	4
2.2 Metody pro výpočty diferenciálních rovnic	5
2.2.1 Úvod do problematiky	5
2.2.2 Analytické řešení	5
2.2.3 Numerické řešení	6
2.2.4 Chyby metod	8
2.2.5 Jednokrokové metody	8
3 Simulační nástroj TKSL	12
3.1 Program v TKSL	12
3.1.1 Struktura programu	12
3.1.2 Příklad programu v TKSL	13
4 Řešení elektrických obvodů metodou smyčkových proudů a uzlových napětí	15
4.1 Elektrické prvky	15
4.2 Přechodný děj a ustálený stav v obvodu	15
4.3 Elektrické veličiny v obvodu	16
4.4 Metoda smyčkových proudů	17
4.4.1 Obvod RC s jednou smyčkou	17
4.4.2 Obvod RL s jednou smyčkou	19
4.4.3 Obvod RLC s jednou smyčkou	21
4.4.4 Zhodnocení obvodů z kapitol 4.4.1, 4.4.2 a 4.4.3	22
4.4.5 Obvod RC se dvěma smyčkami	23
4.4.6 Obvod RLC se třemi smyčkami	24
4.4.7 Obvod RLC se dvěma smyčkami s nutností substituce	27
4.4.8 Obvod RLC, neřešitelný metodou smyčkových proudů	28
4.5 Zhodnocení metody smyčkových proudů a uzlových napětí	29
5 Prostředí pro zadávání obvodů a náročné výpočty	31

6 Závěr	32
Seznam obrázků	33
Použitá literatura	34
A Seznam příloh na CD	35
A.1 Programové přílohy	35
A.2 Ostatní přílohy	35

Kapitola 1

Úvod

V současné době se s výpočetní technikou a informačními technologiemi setkáváme snad ve všech vědních oborech. Pomocí výpočetní techniky můžeme řešit úlohy, které by bez jejího využití často řešitelné nebyly a nebo byly řešitelné jen velmi stěží. Výpočetní technika velmi dobře slouží např. k simulacím různých dějů počínaje simulací chování nakupujících v obchodě a simulací chování a pohybu elektronu v jádru atomu konče. V tomto případě výpočetní technika a počítače především slouží jako simulační prostředí pro simulaci přechodných dějů v elektrických obvodech.

Elektrickými obvody a jejich řešením, tj. řešením zejména přechodných dějů v nich se zabývá tato bakalářská práce. Mým úkolem je řešit elektrické obvody obecnými metodami, neboli metodou smyčkových proudů a uzlových napětí.

Je třeba si uvědomit, že metoda smyčkových proudů není jediná metoda pro řešení elektrických obvodů. Jako příklad dalších metod lze uvést metodu autonomní, metodu přímého modelování, či metody s využitím parazitní kapacity či parazitní indukčnosti.

Řešení elektrických obvodů pouze na papíře je velmi neefektivní metoda. Proto je třeba se zaměřit na to, jak problém řešení elektrických obvodů co nejlépe algoritmovat a jak dostat co nejpřesnější výsledky, tedy výsledky co nejlépe odpovídající realitě, resp. reálnému chování daných elektrických součástek.

K řešení elektrických obvodů a hlavně přechodných dějů v nich pomocí diferenciálních rovnic se osvědčil simulační nástroj TKSL, který velmi efektivně řeší diferenciální rovnice pomocí Taylorovy řady. Systému TKSL je věnována celá jedna kapitola.

Na začátku práce je uveden matematický základ pojednávající o Taylorově řadě a jejím odvození, dále jsou pak rozebírány jednotlivé typové obvody.

Kapitola 2

Matematický úvod do problematiky

2.1 Taylorova řada

Předpokládejme, že existuje funkce $f(x)$, která má v bodě $x = a$ derivace až do n -tého řádu. Hledejme nyní polynom $p(x)$ stupně n ve tvaru

$$p(x) = c_0 + c_1(x - a) + c_2(x - a)^2 + c_3(x - a)^3 + \dots + c_n(x - a)^n \quad (2.1)$$

se středem v bodě a takový, aby byly splněny následující podmínky:

$$f(a) = p(a), f'(a) = p'(a), f''(a) = p''(a), \dots$$

Za použití rovnice (2.1) dostáváme:

$$\begin{aligned} f(a) &= p(a) &= [c_0 + c_1(x - a) + c_2(x - a)^2 + \dots]_{x=a} &= c_0 \\ f'(a) &= p'(a) &= [c_1 + 2 \cdot c_2(x - a) + 3 \cdot c_3(x - a)^2 + \dots]_{x=a} &= c_1 \\ f''(a) &= p''(a) &= [2 \cdot c_2 + 3 \cdot 2 \cdot c_3(x - a) + \dots]_{x=a} &= 2 \cdot c_2 \\ &\vdots && \end{aligned}$$

Po vyjádření koeficientů $c_0, c_1, c_2 \dots$

$$\begin{aligned} c_0 &= f(a) \\ c_1 &= f'(a) \\ c_2 &= \frac{f''(a)}{2!} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Obecně tedy platí:

$$c_k = \frac{f^k(a)}{k!} \quad (2.2)$$

Z toho plyne známý zápis Taylorovy řady:

$$p(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \dots + \frac{f^n(a)}{n!}(x - a)^n \quad (2.3)$$

2.2 Metody pro výpočty diferenciálních rovnic

2.2.1 Úvod do problematiky

Diferenciální rovnicí rozumíme každou rovnici, v níž se neznámá funkce vyskytuje v derivaci. Je-li neznámá funkce funkcí jedné proměnné, jde o obyčejnou diferenciální rovnici. Jinak hovoříme o parciální diferenciální rovnici. Řád nejvyšší derivace pak udává řád této diferenciální rovnice.

Řešením diferenciální rovnice rozumíme funkci, která dané rovnici vyhovuje. Řešení obsahující konstanty se nazývá obecné řešení, volbou konstanty dostaneme z obecného řešení partikulární řešení. V některých speciálních případech existují řešení, která nedostaneme volbou konstanty z řešení obecného (taková řešení se nazývají singulární). Graf řešení diferenciální rovnice se nazývá integrální křivka.

Obyčejnou diferenciální rovnicí prvního řádu nazýváme rovnici ve tvaru $F(x, y, y') = 0$, resp. v explicitním vyjádření:

$$y' = f(x, y), \quad f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad \Omega \in \mathbb{R}^2 \quad (2.4)$$

Úloha najít řešení $y(x)$ této diferenciální rovnice, která je definovaná na nějakém I , $x_0 \in I$ a které splňuje tzv. počáteční podmínku $y(x_0) = y_0$ se nazývá Cauchyova (počáteční) úloha. Je-li funkce f spojitá na otevřené množině Ω , pak pro každé $(x_0, y_0) \in \Omega$ má úloha $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ alespoň jedno řešení (existenční podmínka). O funkci f řekneme, že splňuje v bodě (x_0, y_0) Lipschitzovu podmínku, existuje-li konstanta L a okolí $U(x_0, y_0) \in \Omega$ tak, že pro každé dva body $(x, y_1), (x, y_2) \in U(x_0, y_0)$ je

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$$

Diferenciální rovnice $y' = f(x, y)$ má pro každý bod $(x_0, y_0) \in \Omega$ jediné řešení procházející bodem (x_0, y_0) (jednoznačnost řešení), pokud jsou splněny následující podmínky:

1. funkce f je spojitá na Ω
2. funkce f je ohraničená na Ω
3. splňuje Lipschitzovu podmínku na Ω

Pozn.: Obecně můžeme (2.4) pokládat za soustavu n diferenciálních rovnic prvního řádu, kde y , y_0 jsou vektory o n složkách. (Samozřejmě se též příslušným způsobem změní rozměry prostorů definičního oboru a oboru hodnot dané funkce.)

2.2.2 Analytické řešení

Řešení je funkce času. Konkrétní hodnotu v určitém čase získáme dosazením tohoto času do výsledné funkce. Lze určit hodnotu v libovolném bodě, v němž je funkce definována. Analytické metody jsou obvykle složité a časově náročné, ale velmi přesné. Teorie obyčejných

diferenciálních rovnic tedy vybírá určité modely jistých skupin diferenciálních rovnic, pro které je nalezeno obecné schéma řešení.

Podstatnou část této teorie tvoří lineární rovnice, jejichž základní charakteristickou vlastností je platnost principu superpozice. Druhou skupinu tvoří rovnice nelineární. Zde je obecná teorie mnohem chudší a jsou studovány pouze speciální typy diferenciálních rovnic popisujících určité fyzikální nebo technické problémy. U těchto nelineárních rovnic lze pomocí speciálních úprav získat řešení v uzavřeném tvaru (tj. vyjádření pomocí elementárních funkcí, resp. jejich integrálů).

Metody řešení diferenciálních rovnic lze rozdělit do několika skupin:

- u lineárních rovnic s konstantními koeficienty určujeme báze funkce a násadu pro partikulární řešení nehomogenní rovnice volíme pomocí těchto báze funkcí (metoda variace konstant), nebo ve tvaru pravé strany diferenciální rovnice (metoda neurčitých koeficientů); ovšem každé řešení hledáme ve tvaru, který již předem známe
- některé lineární rovnice s nekonstantními koeficienty transformujeme vhodnou substitucí na lineární rovnice s konstantními koeficienty
- některé nelineární rovnice vhodnou substitucí transformujeme na rovnice lineární
- některé nelineární rovnice formálně upravíme (příp. transformujeme vhodnou substitucí) a řešíme přímou integrací

Je zřejmé, že tyto metody nejsou postačující pro řešení všech úloh z technické nebo fyzikální praxe. Navíc problémy z praxe jsou často popsány soustavami diferenciálních rovnic, jejichž řešení je ještě složitější.

Proto s nástupem výpočetní techniky došlo k velkému rozšíření použití numerických metod řešení (soustav) diferenciálních rovnic. Rozsah úloh, které lze numerickými metodami řešit je mnohem větší (v porovnání s možnostmi analytických metod). Problémem je však rychlost a přesnost, dále pak nutnost provedení celého výpočtu znovu v případě změny parametrů (u analytického výpočtu stačí dosadit jiné konstanty).

Více informací o možnostech analytického řešení (soustav) diferenciálních rovnic lze získat v literatuře, např. v [2].

2.2.3 Numerické řešení

Řešením je posloupnost hodnot v určitých předem zvolených časových bodech. Hodnoty funkce mezi zvolenými body lze určit buď interpolací z okolních vypočtených bodů nebo opětovnou aplikací metody s menším rozstupem (krokem) časových bodů. Numerické metody jsou obvykle jednodušší a rychlejší než analytické. Při špatné volbě kroku však může dojít k velké chybě výpočtu.

Numerické řešení soustavy obyčejných diferenciálních rovnic má smysl hledat pouze tehdy, jestliže řešení existuje a je jednoznačné (viz 2.2.1).

Soustavu m obyčejných diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned}y_1'(t) &= f_1(t, y_1, \dots, y_m) \\y_2'(t) &= f_2(t, y_1, \dots, y_m) \\&\vdots \\y_m'(t) &= f_m(t, y_1, \dots, y_m)\end{aligned}$$

s počátečními podmínkami

$$\begin{aligned}y_1(t_0) &= y_{1,0} \\y_2(t_0) &= y_{2,0} \\&\vdots \\y_m(t_0) &= y_{m,0}\end{aligned}$$

můžeme pro větší přehlednost zapsat též pomocí vektorů ve tvaru

$$\begin{aligned}\mathbf{y}' &= f(t, \mathbf{y}) \\ \mathbf{y}(t_0) &= \mathbf{y}_0\end{aligned}\tag{2.5}$$

Základem, z něhož vychází většina numerických metod pro řešení počátečních úloh na intervalu $\langle a, b \rangle$, je diskretizace proměnné. Množinu bodů t_i , $i \in \langle 0, k \rangle$ z intervalu $\langle a, b \rangle$, kde

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{k-1} < t_k = b$$

nazýváme síť, její prvky pak uzly sítě.

Výraz $t_{i+1} - t_i = h$ nazýváme krokem sítě v uzlu x_i (resp. integračním krokem). Je-li navíc $h_i = h = konst.$, mluvíme o pravidelné síti.

Numerickým řešením soustavy (2.5) rozumíme posloupnost y_i hodnot $y(t_0), y(t_1), \dots, y(t_k)$, které odpovídají příslušným hodnotám uzlů sítě.

Hodnoty $y(t_i)$ numerického řešení budeme značit y_i , hodnoty exaktního řešení (získané dosazením do analytického řešení rovnice) pak označíme jako $Y_i = Y(t_i)$.

Má-li být numerická metoda řešení použitelná, je nutné, aby posloupnost y_i konvergovala pro $h \rightarrow 0$ k exaktnímu řešení $Y(t)$. Konvergencí zde rozumíme existenci limity posloupnosti y_i pro $h \rightarrow 0$, $i \rightarrow \infty$, kde ovšem $hi = t$ zůstává pevné. Konverguje-li přibližné řešení získané určitou metodou pro všechny počáteční úlohy (2.5), řekneme, že metoda je konvergentní.

Rozlišujeme dva základní typy metod numerického řešení soustavy diferenciálních rovnic (2.5):

1. metody, které hodnoty funkce $f(t, y)$ počítají jen v bodech (t_i, y_i) , kde y_i je hodnota numerického řešení v bodě $t = t_i$. Jedná se o tzv. vícekrokové metody.
2. metody, které zjišťují hodnoty funkce $f(t, y)$ i mezi jednotlivými uzly sítě (t_i, y_i) . Jsou zastoupeny jednokrokovými metodami (metody typu Runge-Kutty)

Oba zmíněné typy metod používají k řešení pouze první derivace y (existují samozřejmě i metody využívající k výpočtu i derivací vyšších řádů). Hodnotu první derivace jednoduše získáme dosazením bodu (t_i, y_i) do (2.5). Vyšší derivace je však obecně obtížné získat neboť předpokládáme, že funkce $f(t, y)$ není vyjádřena analyticky.

2.2.4 Chyby metod

Při použití obou typů metod výpočtů numerického řešení soustavy diferenciálních rovnic (str. 7) je získaná posloupnost hodnot y_i výsledkem postupné extrapolace z výchozího bodu, přičemž již samotné výchozí body jsou zatíženy tzv. lokální chybou E .

Tato chyba se skládá ze dvou částí:

1. zanedbávací chyba (chyba metody) je způsobená zanedbáním členů Taylorovy řady počínaje $n + 1$ členem.
2. zaokrouhlovací chyba vzniká z důvodu omezené velikosti slova, ve kterém je uložena hodnota čísla, v počítači

Chyba jednoho kroku (lokální chyba) ovšem rovněž ovlivní výsledky kroků následujících. V této souvislosti mluvíme o stabilitě metody.

Metoda se nazývá absolutně stabilní, pokud pro daný integrační krok h a danou diferenciální rovnici chyba vzniklá při výpočtu y_n , se neztvětší v následujících hodnotách řešení y_k , $k > n$.

Skutečnost, že se v každém kroku výpočtu dopouštíme lokální chyby, vede ke vzniku chyby kumulované, její velikost pak je $\varepsilon_n = Y_n - y_n$.

2.2.5 Jednokrokové metody

Jednokrokové metody získaly svůj název podle toho, že pro výpočet hodnoty y_{n+1} stačí znát pouze hodnotu y_n . Toto je výhodné v případech, když potřebujeme často měnit integrační krok. Základem pro tyto metody je Taylorův rozvoj (viz 2.1)

$$y_{n+1} = y_n + hy'_n + \frac{h^2}{2!}y''_n + \frac{h^3}{3!}y'''_n + \dots \quad (2.6)$$

Metoda Eulerova

Tato metoda je nejjednodušší: pro určení následující hodnoty y_{n+1} bere v úvahu pouze první dva členy Taylorovy řady, tedy

$$y_{n+1} = y_n + hy'_n \quad (2.7)$$

Geometrická interpretace této metody není obtížná: protože $h_i = x_{i+1} - x_i$, je vztah (2.7) rovnicí přímky se směrnicí $f(x_i, y_i)$ jdoucí bodem (x_i, y_i) , tj. na intervalu $\langle x_i, x_{i+1} \rangle$

se vždy pohybujeme po tečně k přesnému řešení úlohy $y' = f(x, y)$, $y(x_i) = y_i$ v bodě (x_i, y_i) .

Při zkracování kroku lze zpřesňovat řešení, ovšem od jisté hranice značně převládá vliv zaokrouhlovací chyby a celková chyba výpočtu při dalším zmenšování kroku poroste.

Metody Runge-Kutta

Další jednokrokové metody, které používají pouze první derivace řešení y - výpočet $f(t, y)$ však provádějí i mezi jednotlivými uzly (t_i, y_i) - jsou zastoupeny metodami typu Runge-Kutta. Základem těchto metod je vyjádření rozdílů mezi hodnotami řešení y v bodech t_{n+1} a t_n ve tvaru

$$y_{n+1} - y_n = \sum_{i=1}^p w_i K_i$$

kde w_i jsou konstanty a

$$K_i = hf(t_n + a_i h, y_n + \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} k_j), \quad i = 1, \dots, p$$

kde $h = t_{n+1} - t_n$ a a_i, b_{ij} jsou konstanty, přičemž $a_1 = 0$. Metoda se nazývá p -hodnotová (používá p hodnot funkce $f(t, y)$). Konstanty w_i, a_i, b_i jsou vypočteny tak, aby získaná řešení souhlasila Taylorovou řadou v bodě (t_n, y_n) až do p -té mocniny kroku h včetně. Metodu pak nazýváme metodou Runge-Kutta řádu P . Metod je celá řada modifikací, liší se však především v koeficientech, v principu jsou ovšem stejné.

Všechny metody Runge-Kutta mají ohraničený obor absolutní stability, definovaný nerovností

$$\left| 1 + \tilde{h} + \frac{\tilde{h}^2}{2!} + \dots + \frac{\tilde{h}^p}{p!} \right| < 1$$

kde $\tilde{h} = h\lambda$, λ je komplexní číslo. Nejčastěji se používá metody čtvrtého řádu: má dobrou stabilitu i přesnost.

Metoda Taylorovy řady

Ačkoliv by se zdálo, že možnosti využití Taylorovy řady pro řešení diferenciálních rovnic jsou již zcela vyčerpány (všechny výše uvedené metody z této metody vycházejí), nachází v současnosti opět tato metoda své uplatnění (rychlý vývoj výpočetní techniky).

Při využití této metody se předpokládá, že pro výpočet řešení se bere v úvahu větší počet členů rozvoje (2.6), řádově alespoň desítky členů.

Tato metoda umožňuje výpočet mnohem přesnější hodnoty řešení (bráno vzhledem k délce integračního kroku h) než běžně používané metody (Eulerova či některá varianta metody Runge-Kutta). Problematikou využití metody Taylorovy řady se zabývá tato práce.

Princip metody

Taylorova řada je definována jako nekonečná mocninná řada

$$f(x) = f(z) + f'(z) \frac{(x-z)}{1!} + f''(z) \frac{(x-z)^2}{2!} + \dots \quad (2.8)$$

Pokud položíme počáteční podmínku $z = 0$ a položíme $h = x_1 - z_1$, pak rovnice přejde do tvaru:

$$f(x_1) = f(0) + h \cdot f'(0) + \frac{h^2}{2!} f''(0) + \frac{h^3}{3!} f'''(0) + \dots \quad (2.9)$$

Nyní položme $z_2 = x_1$ za předpokladu $h = x_2 - z_2 = x_1 - z_1$.

$$f(x_2) = f(x_1) + h \cdot f'(x_1) + \frac{h^2}{2!} f''(x_1) + \frac{h^3}{3!} f'''(x_1) + \dots \quad (2.10)$$

Hodnoty funkce $f(x)$ v bodech x_1, x_2 , lze vypočítat postupně za využití Taylorovy řady. Výsledek jednoho kroku je nutný pro výpočet dalších dílčích výsledků. Parametr h je integrační krok. Integrační krok nemusí být konstantní. Pro jednotlivé kroky výpočtu se může měnit. Na velikosti integračního kroku je závislá rychlost výpočtu a také jeho přesnost. Čím je integrační krok větší, tím se také zvyšuje rychlost výpočtu. Naopak může klesat přesnost výpočtu. Před začátkem výpočtu musíme určit, s jakou přesností výsledek požadujeme. Při výpočtu pak sečítáme dílčí výsledky a pokud je rozdíl dvou po sobě jdoucích výsledků menší než požadovaná přesnost, výpočet ukončíme.

K dílčím výpočtům potřebujeme znát vyšší derivace funkce. Výpočet vyšších derivací je časově náročný a prakticky zbytečný. Vyšší derivace lze totiž odvodit z předchozích výpočtů. Toto ukážeme na následující soustavě diferenciálních rovnic.

$$y' = A \cdot y + B \cdot z \quad z' = C \cdot y + D \cdot z \quad (2.11)$$

Počáteční podmínky $y(0) = y_0, z(0) = z_0$. Řešení klasickým způsobem :

$$y_1 = y_0 + h \cdot y'(0) + \frac{h^2}{2!} \cdot y''(0) + \frac{h^3}{3!} \cdot y'''(0) + \dots \quad (2.12)$$

$$z_1 = z_0 + h \cdot z'(0) + \frac{h^2}{2!} \cdot z''(0) + \frac{h^3}{3!} \cdot z'''(0) + \dots \quad (2.13)$$

Vylepšeným způsobem lze výpočet soustavy zjednodušit následovně:

$$y_1 = y_0 + DY10 + DY20 + DY30 + \dots \quad (2.14)$$

$$z_1 = z_0 + DZ10 + DZ20 + DZ30 + \dots \quad (2.15)$$

Výpočet jednotlivých členů :

$$DY10 = h \cdot y'(0) = h(A \cdot y + B \cdot z)$$

$$DY20 = \frac{h}{2}(A \cdot DY10 + B \cdot DZ10)$$

$$DY30 = \frac{h}{3}(A \cdot DY20 + B \cdot DZ20)$$

⋮

$$\begin{aligned}
DZ10 &= h \cdot z'(0) = h(C \cdot y + D \cdot z) \\
DZ20 &= \frac{h}{2}(C \cdot DY10 + D \cdot DZ10) \\
DZ30 &= \frac{h}{3}(C \cdot DY20 + D \cdot DZ20) \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Výhody a nevýhody použití Taylorovy řady

Nespornou výhodou této metody je její rychlost a s tím spojená výpočetní nenáročnost. Velkou výhodou je také možnost paralelního zpracování dílčích výpočtů, které se uplatňuje při výpočtech soustav diferenciálních rovnic. Pokud ovšem zvolíme špatnou velikost integračního kroku, může se metoda stát nestabilní. Je to způsobeno tím, že při chybném určení jednoho kroku, se tato chyba přenáší i do dalších výpočtů a celková chyba tím může narůstat.

Na závěr je nutno doplnit, že existují nejen jednokrokové, ale i vícekové metody pro řešení diferenciálních rovnic. Lze se o nich dočíst např. v [1].

Kapitola 3

Simulační nástroj TKSL

System TKSL je simulační jazyk a prostředí pro výpočty diferenciálních rovnic. Veškeré výpočty jsou založeny na diferenciálních rovnicích a jsou řešený výhradně za použití Taylorova rozvoje. System umožňuje numerické řešení diferenciálních rovnic a je schopen výsledky zobrazit do grafů. Zobrazování grafů je jeden z vestavěných prvků systému TKSL. Vstupem, nebo též vstupním programem, je soustava diferenciálních rovnic.

System TKSL byl vytvořen pro prostředí MS-DOS, což v dnešní době může činit problémy s kompatibilitou. Na druhou stranu je třeba ocenit jeho jednoduchost a přímočarost a v neposlední řadě jeho hardwarovou nenáročnost.

V současné době již existuje nová verze systému TKSL, a to TKSL/C, která nemá některá omezení systému TKSL, nicméně pro účely této práce plně dostačuje starší verze systému TKSL.

3.1 Program v TKSL

3.1.1 Struktura programu

Program v TKSL je logicky rozdělen na několik sekcí. Rozdělením sekcí velmi nápadně připomíná jazyk Pascal, ze kterého jazyk TKSL vychází a v němž byl celý systém TKSL napsán.

V této části budou popsány jednotlivé sekce programu v TKSL a poté bude vše ukázáno na příkladu.

1. *Definice konstant*

```
const a1=1, a2=2, ...;
```

Sekce je uvozena klíčovým slovem `const` a za tímto klíčovým slovem následuje výčet konstant ve tvaru `id:=číslo`. Jednotlivé definice jsou od sebe odděleny čárkami a poslední definice je ukončena středníkem.

2. *Deklarace proměnných*

```
var id1, id2, ...;
```


Sekce je uvozena klíčovým slovem `var`, za nímž následuje výčet identifikátorů proměnných, které jsou odděleny čárkou. Za posledním identifikátorem následuje středník.

3. *Tělo programu*

```
system
  :
sysend;
```

Tělo hlavního programu v TKSL začíná klíčovým slovem `system` a končí klíčovým slovem `sysend`. V těle programu lze používat přiřazovací příkazy a několik klíčových slov. Přiřazovací příkaz je příkaz ve tvaru `id=výraz;`. Důležitý je rovněž zápis diferenciální rovnice, který vypadá následovně: `id'=výraz1 &výraz2;`, kde `id'` je proměnná vyskytující se v derivaci, `výraz1` je řešená diferenciální rovnice a konečně `&výraz2` je zápis počáteční podmínky řešené rovnice. Příkaz je opět ukončen středníkem.

4. *Konec programu – poslední příkaz*

Pro překladač je indikace konce souboru (konce programu, či konce překladu) stejná jako v programovacím jazyce Pascal, tedy tečkou za posledním příkazem. Tímto příkazem může být např. klíčové slovo `sysend`, pak za ním následuje tečka.

Na závěr této části je třeba ještě dodat, že překladač jazyka TKSL je typu case-insensitive, což znamená, že překladač nerozlišuje malá a velká písmena. Další informace o systému TKSL lze najít v [3]

3.1.2 Příklad programu v TKSL

Předpokládejme, že máme řešit tuto diferenciální rovnici:

$$y''' + a_2y'' + a_1y' + a_0y = b_3z''' + b_2z'' + b_1z' + b_0z \quad (3.1)$$

Diferenciální rovnici bude řešena metodou postupné integrace. Tím vznikne soustava diferenciálních rovnic, použitelná v systému TKSL.

$$A = \frac{1}{p}(b_0z - a_0y) \quad (3.2)$$

$$B = \frac{1}{p}(b_1z - a_1y + A) \quad (3.3)$$

$$C = \frac{1}{p}(b_2z - a_2y + B) \quad (3.4)$$

$$y = b_3z + C \quad (3.5)$$

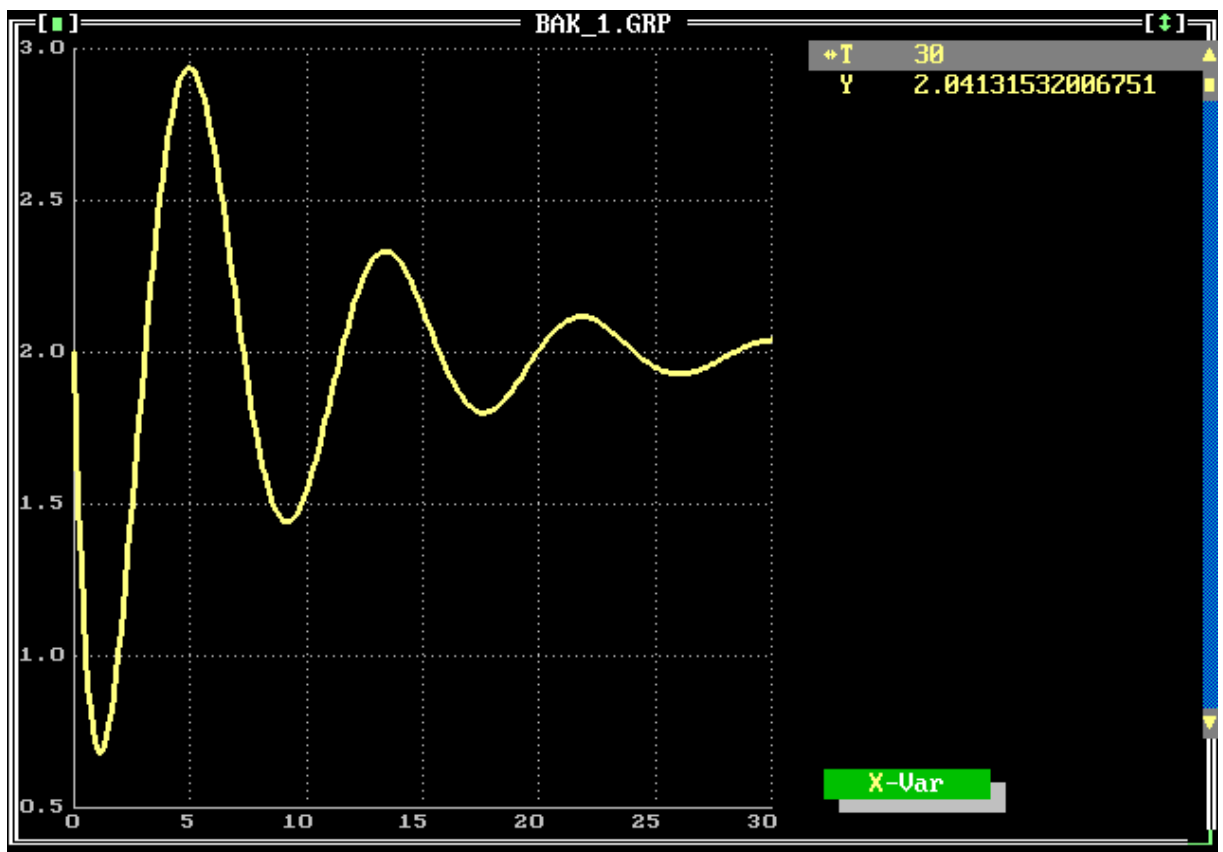
Dále je potřeba zapsat tyto diferenciální rovnice v programu TKSL. Kód programu může vypadat např. takto:

```

const
  b0=2, b1=1, b2=1, b3=2,          { definice konstant }
  a0=1, a1=1, a2=2,
  tmax = 10, DT=0.1, EPS = 1e-20;
var
  y,z,A,B,C;                       { deklarace proměnných }
system
  A'= b0*z - a0*y      &0;         { zápis jednotlivých rovnic }
  B'= b1*z - a1*y + A &0;
  C'= b2*z - a2*y + B &0;
  y = b3*z + C;
  z = 1;                            { vynucující funkce - odezva na jednotkový skok }
sysend;
xaxis(0,10);
yaxis(0,5).

```

Řešení dané rovnice 3.1 je znázorněno v následujícím grafu.



Obrázek 3.1: Řešení diferenciální rovnice 3.1

Kapitola 4

Řešení elektrických obvodů metodou smyčkových proudů a uzlových napětí

4.1 Elektrické prvky

Tato bakalářská práce se zabývá popisem a řešením lineárních elektrických obvodů. Tyto obvody jsou tvořeny základními elektrickými prvky. Zkoumané elektrické prvky jsou zpravidla rezistor, kondenzátor a cívka (případně i zdroj elektrického napětí).

Tyto elektrické prvky však nikdy v reálném světě nejsou ideální. Nicméně pro účely této práce a celé teorie těchto obvodů lze, a je také nutné, tyto prvky idealizovat. To znamená, že na použitých prvcích nás zajímají pouze jejich hlavní elektrické vlastnosti. U rezistoru je touto vlastností ohmický odpor, u kondenzátoru jeho elektrická kapacita a u cívky její vlastní indukčnost. Ostatní vlastnosti těchto prvků jako např. vnitřní odpor cívky či vlastní indukčnost rezistoru lze buďto zanedbat a nebo nahradit odpovídajícími elektrickými ideálními prvky. Tímto přístupem se lze co nejvíce přiblížit realitě a využít co nejvíce vlastností daných elektrických prvků.

Dále existuje předpoklad, že u pasivních prvků jsou sledované parametry nezávislé na čase. Kdyby nebyl tento předpoklad uvažován, byly by diferenciální rovnice popisující chování prvků složitější.

4.2 Přechodný děj a ustálený stav v obvodu

V elektrických obvodech jsou sledovány dva základní stavy obvodu: ustálený stav a přechodný děj v obvodu. Přechodný děj v obvodu nastane např. při sepnutí spínače, připojení napájení k obvodu, či zapojení nějaké součástky do obvodu, případně změně parametrů zdroje napájení.

Pokud v obvodu nastane přechodný děj, který bez dalších zásahů do obvodu necháme

probíhat, obvod se za nějaký čas dostane do ustáleného stavu. Ustáleným stavem se rozumí stav obvodu, kdy jsou všechny veličiny (napětí a proud) na všech prvcích konstantní.

V ustáleném stavu se kondenzátor chová jako rozpojení obvodu. Na jeho svorkách lze změřit elektrické napětí, ale kondenzátorem neprotéká žádný proud. Naproti tomu cívka se v ustáleném stavu chová jako zkrat. Nelze na ní změřit elektrické napětí, ale pouze proud, který jí protéká.

Pro popis obvodu v ustáleném stavu lze použít Ohmův zákon a Kirchhoffovy zákony [5], nicméně pro popis přechodných dějů v obvodu je potřeba zvolit metodiku popisu a řešení zcela jinou. Jde právě o metodu popisu přechodného děje diferenciálními rovnicemi za pomoci Ohmova zákona a Kirchhoffových zákonů. Je zřejmé, že přechodné děje mohou vznikat pouze v obvodech, kde se nacházejí prvky schopny hromadit energii. Tyto prvky jsou již dříve zmiňovaná cívka a kondenzátor, v nichž se energie mění spojitě a proto je lze popsat diferenciálními rovnicemi.

4.3 Elektrické veličiny v obvodu

Kondenzátor a cívku, tj. elektrické prvky schopné hromadit elektrickou energii budou popisovány diferenciálními rovnicemi. Rezistor a ostatní prvky, které nejsou schopny hromadit energii lze popisovat běžnými algebraickými rovnicemi.

Při popisu elektrických prvků diferenciálními rovnicemi je nezbytné si zvolit počáteční podmínku výpočtu. V případě obvodu, ve kterém není přítomen zdroj elektrického napětí, a k němuž tento zdroj teprve připojujeme volíme počáteční podmínky diferenciálních rovnic zpravidla nulové. V algebraických rovnicích se počáteční podmínky nevyskytují. Jednotlivé veličiny na každém prvku obvodu budou popisovány jednotně podle následujících vztahů pro každý prvek.

1. Ohmický odpor

- Napětí: $u(t) = R \cdot i(t)$
- Proud: $i(t) = \frac{u(t)}{R}$

2. Kapacitor (kondenzátor)

- Napětí: $u(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt$
- Proud: $i(t) = C \cdot u(t)'$

3. Indukčnost (cívka)

- Napětí: $u(t) = L \cdot i(t)'$
- Proud: $i(t) = \frac{1}{L} \int u(t) dt$

4.4 Metoda smyčkových proudů

Metoda smyčkových proudů je jedna z metod popisujících elektrický obvod a je založena na Kirchhoffových zákonech. Řešení elektrického obvodu touto metodou spočívá tom, že je potřeba si popsat jednotlivé uzavřené smyčky v obvodu. Při popisu využijeme již dříve zmiňovaných vztahů pro rezistor (1), kapacitor (2) a indukčnost (3). V dalším kroku je potřeba si z rovnic vyjádřit proměnnou v nejvyšší derivaci a provést zápis pro TKSL.

Poslední věcí, která je potřeba ještě dodefinovat, jsou Kirchhoffovy zákony, na nichž metoda smyčkových proudů staví.

První Kirchhoffův zákon

Součet všech proudů do uzlu vstupujících se rovná součtu všech proudů z uzlu vystupujících.

$$\sum_{i=0}^n I_i = 0 \quad (4.1)$$

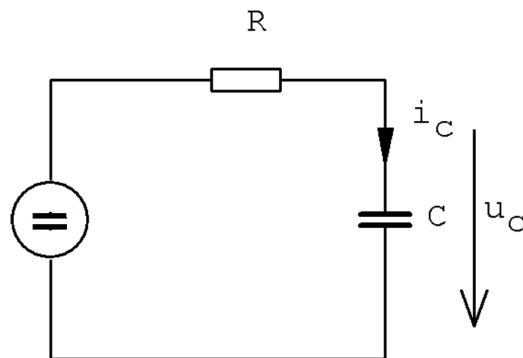
Druhý Kirchhoffův zákon

Součet všech napětí ve smyčce je roven nule.

$$\sum_{i=0}^n U_i = 0 \quad (4.2)$$

4.4.1 Obvod RC s jednou smyčkou

Jedná se o obvod, kde se vykytují dva zkoumané prvky, a to rezistor(R) a kondenzátor(C). Schema obvodu viz následující obrázek (4.1). V obvodu se vyskytuje pouze jedna smyčka,



Obrázek 4.1: Schema zapojení

tu lze popsat rovnicemi z kapitoly 4.3. Pro kondenzátor C jde o rovnici

$$u'_c = \frac{1}{C}i_c, \quad (4.3)$$

pro napětí na rezistoru R platí

$$u_R = u - u_c, \quad (4.4)$$

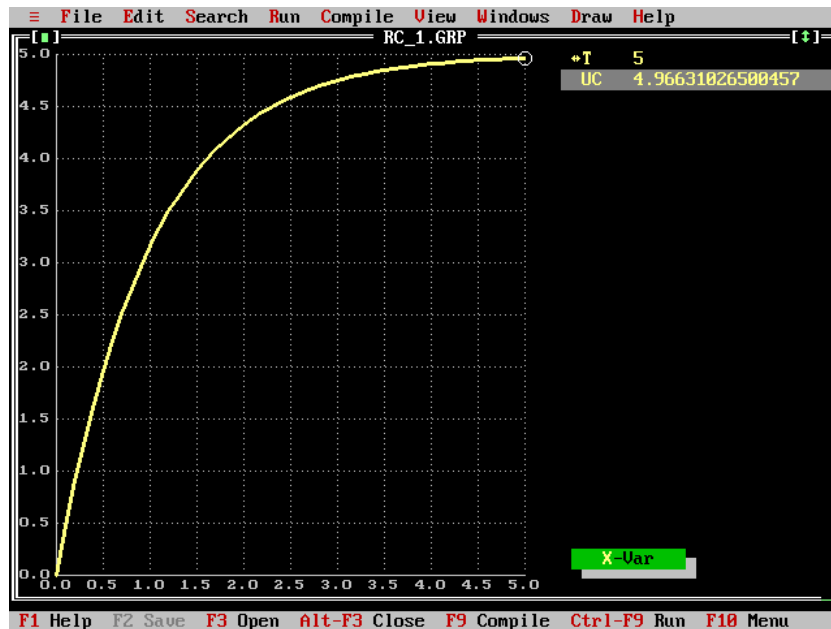
a protože $u_R = Ri_C$, po úpravách je odvozena výsledná rovnice

$$u'_C = \frac{1}{C} \frac{u - u_C}{R}, \quad (4.5)$$

která již lze použít v TKSL. Program v TKSL vypadá následovně:

```
const
  C = 1, R=1, tmax=5, dt=0.1;
var
  i, uC, u;
system
  u =5;
  uC' = 1/C*i &0; { Zápis diferenciální rovnice }
  i = (u-uc)/R;
sysend.
```

Graf závislosti napětí na čase (řešení obvodu) je znázorněn na následujícím obrázku(4.2) Řešení obvodu dopadlo dle očekávání, protože napětí na kondenzátoru bylo nejprve nulové



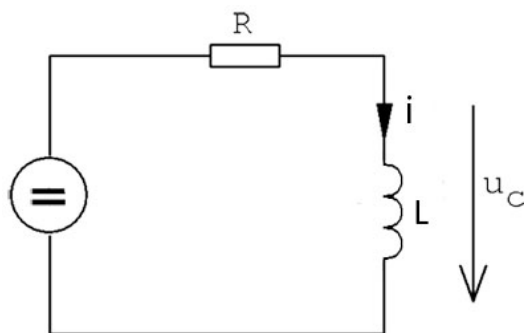
Obrázek 4.2: Graf závislosti napětí na čase

a s postupujícím časem se napětí u_c zvýšilo až na hodnotu napětí u , což znamená, že kondenzátor se nabil elektrickou energií.

Jedná se o velmi jednoduchý obvod, pro který funguje metoda smyčkových proudů bez chyb a dle očekávání. Obvod i metoda jsou stabilní.

4.4.2 Obvod RL s jednou smyčkou

V tomto obvodu se opět nacházejí pouze dva zkoumané prvky, ale tentokrát rezistor R a indukčnost (cívka) L . Schema tohoto obvodu (4.3) je velmi podobné schématu předchozímu (viz. 4.1). V obvodu se opět vyskytuje pouze jedna smyčka, kterou lze popsat rovnicemi



Obrázek 4.3: Schema zapojení

z kapitoly 4.3. Smyčku jako takovou popíšeme rovnicí

$$u = u_R + u_L, \quad (4.6)$$

u_R je napětí na rezistoru R , u_L napětí na cívce L . Zatímco kondenzátor se po nabití chová tak, že přes něj neteče žádný proud, cívka se chová přesně opačně, tedy lze na ní měřit protékající proud, jinými slovy se chová jako zkrat. napětí u_R lze popsat rovnicí

$$u_R = Ri \quad (4.7)$$

a konečně cívka L lze popsat rovnicí

$$i'_L = \frac{1}{L}u_L. \quad (4.8)$$

Dosazením rovnic 4.8 a 4.7 do rovnice 4.6 a vyjádřením proudu i'_L dostáváme rovnici

$$i'_L = \frac{1}{L}(u - Ri_L). \quad (4.9)$$

Program v TKSL vypadá pak následovně:

```

var
    iL, u;
const
    L=1, R=1, tmax=5, dt=0.1;

system
    u =5;
    iL' = 1/L*(u-R*iL) &0;
sysend.

```

Řešení obvodu se nachází v následujícím grafu závislosti proudu i_L na čase t . Řešení ob-



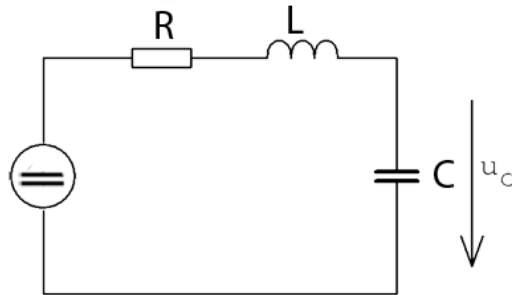
Obrázek 4.4: Graf závislosti proudu na čase

vodu dopadlo dle očekávání, protože proud procházející cívku byl nejprve nulový a s postupujícím časem se proud i_L zvyšoval.

Jedná se o velmi jednoduchý obvod, pro který funguje metoda smyčkových proudů bez chyb a dle očekávání. Obvod i metoda jsou stabilní.

4.4.3 Obvod RLC s jednou smyčkou

Obvod RLC již lze považovat za mírně složitější obvod než předchozí dva. Již se v něm vyskytují všechny tři typy zkoumaných elektrických prvků, tedy kondenzátor, cívka (induktor) a rezistor. Obvod je znázorněn na následujícím schématu (4.5). V obvodu se opět



Obrázek 4.5: Schema zapojení

vyskytuje pouze jedna smyčka, obvod lze popsat touto rovnicí podle 2. Kirchhoffova zákona:

$$u = u_R + u_L + u_C \quad (4.10)$$

Opět se využívá popis prvků z kapitoly 4.3 a dosazením do rovnice 4.10 dostaneme:

$$u = Ri_L + Li'_L + u_C, \quad (4.11)$$

ze které pak lze úpravami získat výsledné rovnice pro TKSL. Rovnice budou vypadat následovně:

$$i'_L = \frac{1}{L}(u - Ri_L - u_C) \quad (4.12)$$

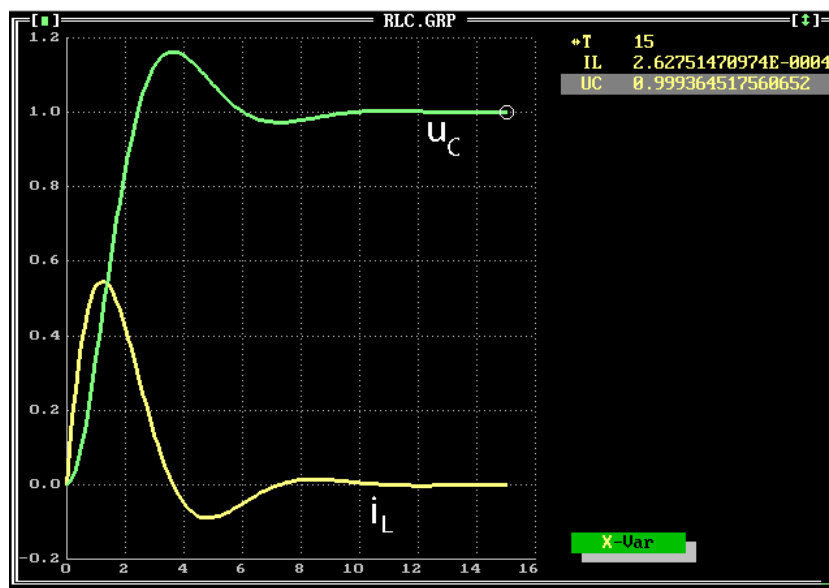
$$u'_C = \frac{1}{C}i_L \quad (4.13)$$

Nyní jsou odvozeny všechny potřebné rovnice a lze tedy přikročit k simulaci v systému TKSL. Program bude vypadat následovně:

```
var
    iL, uc, u;
const
    tmax=15, dt=0.1, eps=1e-20, R=1, L=1, c=1;

system
    uc' = (1/c)*iL &0; {popis napětí na kondenzátoru}
    iL' = (1/L)*(u-R*iL-uc) &0; {popis celé smyčky}
    u = 1;
sysend.
```

Řešení obvodu je v následujícím grafu závislosti proudu i_L , napětí u_C na čase t .



Obrázek 4.6: Graf závislosti proudu a napětí na čase

Řešení obvodu dopadlo dle očekávání. Kondenzátor se pozvolna nabíjí na hodnotu napětí. Cívka se nejprve “brání”, ale nakonec se také dostane do ustáleného stavu. Cívka se po ustálení chová jako zkrat, tedy žádné napětí jí už neprotéká.

I pro tento velmi jednoduchý obvod je metoda smyčkových proudů použitelná, je stabilní stejně jako řešený obvod.

4.4.4 Zhodnocení obvodů z kapitol 4.4.1, 4.4.2 a 4.4.3

V předchozích kapitolách byly diskutovány jednoduché jednosmyčkové obvody typů RC, RL a konečně RLC. Jsou to obvody velice jednoduché a také hodně názorné. Řešení všech tří obvodů dopadlo dle očekávání. Lze říci, že použitá metoda smyčkových proudů je pro tyto obvody stabilní, dává očekávané výsledky a je tedy velmi dobře použitelná.

Nyní je potřeba se zamyslet nad tím, zda je možné dříve uvedené postupy nějakým způsobem algoritmizovat. V obvodech se vyskytovala právě jedna smyčka, nebylo třeba žádného složitějšího vyjadřování, ani složitých úprav. V prvních dvou případech (obvody RC a RL) vedlo řešení pouze na jednu diferenciální rovnici. V posledním obvodu se již vyskytly dvě diferenciální rovnice, protože bylo potřeba sledovat napětí u_C na kondenzátoru a proud na i_L na cívce. Z výše uvedeného tedy vyplývá, že je potřeba sestavit tolik diferenciálních rovnic, kolik je v obvodu prvků schopných hromadit energii.

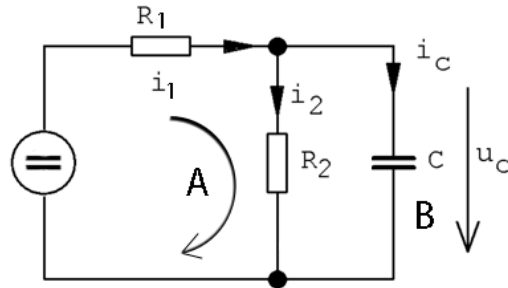
Algoritmizace tohoto typu obvodů by tedy spočívala v tom, že by bylo třeba projít celý obvod a převést jednotlivé prvky na základní diferenciální rovnice, kterými jsou prvky

popsány. Pak bude nutno s použitím Kirchhoffových zákonů sestavit výsledné diferenciální rovnice. Stále je však třeba mít na paměti, že tyto typové obvody jsou velmi jednoduché.

V dalším textu budou ukázány obvody se dvěma a více smyčkami, které jsou již složitější.

4.4.5 Obvod RC se dvěma smyčkami

V tomto obvodu se vyskytnou dva rezistory a jeden kondenzátor. Schema obvodu je opět znázorněno na následujícím obrázku:



Obrázek 4.7: Schema zapojení

Popis obvodu je vzhledem k tomu, že má dvě smyčky, složitější, nicméně stále je třeba vycházet pouze z Kirchhoffových zákonů a rovnic popisujících jednotlivé prvky. Smyčku A lze popsat rovnicí

$$u - R_1 i_1 - R_2 i_2 = 0 \quad (4.14)$$

a smyčku B rovnicí

$$u - R_1 i_1 - u_C = 0. \quad (4.15)$$

Z rovnice 4.15 lze vyjádřit proud i_1

$$i_1 = \frac{u - u_C}{R_1}, \quad (4.16)$$

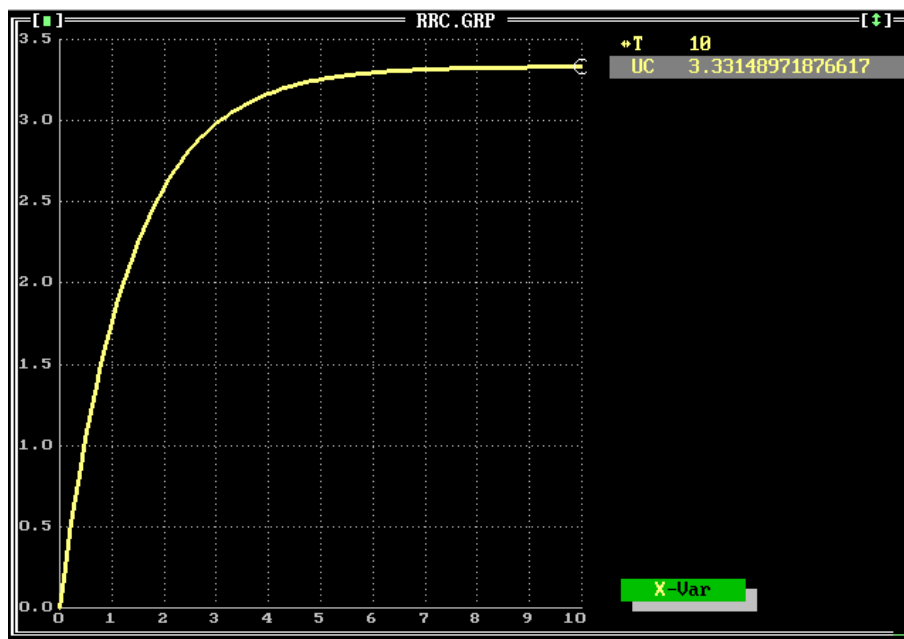
který dosadíme do rovnice 4.14 a po úpravách vyjádříme proud i_2 následovně:

$$i_2 = \frac{u_C}{R_2} \quad (4.17)$$

Protože podle 1. Kirchhoffova zákona platí $i_C = i_1 - i_2$ a pro kondenzátor známý vztah $u'_C = \frac{1}{C} i_C$ a protože jsou vyjádřeny proudy i_1 a i_2 , lze do rovnice pro kondenzátor jednotlivé rovnice dosadit. Výsledkem je konečná diferenciální rovnice:

$$u'_C = \frac{1}{C} \left(\frac{u - u_C}{R_1} - \frac{u_C}{R_2} \right) \quad (4.18)$$

Program v TKSL bude velmi podobný těm dříve uvedeným, proto již nemá smysl jej uvádět. Uveden je tedy pouze graf řešení tohoto obvodu (viz obr. 4.8), které je velmi podobné prvním obvodu RC, který již byl řešen.

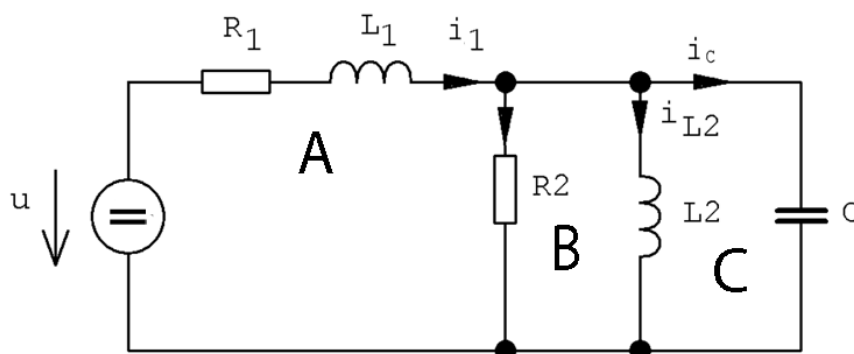


Obrázek 4.8: Graf závislosti napětí na čase

Řešení obvodu je velmi podobné řešení obvodu RC, který byl uveden dříve. U tohoto obvodu bylo třeba provést více operací než u předešlých obvodů. Nicméně metoda smyčkových proudů stále dává správné a očekávané výsledky a je tedy stabilní stejně jako řešení obvod.

4.4.6 Obvod RLC se třemi smyčkami

V této části uveden obvod se třemi smyčkami, který lze stále považovat za jednoduchý, protože k jeho vyřešení zatím není potřeba použít žádný náročnější matematický aparát a jsou použity pouze základní matematické operace a vyjadřování proměnné z rovnice.



Obrázek 4.9: Schema zapojení

V obvodu se nacházejí tři smyčky, které lze popsat následujícími rovnicemi. Smyčku A

lze popsat rovnicí:

$$u - R_1 i_1 - L_1 i_1' - R_2 i_2 = 0, \quad (4.19)$$

smyčku B rovnicí:

$$u - R_1 i_1 - L_1 i_1' - L_2 i_{L2}' = 0 \quad (4.20)$$

a konečně smyčku C rovnicí:

$$u - R_1 i_1 - L_1 i_1' - u_C = 0. \quad (4.21)$$

Z rovnice 4.19 lze vyjádřit proud i_1' následovně:

$$i_1' = \frac{1}{L_1}(u - R_1 i_1 - R_2 i_2). \quad (4.22)$$

Z rovnice 4.20 po dosazení předchozí rovnice 4.22 lze vyjádřit proud i_{L2}' :

$$i_{L2}' = \frac{1}{L_2}(R_2 i_2). \quad (4.23)$$

Z poslední rovnice 4.21 po dosazení rovnice pro proud i_1' (4.22) je vyjádřen proud i_2

$$i_2 = \frac{1}{R_2}(u_C), \quad (4.24)$$

který je třeba znovu dosadit do předchozích rovnic 4.22 a 4.23. Rovnice 4.22 pak bude vypadat takto:

$$i_1' = \frac{1}{L_1}(u - R_1 i_1 - u_C). \quad (4.25)$$

Rovnice 4.23 pak bude upravena na:

$$i_{L2}' = \frac{1}{L_2}(u_C). \quad (4.26)$$

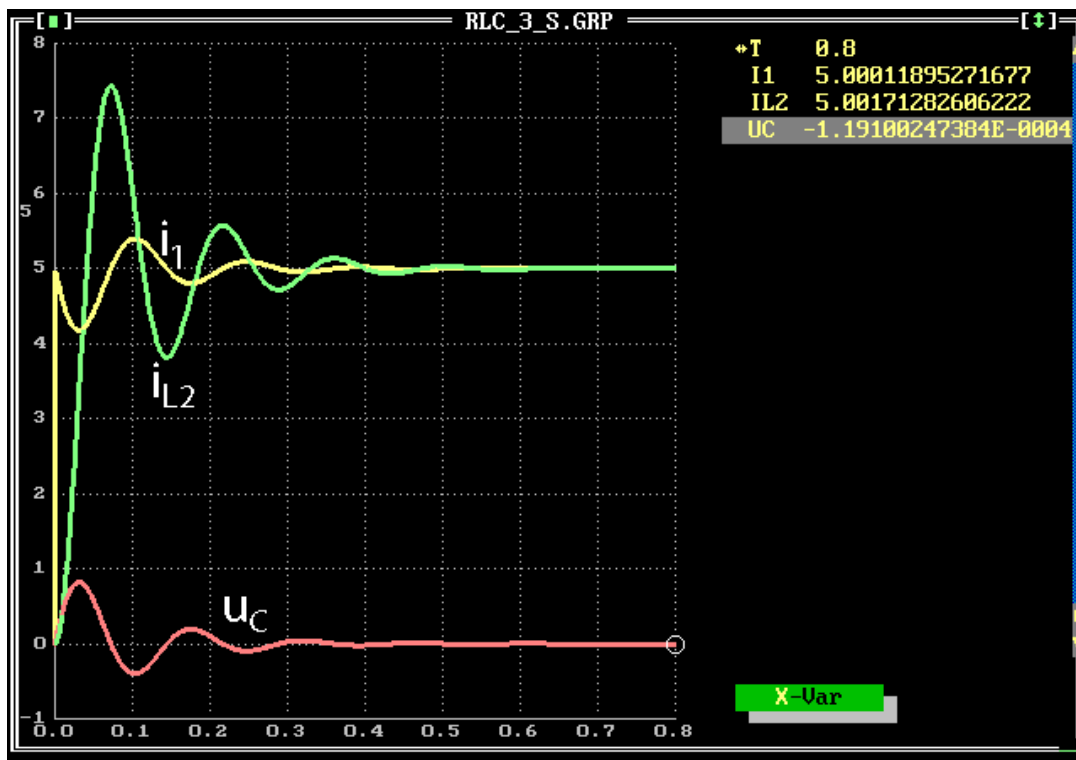
V tuto chvíli jsou odvozeny dvě rovnice potřebné pro TKSL. Pokud by v tuto chvíli byla ještě jednou použita třetí původní rovnice 4.21 a znovu se do ní dosazovala nově sestavená rovnice pro proměnnou i_1' , veškeré proměnné by se v rovnici vyrušily. Zatím jsou tedy popsány obě cívky, ale chybí ještě popsat kondenzátor. Proto je potřeba sáhnout po 1. Kirchhoffově zákoně a popsat jím obvod. Obvod (resp. uzel v obvodu) lze popsat rovnicí:

$$i_1 - i_2 - i_{L2} - i_C = 0, \quad (4.27)$$

z níž je potřeba vyjádřit proměnnou i_C , která bude využita ve vztahu popisujícím kondenzátor. Do nově vznikající rovnice je třeba opět dosadit rovnici pro proud i_2 a po úpravách je odvozena poslední třetí rovnice popisující kondenzátor.

$$u_C' = \frac{1}{C} \left(i_1 - \frac{1}{R_2} u_C - i_{L2} \right) \quad (4.28)$$

V tuto chvíli bylo odvozeno vše, co je potřeba a lze přikročit k simulaci obvodu v systému TKSL. Řešení obvodu při vhodné volbě hodnot jednotlivých prvků může dopadnout např. tak, jak zobrazuje následující graf závislosti proudů i_1 , i_{L2} a napětí u_C na čase t .



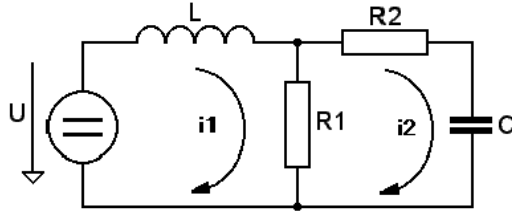
Obrázek 4.10: Graf závislosti proudů i_1 , i_{L2} a u_C na čase

Z předchozího je vidět, že ve chvíli, kdy jsou v obvodu tři smyčky, je jeho řešení čím dál tím více složitější. Automatické zpracování tohoto obvodu by již bylo dosti složité, protože není jasné, který způsob řešení obvodu je nejvhodnější. V tomto případě existuje několik postupů, jak dojít k řešení. Platí, že smyčky lze volit libovolně, tedy není nutné je volit tak, jak byly zvoleny. Avšak právě tato volba smyček vedla na nejjednodušší řešení a odvozování jednotlivých diferenciálních rovnic.

Nyní ještě budou ukázány dva obvody - jeden, kde metoda smyčkových proudů sice funguje, ale až za použití substitucí a druhý - kde již metoda smyčkových proudů selhává.

4.4.7 Obvod RLC se dvěma smyčkami s nutností substituce

V tomto obvodu se vyskytují dva rezistory, jedna cívka a jeden kondenzátor. Schema obvodu je znázorněno na následujícím obrázku (4.11):



Obrázek 4.11: Schema zapojení

Jako první se pokusme vyřešit obvod klasicky pouze metodou smyčkových proudů bez substitucí. Jednotlivé smyčky lze popsat následujícími rovnicemi:

$$u - Li'_L - R_1(i_1 - i_2) = 0 \quad (4.29)$$

$$R_1(i_2 - i_1) + R_2i_2 + u_C = 0 \quad (4.30)$$

$$i_L - i_1 - i_2 = 0 \quad (4.31)$$

Po úpravách a za použití již dříve uvedeného vztahu pro popis kondenzátoru dostanou rovnice následující tvar:

$$i'_L = \frac{1}{L} [u - R_1(i_1 - i_2)] = 0 \quad (4.32)$$

$$u'_C = \frac{1}{C} \frac{R_1i_1 - u_C}{R_1 + R_2} \quad (4.33)$$

Jediná proměnná, o níž není dosud žádná informace, je proud i_1 , který lze vyjádřit následovně:

$$i_1 = i_L - i_2 \quad (4.34)$$

V tuto chvíli tedy jsou popsány všechny prvky přesně tak, jak to vyžaduje systém TKSL. Avšak vyvstal zde jeden podstatný problém, a tím problémem je cyklická závislost proměnných, neboli tzv. rychlá smyčka.

Samozřejmě by ještě šlo použít rovnici 4.34, kterou je možno znovu dosadit do předchozích rovnic 4.32 a 4.33. Tím se ale přijde o proud i_1 a navíc řešení obvodu nedává správný výsledek.

Řešením je tedy v tuto chvíli použití substituce, případně využití jiné metody řešení tohoto obvodu. V případě, že se v rovnicích 4.29 a 4.30 provede substituce

$$i_1 = x' \quad (4.35)$$

$$i_2 = y' \quad (4.36)$$

dostanou po úpravách rovnice tvar

$$Lx'' + R_1(x' - y') - u = 0 \quad (4.37)$$

$$R_2y' + \frac{1}{C}y + R_1(y' - x') = 0, \quad (4.38)$$

z nichž se pak vyjádří vždy proměnná v nejvyšší derivaci.

$$x'' = \frac{U - R_1(x' - y')}{L} \quad (4.39)$$

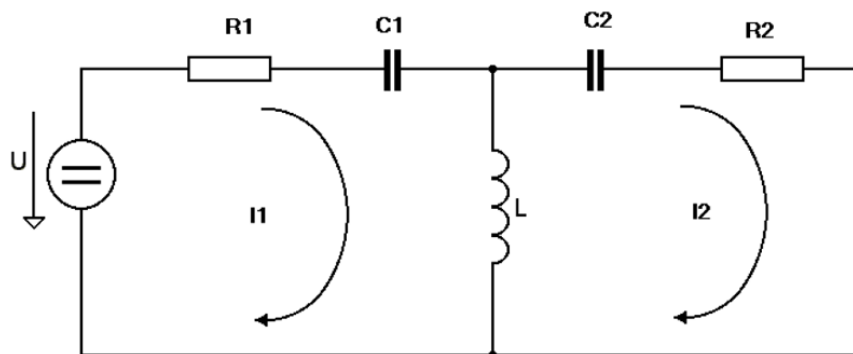
$$y' = \frac{R_1x' - \frac{1}{C}y}{R_1 + R_2} \quad (4.40)$$

Detailní řešení tohoto obvodu lze najít v [1].

Tento obvod se na první pohled nezdá být ničím složitý. V průběhu řešení obvodu se však vyskytly problémy s použitou metodou řešení obvodu. Z výše uvedeného tedy vyplývá, že ne každý obvod lze jednoduše touto metodou vyřešit, a že v určitých případech je potřeba využít složitějších postupů. Došlo tedy k situaci, že pro stabilní obvod je použitá metoda nestabilní.

4.4.8 Obvod RLC, neřešitelný metodou smyčkových proudů

Elektrický RLC obvod na následujícím obrázku (4.12) je sestaven ze dvou smyček a obsahuje všechny tři druhy zkoumaných elektrických prvků.



Obrázek 4.12: Schema zapojení

Obvod lze řešit jak klasicky, tak s použitím substituce. Zde bude uveden klasický způsob řešení, o řešení pomocí substituce se lze dočíst v [1].

Pro smyčku označenou i_1 platí rovnice:

$$R_1i_1 + u_{C1} + L(i_1 - i_2)' - u = 0. \quad (4.41)$$

Obdobně pro smyčku i_2 platí:

$$R_2 i_2 + u_{C2} + L(i_2 - i_1)' = 0. \quad (4.42)$$

Úpravou rovnice 4.42 lze vyjádřit proud i_1' následovně:

$$i_1' = \frac{1}{L}(u_{C2} + R_2 i_2 + L i_2') \quad (4.43)$$

a úpravou rovnice 4.41 lze vyjádřit proud i_2' podobně:

$$i_2' = \frac{1}{L}(R_1 i_1 + u_{C1} + L i_1' - u). \quad (4.44)$$

Nyní by bylo možné obě rovnice do sebe dosadit, či je sestavit jiným způsobem. Dosazením do rovnic za proměnné i_1' a i_2' je možné sice danou proměnnou v derivaci vyloučit, rovnice pak vypadá např. takto (bylo provedeno dosazení 4.43 do roznásobené 4.41):

$$R_1 i_1 + u_{C1} + u_{C2} + R_2 i_2 - u = 0. \quad (4.45)$$

Podobně lze vyjádřit dosadit do druhé diferenciální rovnice. Při dalším pokusu o dosazení však po běžné algebraické úpravě dostaneme pouze $0 = 0$, tedy všechny členy rovnice se navzájem vyruší.

Při pokusu o řešení diferenciálních rovnic tedy opět narážíme na problém vzniku rychlých smyček, kdy chceme použít proměnnou, která se teprve musí vypočítat a navíc vyžaduje právě počítanou proměnnou.

Obvod je tedy touto metodou neřešitelný a metoda je v tomto případě nestabilní. Pokud bychom chtěli tento obvod vyřešit, je třeba sáhnout po jiné metodice. Touto metodikou může být např. řešení obvodů pomocí Autonomní metody, o které se lze dočíst v [4].

4.5 Zhodnocení metody smyčkových proudů a uzlových napětí

V předchozích kapitolách byly zkoumány metody smyčkových proudů a uzlových napětí, coby obecné metody řešení elektrických obvodů a přechodných dějů v nich. Nejprve byly diskutovány velice jednoduché obvody s právě jednou smyčkou, aby bylo zřejmé, jak se v jednotlivých typových obvodech zkoumané prvky chovají. Dále byly ukázány složitější obvody, kde lze již o vhodnosti a dobré použitelnosti této metody polemizovat.

Metoda smyčkových proudů je pro jednoduché obvody stabilní, dává očekávané výsledky a je tedy použitelná pro řešení těchto obvodů. Avšak v obvodu, kde se vyskytují aspoň dvě smyčky, může být již sestavení potřebných diferenciálních rovnic složité.

Byly však ukázány také dva typy RLC obvodů, kde sice byly jen dvě smyčky, ale metoda smyčkových proudů byla pro jejich řešení použitelná pouze s problémy nebo obvod nebyla schopna vyřešit.

V prvním případě (viz kap. 4.4.7) byl obvod ještě řešitelný, ale musela se použít metoda substituční, aby v obvodu při výpočtu a odvozování diferenciálních rovnic nevznikaly rychlé

smyčky, které způsobují nestabilitu celého systému (a tedy i neřešitelnost, nebo nesprávné výsledky).

V druhém případě (viz kap. 4.4.8) metoda smyčkových proudů selhala úplně. V řešení se vyskytly rychlé smyčky a řešení bylo tedy nestabilní, ačkoli obvod jako takový stabilní je. V tomto případě je nutné zvolit jinou metodiku řešení.

Z těchto experimentů a na základě výpočtů bylo zjištěno, že metoda smyčkových proudů je dobře použitelná pouze pro velmi jednoduché obvody. V obvodu, kde se vyskytují alespoň dvě smyčky, lze metodu použít s určitým omezením. V případě, že ve větvi, která následuje za prvním uzlem (pokud se obvod prochází od zdroje napětí), se nachází buďto pouze jeden elektrický prvek (libovolný), je metoda použitelná bez jakýchkoli problémů. Pokud se jedná o obvod se dvěma smyčkami, kde se ve větvích vyskytují dva prvky, je metoda použitelná pouze za předpokladu, že se v první smyčce se nachází pouze jeden prvek jednoho typu a ve druhé např. dva, je zpravidla potřeba sáhnout při konstruování diferenciálních rovnic po různých netriviálních úpravách, tj. substitucích.

V případě, že se v obvodu vyskytují dvě smyčky a v jedné větvi kondenzátor a ve druhé cívka (indukčnost) a dále ještě třeba rezistor (viz kap. 4.4.8), je metoda smyčkových proudů nepoužitelná. Budou totiž vznikat algebraické smyčky (rychlé smyčky), které znemožní řešení obvodu touto metodou.

Je také mít potřeba na paměti při analýze obvodu, že pro každý prvek schopný hromadit energii, je potřeba právě jedna diferenciální rovnice. Větší počet diferenciálních rovnic rovněž může vést k nestabilitě metody.

Všechny zde uvedené poznatky byly ověřeny systémem TKSL, z něhož pocházejí všechny grafy a zdrojové kódy. Systém TKSL byl diskutován v kapitole 3.

Kapitola 5

Prostředí pro zadávání obvodů a náročné výpočty

V této kapitole budou zmíněna některá vývojová prostředí pro zadávání elektrických obvodů a výpočty náročných rovnic.

Prostředí pro zadávání obvodů bývají zpravidla komerční, existují však i volně šiřitelná prostředí. Problémem komerčních prostředí je zpravidla jejich vysoká cena, problémem volně šiřitelných pak jejich stabilita. Existují také prostředí, kde lze zadávat obvody a navrhovat plošné spoje, ale tato prostředí zpravidla neumějí počítat diferenciální rovnice, např. program KiCAD (volně šiřitelný).

Dále pak existují programy, které jsou zaměřeny hlavně na matematické výpočty. Mezi hlavní a světově uznávané programy patří prostředí Matlab, či Maple, které sice umějí provádět složité výpočty, ale neumějí zadávat elektrické obvody. Ve srovnání se systémem TKSL je práce s nimi zpravidla náročnější a pokud chceme kromě výpočtu ještě hodnoty zaznačit do grafu, jsou na to potřeba speciální příkazy. Naproti tomu systém TKSL grafy vykresluje automaticky a je možné kdekoli odečíst aktuální přesnou hodnotu.

Zástupcem prostředí, v němž lze zadat obvod a provést analýzu obvodu, je program Micro-Cap. Tento program existuje na poli výpočetní techniky již od roku 1982. V programu lze velmi jednoduše nakreslit elektrický obvod, lze si jej nechat programem zkontrolovat a analyzovat. Micro-Cap je schopen např. využívat metodu Monte Carlo pro výpočet integrálu, jeho součástí je možnost provést určitou simulaci obvodu s možností záznamu výsledků do grafů.

Kapitola 6

Závěr

Cílem této bakalářské práce bylo ověřit a analyzovat stabilitu a použitelnost obecných metod analýzy elektrických obvodů s přímým využitím diferenciálních rovnic a Taylorovy řady a také analýza stability vzniklých soustav diferenciálních rovnic.

Hlavní část této práce je zaměřená právě na metody smyčkových proudů a uzlových napětí. Metoda je přiblížena na názorných příkladech jednotlivých typů obvodů. Je vždy ukázáno, z jakých rovnic se vychází a jaké rovnice vzniknou. U obvodů je rovněž diskutována jejich stabilita a rovněž stabilita soustavy diferenciálních rovnic. Diferenciální rovnice jsou pak řešeny systémem TKSL a rovněž jsou v práci zahrnuty grafická řešení daných rovnic. U jednotlivých obvodů je diskutována vhodnost a použitelnost zkoumaných metod. Pro jednotlivé součástky použité v obvodech byly uvedeny základní obecné vztahy, ze kterých každý popis daného typu elektrického prvku vychází.

V práci jsou rovněž uvedeny matematické základy, o něž se celá práce opírá.

Zadání práce jsem splnil a výsledky mé práce jsou uvedeny v předchozích kapitolách. Zdrojové soubory modelovaných obvodů v TKSL jsou uloženy na přiloženém CD.

Seznam obrázků

3.1	Řešení diferenciální rovnice 3.1	14
4.1	Schema zapojení	17
4.2	Graf závislosti napětí na čase	18
4.3	Schema zapojení	19
4.4	Graf závislosti proudu na čase	20
4.5	Schema zapojení	21
4.6	Graf závislosti proudu a napětí na čase	22
4.7	Schema zapojení	23
4.8	Graf závislosti napětí na čase	24
4.9	Schema zapojení	24
4.10	Graf závislosti proudů i_1 , i_{L2} a u_C na čase	26
4.11	Schema zapojení	27
4.12	Schema zapojení	28

Použitá literatura

- [1] Antoš, R.: *Modelování lineárních a nelineárních elektronických obvodů*. Diplomová práce, FEI VUT v Brne, 2001.
- [2] Krupková, V.; Studená, V.: *Matematická analýza 2*. Nakladatelství VUT v Brne, 1991.
- [3] Kunovský, J.: Vysoce náročné výpočty. [online], 2007, [navštíveno 14. 05. 2007].
Dostupné na URL: <http://www.fit.vutbr.cz/~kunovsky/TKSL/index.html>
- [4] Minárik, M.: *Autonomní metoda řešení elektrických obvodů*. Bakalářská práce, FIT VUT Brno, 2007.
- [5] Wikipedie: *Kirchhoffovy zákony*. [online], 2007, [navštíveno 09. 05. 2007].
Dostupné na URL: http://cs.wikipedia.org/w/index.php?title=Kirchhoffovy_z%C3%A1kony&oldid=1472480

Dodatek A

Seznam příloh na CD

A.1 Programové přílohy

- Zdrojové kódy pro program TKSL

A.2 Ostatní přílohy

- Zdrojové texty této práce a podpůrné soubory pro překlad
- Obrázky ve formátech PNG, BMP a EPS pro tuto práci
- Přeložená práce ve formátech PS, PDF a DVI