VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

FAKULTA INFORMAČNÍCH TECHNOLOGIÍ

Ústav inteligentních systémů

Řízení dynamických systémů v reálném čase

Semestrální projekt

Pavel Adamík Brno 2008

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem tuto Diplomovou práci vypracoval samostatně pod vedením Doc. Ing. Jiřího Kunovského, CSc.

Uvedl jsem všechny literární prameny a publikace, ze kterých jsem čerpal poznatky pro zpracování této práce.

Poděkování

Chtěl bych poděkovat především Doc. Ing. Jiřímu Kunovskému, CSc. za jeho odborné vedení, dále za podnětné připomínky a za poskytnutou literaturu, kterou jsem využil pro tvorbu této diplomové práce. Dále také děkuji všem, kteří jakkoli pomohli, či přispěli k tomu, abych mohl tuto diplomovou práci vypracovat.

V Brně, 2. Ledna 2008 **……………….………………..**

Abstrakt

Tento semestrální projekt se zabývá problematikou řízení a regulace v reálném čase. V úvodu jsou uvedeny základy teorie řízení a regulace, metody popisu modelů a základní pojmy potřebné pro práci s dynamickými systémy.

Nezbytný teoretický základ poskytuje obecný popis systémů, jejich rozdělení, základní jevy a matematické prostředky pro jejich popis. Dále se pak popisují regulační obvody, jejich rozdělení, struktura a typy. Podrobně jsou zde rozebírány jednotlivé regulátory a typy regulovaných soustav.

Další kapitola je věnovaná matematickým prostředkům pro výpočet diferenciálních rovnic. Diferenciální rovnice tvoří základ pro popis modelů dynamických systémů.

Klíčová slova

Regulační obvod, regulace, řízení, regulátor, odezva na jednotkový skok, přechodná charakteristika, bloková algebra, diferenciální rovnice, Taylorova řada, simulační systém, TKSL, TKSL/C, A/D převodník, D/A převodník, řád soustavy, integrační krok výpočtu.

Abstract

The main concern of this semestral project is to describe the problematics of controlling and regulation in the real-time. In the beginning there is stated the basic theory of control and regulation, methods of model descriptions and basic terms needed for the work with dynamic systems.

The necessary theoretical base provides a general description of systems, their classification, elementary events and the mathematical means for their descriptions. Furthermore there are regulation circuits, their classification, the structure and their types described. Specific regulators and some types are explored in more detail.

The next chapter is dedicated to the mathematical means for differential equations' enumeration. The differential equations create the basic support for the description of dynamic system models.

Keywords

Control circuit, regulation, controlling, regulator, step response, transient characteristic, block algebra, differential equations, Taylor series, simulation systems, TKSL, TKSL/C, A/D and D/A converter, level of system, integration step.

OBSAH

OBSAH 5
1. Úvod 6
2. Úvod do teorie systémů 7
3. Popis jevů v lineárních systémech 8
3.1 Vnější popisy spojitých lineárních systémů 8
3.2 Vnitřní popisy spojitých lineárních systémů 9
4. Teorie řízení a regulace 13
4.1 Základní pojmy 13
4.2 Struktura regulačních obvodů 14
• Regulovaná veličina (y): 14
• Akční veličina (x): 14
• Řídící veličina (w): 15
• Regulační odchylka (e): 15
• Poruchové veličiny (u1 , u2, u3, u4): 15
4.3 Regulátory 17
4.3.1 Přímočinné regulátory: 17
4.3.2 Regulátory s pomocným zdrojem energie: 18
4.4 Základní typy regulátorů: 18
4.4.1 Proporcionální P-regulátor 18
4.4.2 Integrační regulátor (I-regulátor) 18
4.4.3 Derivační regulátor (D-regulátor) 19
4.5 Složené typy regulátorů: 20
4.5.1 PD regulátor: proporcionálně derivační regulátor 20
4.5.2 PI regulátor: proporcionálně integrační regulátor 20
4.5.3 PID regulátor: proporcionálně derivačně integrační regulátor 21
4.6 Rozvětvené regulační obvody 21
5. Matematický úvod do problematiky 23
5.1 Metody pro výpočet diferenciálních rovnic 23
5.1.1 Analytické řešení 24
5.1.2 Numerické řešení 24
5.1.2.1 Jednokrokové metody 24
6. Závěr 27
7. Literatura 28

1. Úvod

Pro popis chování objektů reálného světa lze použít dva odlišné přístupy, spojitý a diskrétní. O tom, které prostředky budou vhodnější, rozhoduje úroveň abstrakce, kterou při modelování použijeme. Výběr popisu modelu proto závisí jak na účelu modelu, tak na úrovni našich znalostí o modelovaném systému. Jednou z nejpřirozenějších forem popisu dynamického systému je blokový diagram.
V blokovém diagramu jsou jednotlivé elementy systému znázorněny pomocí bloků a vazeb mezi bloky.

Blokový diagram se dále převede na soustavu obyčejných diferenciálních, případně diferenčních nelineárních rovnic a tyto rovnice jsou řešeny běžnými numerickými metodami. K dispozici se nabízí např. metoda Runge-Kutta, Eulerova metoda, Taylorova metoda a jiné.

Tato diplomová práce se zabývá modelováním a simulací regulačních obvodů. Pro experimentování je zvolena soustava, ke které je připojen regulátor a následně se simuluje spolupráce modelu soustavy se soustavou reálnou. Součástí simulace je ověření vlivu převodníků A/D a D/A mezi soustavou a modelem.

Pro řešení diferenciálních rovnic, popisujících model systému, je využívána Taylorova metoda. Výhodou této nové metody je její rychlost a poměrně snadná implementace.

Součástí této práce je implementace simulačního systému regulačních soustav, včetně grafického uživatelského rozhraní. Program byl implementován v C++ Builderu na platformě Win32.

2. Úvod do teorie systémů

Velmi důležitou částí teorie systémů je zkoumání reality. Při zkoumání reality se obvykle omezíme pouze na tu část, která je pro nás zajímavá a tuto část nazveme objektem. Vše ostatní nazveme okolím objektu. Na zvoleném objektu pozorujeme určité veličiny, jejichž výběr záleží na cíli pozorování. Výběrem veličin a sledováním pro nás podstatných vlastností objektu definujeme na daném objektu systém. Jelikož je možné na určitý objekt pohlížet z několika různých hledisek, lze na daném objektu definovat větší množství systémů. Systém je vlastně abstraktním modelem reálného objektu. Systém formulovaný jako matematický popis studovaných projevů objektu může v procesu poznání v mnoha směrech zastupovat původní objekt a sehrát tak obdobnou úlohu jako fyzikální modely v experimentech. Objekt musíme také specifikovat co do podrobnosti, s níž má být zkoumán. Zanedbávání detailů za jistou zvolenou mez je nezbytným kompromisem mezi přesností a složitostí definovaného systému.

3. Popis jevů v lineárních systémech

V lineárních systémech existují dvě metody jak přistupovat k popisu jevů a to metodou vnějšího popisu nebo vnitřního popisu.

Vnější popis systému je založen na vztahu výstupních a vstupních veličin. Vnitřní popis systému je založen na tom, že „vidíme dovnitř systému“ a máme možnost přesně zkoumat vliv vstupních veličin na stavové veličiny a současný vliv vstupních a stavových veličin na výstup.

3.1 Vnější popisy spojitých lineárních systémů

Vztah mezi vstupem a výstupem systému může být vyjádřen různými způsoby. Vstup budeme označovat jako *u(t)* a výstup jako *y(t)*.

Lineární stacionární spojitý systém se vstupem *u(t)* a výstupem *y(t)* je popsán diferenciální rovnicí typu:

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + ... + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = b_m u^{(m)}(t) + b_{m-1} u^{(m-1)}(t) + ... + b_1 u'(t) + b_0 u(t) \qquad \textbf{(3.1)}$$

kde , *a(i)* , $i = 0,1,2,......$, n a *b(j)* , $j = 0,1,2,......$, m jsou konstantní koeficienty.

Operátorový přenos systému je roven poměru Laplaceova obrazu výstupního signálu k Laplaceově obrazu vstupu, za předpokladu nulových počátečních podmínek. Přenos systému popsaného diferenciální rovnicí je:

$$F(p)=\frac{Y(p)}{U(p)}=\frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + ...+ b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + ...+ a_1 p + a_0} \qquad \textbf{(3.2)}$$

Z podmínky fyzikální realizovatelnosti plyne, že stupeň polynomu v čitateli musí být menší nebo roven stupni polynomu ve jmenovateli přenosu . Pro analýzu systémů je důležitý právě polynom ve jmenovateli přenosu, který lze též vyjádřit jako součin kořenových činitelů :

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + ...+ a_1 p + a_0 = a_n (p - p_1)(p - p_2)......(p - p_n) \qquad \textbf{(3.3)}$$

$p_1......p_n$ jsou póly přenosu systému.
Kořeny polynomu v čitateli:

$$B(p) = b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + ...+ b_1 p + b_0 = 0 \qquad \textbf{(3.4)}$$

označujeme jako nuly přenosu systému a lze psát :

$$b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + ...+ b_1 p + b_0 = b_m (p - n_1)(p - n_2)......(p - n_m) \qquad \textbf{(3.5)}$$

S využitím takto určených pólů a nul můžeme přenos vyjádřit v tomto tvaru:

$$F(p) = \frac{b_m (p - n_1)(p - n_2)......(p - n_m)}{a_n (p - p_1)(p - p_2)......(p - p_n)} \qquad \textbf{(3.6)}$$

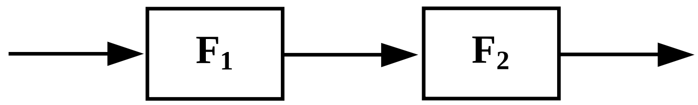
3.2 Vnitřní popisy spojitých lineárních systémů

Je to nejobecnější popis systému. Vychází z vnitřních dějů systému, a proto umožňuje odhalit některé vlastnosti systému, které nelze vyčíst z jeho vnějšího popisu.

V teorii řízení je vnitřní popis založen na blokové algebře. Každý systém je složen z vzájemně propojených podsystémů (bloků). Proto bývá důležité určit, jaké vlastnosti bude mít složitý systém, známe-li vlastnosti všech jeho podsystémů a způsob jejich vzájemného propojení.
Existují tři základní způsoby propojení dvou systémů: sériové, paralelní a zpětnovazební.

• Sériové spojení:

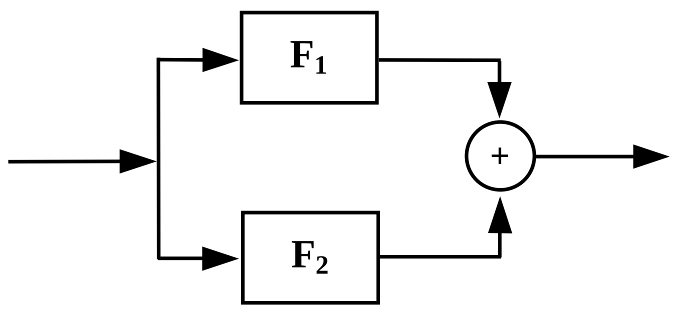
$$F(p) = F_1(p) \cdot F_2(p) \qquad \textbf{(3.7)}$$



Obrázek 3.1: Sériové spojení

• Paralelní spojení:

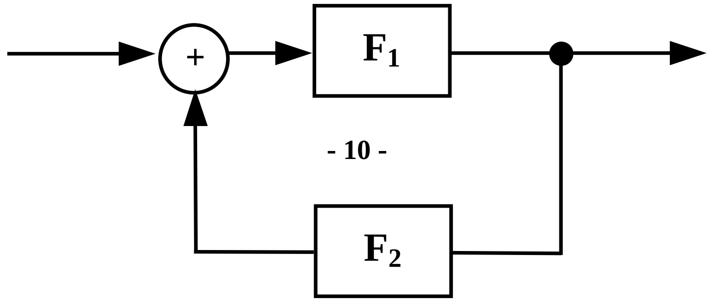
$$F(p) = F_1(p) + F_2(p) \qquad \textbf{(3.8)}$$



Obrázek 3.2: Paralelní spojení

• Zpětnovazební spojení:

$$F(p) = \frac{F_1(p)}{1 - F_1(p) \cdot F_2(p)} \qquad \textbf{(3.9)}$$

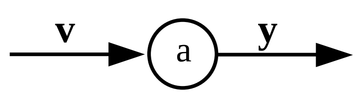


Obrázek 3.3: Zpětnovazební spojení

Nástrojem pro realizaci pravidel blokové algebry jsou grafy signálových toků. Základní operace lineárního systému jsou:

• Násobení signálu konstantou:

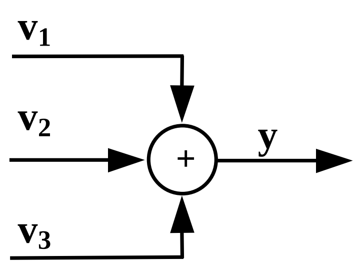
$$y = a \cdot v \qquad \textbf{(3.10)}$$



Obrázek 3.4: Násobení signálu konstantou

• Sčítání signálů (sumace):

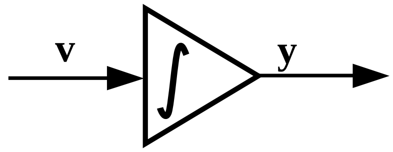
$$y = v_1 + v_2 + ... + v_k \qquad \textbf{(3.11)}$$



Obrázek 3.5: Sčítání signálu

• Integrace signálu: elementární blok integrátor

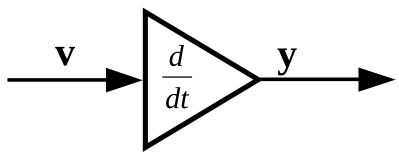
$$y = \int v \cdot dt \quad \textbf{(3.12)}$$



Obrázek 3.6: Integrace signálu

• Derivace signálu: elementární blok derivátor

$$y = \frac{dv}{dt} \quad \textbf{(3.13)}$$



Obrázek 3.7: Derivace signálu

Bloková algebra je základní metodou používanou v teorii řízení a regulaci.

4. Teorie řízení a regulace

V důsledku rozvoje průmyslové výroby dochází k zavádění speciálních zařízení, tzv. automatů, které nahrazují činnost člověka. Proces nahrazování lidské činnosti činností různých přístrojů a zařízení nazýváme automatizací. Teoretickým základem automatizace je teorie automatického řízení, která se zabývá popisem a rozborem vlastností řídících a regulačních obvodů a návrhy regulátorů pro dosažení zadaných požadavků.

4.1 Základní pojmy

Mechanizace je proces, jež zaváděním strojních mechanismů osvobozuje člověka od namáhavé, fyzicky náročné práce.

Automatizace je vývojové stádium rozvoje techniky, ve kterém automatizační zařízení vykonává nejen fyzickou, ale i řídící práci.

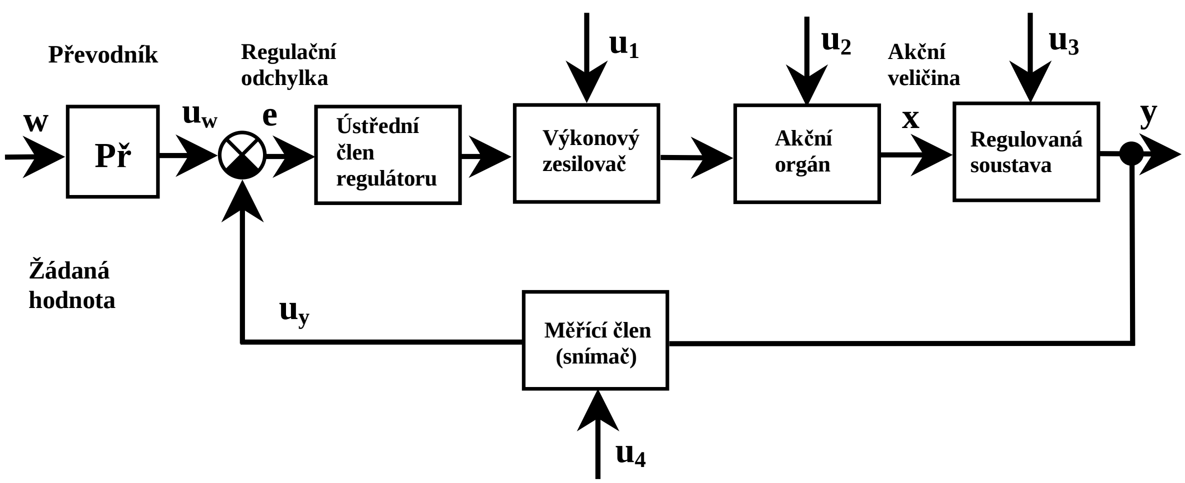
Řízení j každé cílevědomé působení na řízený objekt tak, aby bylo dosaženo určitého předepsaného cíle. Podle toho, jak je řízení prováděno, rozlišujeme řízení ruční a automatické.

Ovládání nebo též řízení bez zpětné vazby je takové řízení, které probíhá na základě zadaných pravidel (algoritmů) bez zpětné kontroly výsledků řídících zásahů měřením.

Regulace nebo též řízení se zpětnou vazbou probíhá tak, že velikost zvolené veličiny je měřena, porovnávána s žádanou hodnotou a řízení probíhá v závislosti na vypočtené odchylce. Toto řízení je daleko dokonalejší než v předchozím případě tudíž jsou dosahované výsledky mnohem kvalitnější.

4.2 Struktura regulačních obvodů

Teorie automatického řízení se zabývá analýzou a syntézou regulačních obvodů se zpětnou vazbou. Jsou to takové systémy, ve kterých je velikost regulované veličiny měřena a porovnávána s žádanou hodnotou. Vznikne tak obvod, který je blokově znázorněn pod tímto textem. Jsou v něm vyznačeny některé základní veličiny všech regulačních obvodů.



Obrázek 4.1: Regulační obvod se zpětnou vazbou

• Regulovaná veličina (y):

je výstupem regulované soustavy. Udržování velikosti této veličiny na požadované hodnotě je právě úkolem regulačního obvodu.

• Akční veličina (x):

je vstupem regulované soustavy. Je realizovaná akčním orgánem, který je napájen výkonovým zesilovačem. Ústřední člen regulátoru určuje algoritmus řízení, což znamená, že v něm probíhají požadované matematické operace.

• Řídící veličina (w):

též žádaná hodnota, je nositelem informace o tom, jaká hodnota regulované veličiny má být nastavena.

• Regulační odchylka (e):

je definována jako rozdíl žádané hodnoty a regulované veličiny e = w-y. Regulační odchylku zpracovává ústřední člen regulátoru, pro který je odchylka vstupem. Rozdíl w-y se realizuje v diferenčním členu. K tomu je ovšem třeba, aby obě veličiny měly stejný fyzikální rozměr. Proto je do obvodu zařazen převodník (Př), který převede řídící veličinu na stejný tvar jaký má výstup z měřícího členu.

• Poruchové veličiny (u1 , u2, u3, u4):

mohou obecně působit v kterémkoliv místě celého obvodu. Nejčastěji se však uplatňují vlivy poruch přímo v regulované soustavě.

<u>Zpětnovazební regulační obvod má tedy dva úkoly:</u>

- Zabezpečit, aby regulovaná veličina co nejlépe sledovala časový průběh řídící veličiny. Splnění tohoto požadavku charakterizují vlastnosti obvodu z hlediska řízení.
- Kompenzovat působení poruchových signálů tak, aby se jejich vliv projevil na regulované soustavě co nejméně.

Oba tyto požadavky lze shrnout do jednoho s použitím pojmu regulační odchylka.

Úlohou regulátoru v uzavřeném regulačním obvodě je řídit soustavu tak, aby regulační odchylka byla co nejmenší (v ideálním případě nulová). Naší snahou je splnění této podmínky nejen v ustáleném stavu, ale i v průběhu přechodného děje.
Podle časového průběhu řídící veličiny rozpoznáváme několik druhů regulace:

<u>Regulace na konstantní hodnotu:</u>

jedná se o v praxi nejčastější případ, kdy je žádaná hodnota konstantní. U těchto systému je proto důležitá zvláště funkce kompenzace poruch.

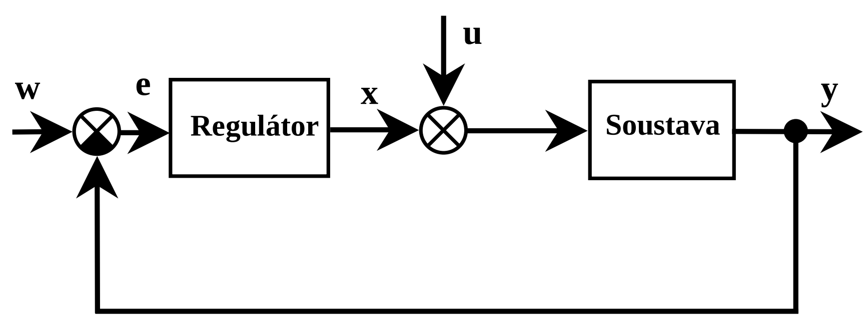
Programová regulace:

je charakteristická tím, že řídící veličina se mění podle předem daného známého průběhu (programu). V průběhu řídící veličiny mohou být jak konstantní úseky, tak úseky lineárně nebo kvadraticky proměnné s časem, případně skokové změny. V takovém případě jsou požadavky, kladené na regulační obvod z hlediska řídící veličiny, daleko přísnější.

Vlečná regulace:

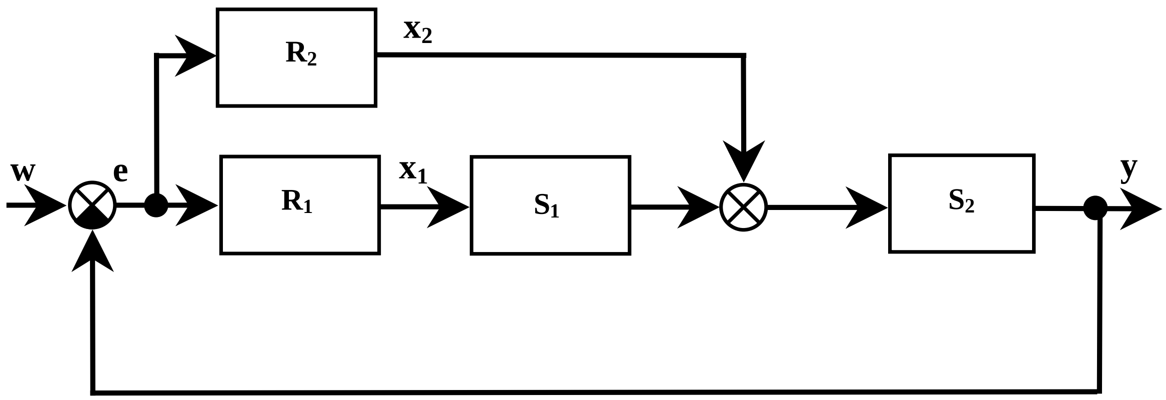
U tohoto typu regulace je řídící veličina proměnná a její průběh předem neznáme. Speciálním případem vlečné regulace je regulace poměrová, kdy regulovaná veličina má být stále v určitém poměru k další zvolené nezávislé proměnné.

Nejjednodušší schéma obvodu zpětnovazební regulace:



Obrázek 4.2: Regulační obvod se zpětnou vazbou

Příklad rozvětveného obvodu, který je charakterizovány větším počtem zpětných i dopředných vazeb.
Regulovaná soustava je složená ze dvou částí S_1 a S_2 ,má dvě akční veličiny x_1 a x_2 ,řízení provádějí dva regulátory R_1 a R_2 ,které zpracovávají stejnou regulační odchylku *e*.



Obrázek 4.3: Rozvětvený regulační obvod s pomocnou akční veličinou

4.3 Regulátory

Regulátor je zařízení, které pomocí akční veličiny působí na soustavu tak, aby odchylka regulované veličiny od žádané hodnoty byla co nejmenší. Všechny členy zpětnovazebního regulačního obvodu, s výjimkou regulované soustavy, zahrnujeme pod pojem regulátor. Jeho úlohou je měřit velikost regulované veličiny, porovnat ji s velikostí žádané hodnoty, tuto regulační odchylku vhodně zesílit a případně upravit a po výkonovém zesílení pomocí akčního členu působit na soustavu. Pokud neuvažujeme poruchové signály , má regulátor dva vstupy y(t) a w(t) a jeden výstup x(t).

Blok, označený názvem ústřední člen regulátoru, určuje, jakými časovými, frekvenčními či logickými úpravami je regulační odchylka e(t) zpracována, než se změní ve výstupní signál regulátoru, tj. akční veličinu. Tento člen má z hlediska regulace mimořádný význam, neboť určuje řídící algoritmus, který je spolu s vlastnostmi regulované soustavy určující pro výslednou kvalitu regulace. Podle druhu energie, která napájí samotný regulátor, dělíme regulátory na:

4.3.1 Přímočinné regulátory:

Nemají vlastní zdroj energie a ke své činnosti využívají pouze energii odebíranou z regulované soustavy. Do této skupiny patří velká většina jednoduchých průmyslových regulátorů. Tyto regulátory jsou většinou nelineární, akční veličina může nabývat pouze omezený počet hodnot (často pouze dvě: zapnuto – vypnuto). Jsou to známé reléové regulátory používané např. v chladničkách, žehličkách apod.

4.3.2 Regulátory s pomocným zdrojem energie:

Zde jde o složitější zařízení, jehož jádrem je vždy zesilovač. Dosahovaná kvalita regulace je podstatně vyšší, úměrně nákladům a složitosti. Statické vlastnosti těchto regulátorů považujeme v určitém pracovním rozsahu za lineární.

4.4 Základní typy regulátorů:

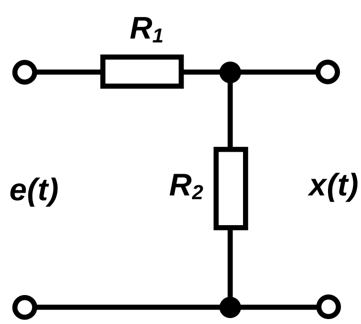
4.4.1 Proporcionální P-regulátor

Je to prostý zesilovač. Je tak nazýván, protože akční odchylka je v tomto případě proporcionálně úměrná regulační odchylce.

P-regulátor : $$x(t) = r_0 \cdot e(t) \qquad \textbf{(4.1)}$$

přenos je: $$F_R(p) = \frac{X(p)}{E(p)} = r_0 \qquad \textbf{(4.2)}$$

Příklad pasivního P-regulátoru je v obrázku 4.4:



Obrázek 4.4: Pasivní P-regulátor

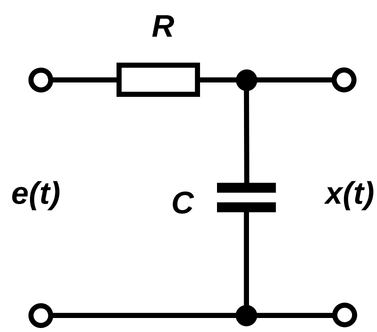
4.4.2 Integrační regulátor (I-regulátor)

Častým požadavkem na regulaci je, aby regulovaná veličina přesně souhlasila s řídící veličinou, tzn. aby regulační odchylka byla v ustáleném stavu nulová. Přitom akční veličina nulová není, neboť je-li v obvodu statická soustava, musí nenulové regulované veličině odpovídat též nenulová akční veličina. Regulátor je pak článek, který i při nulovém vstupním signálu (odchylce) má nenulový výstup.

I-regulátor: $$x(t) = r_i \cdot \int_0^t e(t)dt + x(0) \qquad \textbf{(4.3)}$$

přenos je: $$F_R(p) = \frac{X(p)}{E(p)} = \frac{r_i}{p} = \frac{1}{T_i p} \qquad \textbf{(4.4)}$$

Příklad pasivního I-regulátoru je na obrázku 4.5.



Obrázek 4.5: Pasivní I-regulátor

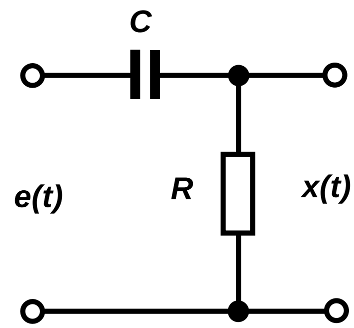
4.4.3 Derivační regulátor (D-regulátor)

Jeho výstupní signál je derivací vstupního signálu, neboli změna akční veličiny je úměrná rychlosti změny odchylky. Pro konstantní odchylku je nulová a regulátor se tedy chová jako rozpojený spínač. Proto jej nelze zařazovat do přímé větve regulačního obvodu samostatně. Může být pouze součástí regulátorů PD a PID. Samostatně jej lze použít do tzv. malé zpětnovazební smyčky, sloužící ke stabilizaci regulačního obvodu.

D-regulátor: $$x(t) = T_d' \cdot e(t) \qquad \textbf{(4.5)}$$

přenos je: $$F_R(p) = \frac{X(p)}{E(p)} = T_d\, p \qquad \textbf{(4.6)}$$

Příklad pasivního D-regulátoru je na obrázku 4.6.



Obrázek 4.6: Pasivní D-regulátor

4.5 Složené typy regulátorů:

Existují tři základní typy sdružených regulátorů:

4.5.1 PD regulátor: proporcionálně derivační regulátor

$$x(t) = r_0 \cdot e(t) = r_d \frac{d \cdot e(t)}{d(t)} \tag{4.7}$$

přenos je:

$$F_R(p) = \frac{X(p)}{E(p)} = r_0 + r_d = K_R(T_D p + 1) \tag{4.8}$$

platí:

$$K_R = r_0 \quad , \quad T_D = \frac{r_d}{r_0}$$

4.5.2 PI regulátor: proporcionálně integrační regulátor

$$x(t) = r_0 \cdot e(t) + r_i \cdot \int_0^t e(t)dt + x(0) \tag{4.9}$$

přenos je:

$$F_R(p)=\frac{X(p)}{E(p)}=r_0+\frac{r_i}{p}=K_R\frac{(T_R p+1)}{p}=\frac{T_R p+1}{T_i p} \qquad \textbf{(4.10)}$$

platí:

$$K_R=r_i=\frac{1}{T_i}\ ,\ T_R=\frac{r_0}{r_i}\ ,\ r_0=\frac{T_R}{T_i}$$

4.5.3 PID regulátor: proporcionálně derivačně integrační regulátor

$$x(t)=r_0\cdot e(t)+r_d\frac{d\cdot e(t)}{dt}+r_i\cdot\int_0^t e(t)dt+x(0) \qquad \textbf{(4.11)}$$

přenos je:

$$F_R(p)=\frac{X(p)}{E(p)}=r_0+\frac{r_i}{p}+r_d p=K_R\left(1+D\cdot p+\frac{1}{I\cdot p}\right)=k_r\left(i+T_d p+\frac{1}{T_i p}\right)=\frac{(T_1 p+1)(T_2 p+1)}{T_c p} \qquad \textbf{(4.12)}$$

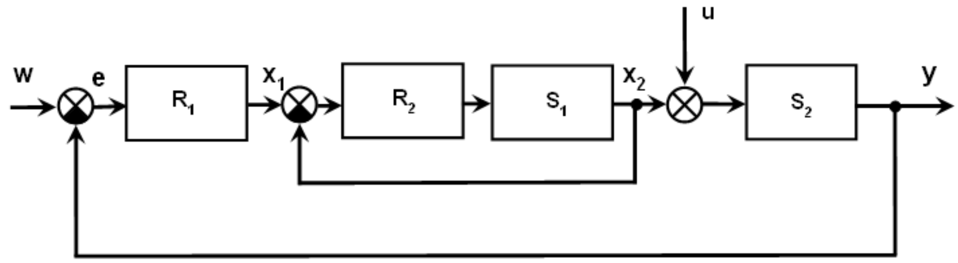
platí:

$$r_i=\frac{K_R}{I}=\frac{k_r\cdot i}{T_i}\ ,\ r_d=K_R D=\frac{T_1T_2}{T_c}=k_r T_d\ ,\ r_0=K_R=\frac{T_1+T_2}{T_c}=k_i\cdot i$$

4.6 Rozvětvené regulační obvody

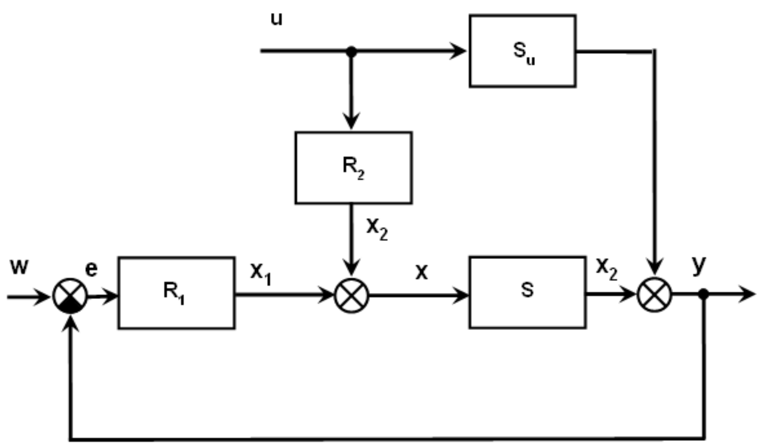
rozeznáváme tyto typy rozvětvených regulačních obvodů:

- Obvody s pomocnou regulovanou veličinou - obr 4.7
- Obvody s měřením poruchy - obr 4.8
- Obvody s modelem regulované soustavy - obr 4.9



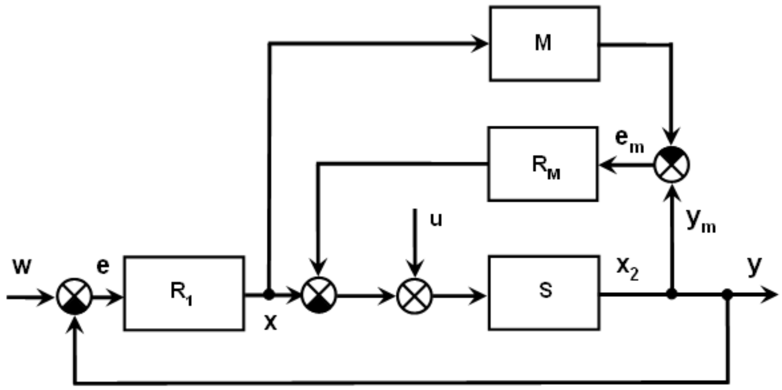
Obrázek 4.7 – Obvod s pomocnou regulovanou veličinou

V regulované soustavě z obrázku 4.7 tvořené sériovým spojením bloků S_1 a S_2 je měřena veličina x_2, která je regulátorem R_2 řízena podle žádané hodnoty x_1 jako hlavní regulátor pracuje blok R_1



Obrázek 4.8 – Obvod s měřením poruchy

V regulačním obvodu z obrázku 4.8 porucha $u(t)$ prochází článkem s přenosem $S_u(p)$ a přičítá se k výstupu regulované soustavy. Současně tuto poruchu měříme a přes regulátor R_2 přičítáme k akční veličině $x_1(t)$. Přenos řízení zůstává touto přídavnou vazbou nezměněn. Přenos poruchy je možno regulátorem $R_2(p)$ výrazně měnit. Teoreticky lze dosáhnout úplné kompenzace poruchového signálu.



Obrázek 4.9 – Obvod s modelem regulované soustavy

Systémy s modelem regulované soustavy se používají hlavně v adaptivních obvodech, mohou však zlepšit i kvalitu regulace v jednoduchém regulačním obvodu. Blokové schéma takového systému je na obrázku 4.9 Akční veličina *x(p)* působí jak na regulovanou soustavu *S(p)* tak na model *M(p)*.Rozdíl výstupů $y(t) - y_m(t)$ tvoří pomocnou odchylku e_m, kterou zpracovává regulátor $R_m(p)$.

Tato práce se orientuje na obvody s modelem regulované soustavy.

5. Matematický úvod do problematiky

Pro analýzu dějů v regulovaných systémech se používají různé metody. Tato práce se zabývá popisem regulovaných systémů pomocí diferenciálních rovnic a proto je stručně naznačena problematika diferenciálních rovnic.

5.1 Metody pro výpočet diferenciálních rovnic

Diferenciální rovnicí rozumíme každou rovnici, v níž se neznámá funkce vyskytuje v derivaci. Jeli neznámá funkce funkcí jedné proměnné, jde o obyčejnou diferenciální rovnici. Jinak hovoříme o parciální diferenciální rovnici. Řád nejvyšší derivace pak udává řád této diferenciální rovnice. Řešení obsahující konstanty se nazývá obecné řešení. Graf řešení diferenciální rovnice se nazývá integrální křivka. Obyčejnou diferenciální rovnicí prvního řádu nazýváme rovnici ve tvaru:

$$F(x, y, y') = 0 \tag{5.1}$$

Explicitním vyjádření:

$$y' = f(x, y), \quad f : \Omega \to \Re^2, \quad \Omega \in \Re^2 \tag{5.2}$$

Diferenciální rovnice :

$$y' = f(x, y) \tag{5.3}$$

má pro každý bod jediné řešení procházející bodem, pokud jsou splněny následující podmínky:
1) funkce je spojitá na Ω 2) funkce je ohraničená na Ω 3) funkce splňuje Lipschitzovu podmínku na Ω.

5.1.1 Analytické řešení

Řešením je funkce času. Konkrétní hodnotu v určitém čase získáme dosazením tohoto času do výsledné funkce. Lze určit hodnotu v libovolném bodě, v němž je funkce definována. Analytické metody jsou obvykle složité a časově náročné, ale velmi přesné. Teorie obyčejných diferenciálních rovnic tedy vybírá určité modely jistých skupin diferenciálních rovnic, pro které je nalezeno obecné schéma řešení.

5.1.2 Numerické řešení

Řešením je posloupnost hodnot v určitých předem zvolených časových bodech. Hodnoty funkce mezi zvolenými body lze určit buď interpolací z okolních vypočtených bodů nebo opětovnou aplikací metody s menším rozestupem (krokem) časových bodů. Numerické metody jsou obvykle jednodušší a rychlejší než analytické. Při špatné volbě kroku však může dojít k velké chybě výpočtu.

5.1.2.1 Jednokrokové metody

Pro výpočet hodnoty stačí znát pouze hodnotu . Toto je výhodné v případech, kdy potřebujeme často měnit integrační krok.

<u>Taylorova metoda</u>

Základem pro tyto metody je Taylorova řada:

$$p(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots\ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \tag{5.4}$$

Při využívání se předpokládá, že pro výpočet řešení se bere v úvahu větší počet členů rozvoje, řádově alespoň desítky členů. Tato metoda umožňuje výpočet mnohem přesnější hodnoty řešení (bráno vzhledem k délce integračního kroku *h*), než běžně používané metody (Eulerova či některá varianta metody Runge-Kutta).

<u>Princip metody</u>

Taylorova řada je definována jako nekonečná mocninná řada

$$p(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+......+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \qquad \textbf{(5.5)}$$

Pokud položíme počáteční podmínku $z = 0$ a položíme $h = x_1 - z_1$, pak rovnice přejde do tvaru:

$$f(x)=f(0)+h\cdot f'(0)+\frac{h^2}{2!}f''(0)+\frac{h^3}{3!}f'''(0)+\ldots \qquad \textbf{(5.6)}$$

Nyní položme $z_2 = x_1$ za předpokladu $h = x_2 - z_2 = x_1 - z_1$.

$$f(x_2)=f(x_1)+h\cdot f'(x_1)+\frac{h^2}{2!}f''(x_1)+\frac{h^3}{3!}f'''(x_1)+\ldots \qquad \textbf{(5.7)}$$

Hodnoty funkce $f(x)$ v bodech x_1, x_2 lze vypočíst postupně za využití Taylorovy řady. Výsledek jednoho kroku je nutný pro výpočet dalších dílčích výsledků. Parametr *h* je integrační krok. Integrační krok nemusí být konstantní. Pro jednotlivé kroky výpočtu se může měnit. Na velikosti integračního kroku je závislá rychlost výpočtu a také jeho přesnost. Čím je integrační krok větší, tím se také zvyšuje rychlost výpočtu. Naopak může klesat přesnost výpočtu. Před začátkem výpočtu musíme určit, s jakou přesností výsledek požadujeme. Při výpočtu pak sčítáme dílčí výsledky a pokud je rozdíl dvou po sobě jdoucích výsledků menší než požadovaná přesnost, výpočet ukončíme.

K dílčím výpočtům potřebujeme znát vyšší derivace funkce. Výpočet vyšších derivací je časově náročný a prakticky zbytečný. Vyšší derivace lze totiž odvodit z předchozích výpočtů. Toto ukážeme na následující soustavě diferenciálních rovnic.

$$y' = A\cdot y + B\cdot z \qquad z' = C\cdot y + D\cdot z \qquad \textbf{(5.8)}$$

Počáteční podmínky $y(0) = y_0$, $z(0) = z_0$, Řešení klasickým způsobem:

$$y_1 = y_0 + h \cdot y'(0) + \frac{h^2}{2!} \cdot y''(0) + \frac{h^3}{3!} \cdot y'''(0) + \ldots \quad \textbf{(5.9)}$$

$$z_1 = z_0 + h \cdot z'(0) + \frac{h^2}{2!} \cdot z''(0) + \frac{h^3}{3!} \cdot z'''(0) + \ldots \quad \textbf{(5.10)}$$

Výhody a nevýhody použití Taylorovy řady

Nespornou výhodou této metody je její rychlost a s tím spojená výpočetní nenáročnost. Velkou výhodou je také možnost paralelního zpracování dílčích výpočtů, které se uplatňuje při výpočtech soustav diferenciálních rovnic. Pokud ovšem zvolíme špatnou velikost integračního kroku, může se metoda stát nestabilní. Je to způsobeno tím, že při chybném určení jednoho kroku se tato chyba přenáší i do dalších výpočtů a celková chyba tím může narůstat.

Eulerova metoda

Tato metoda je nejjednodušší: pro určení následující hodnoty y_{n+1} bereme v úvahu pouze první dva členy Taylorovy řady, tedy:

$$y_{n+1} = y_n + hy'_n \quad \textbf{(5.11)}$$

Geometrická interpretace této metody není obtížná, protože $h_i = x_{i+1} - x_i$, je vztah (4.5) rovnicí přímky se směrnicí $f(x_i, y_i)$ jdoucí bodem (x_i, y_i), tj. na intervalu $\langle x_i, x_{i+1} \rangle$ se vždy pohybujeme po tečně k přesnému řešení úlohy $y' = f(x, y),\ y(x_i) = y_i$ v bodě (x_i, y_i).

Při zkracování kroku lze zpřesňovat řešení, ovšem od jisté hranice začne převládat vliv zaokrouhlovací chyby a celková chyba výpočtu při dalším zmenšování kroku poroste.

Metoda Runge-Kutta

Další jednokrokové metody, které používají pouze první derivace řešení y - výpočet $f(t, y)$ však provádějí i mezi jednotlivými uzly (t_i, y_i) - jsou zastoupeny metodami typu Runge-Kutta. Základem těchto metod je vyjádření rozdílů mezi hodnotami řešení y v bodech t_{n+1} a t_n ve tvaru:

$$y_{n+1} - y_n = \sum_{i=1}^{p} w_i K_i \tag{5.12}$$

kde w_i jsou konstanty a

$$K_i = hf\left(t_n + a_i h,\ y_n + \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} k_j\right),\ i = 1 \ldots\ldots p \tag{5.13}$$

kde $t_{n+1} - t_n$ a a_i, b_{ij} jsou konstanty, přičemž $a_i = 0$

Metoda se nazývá p-hodnotová (používá p hodnot funkce $f(t, y)$). Konstanty w_i, a_i, b_i jsou vypočteny tak, aby získaná řešení souhlasila s Taylorovou řadou v bodě (t_n, y_n) až do *p-té* mocniny kroku *h* včetně. Metodu pak nazýváme metodou Runge-Kutta řádu *P*. Je celá řada modifikací těchto metod, liší se především v koeficientech, v principu jsou ovšem stejné.

6. Závěr

V tomto semestrálním projektu byly popsány základní principy řízení a regulace dynamických systémů a základy jejich modelování. V rámci problematiky byly rovněž nastíněny základní matematické metody výpočtu, včetně metody Taylorovy řady, která bude základním prostředkem ke zpracování zbytku diplomové práce (pomocí systému TKSL).
Jako základní nástroj k řešení modelů dynamických systémů nám slouží diferenciální rovnice; jejich popisem se tato publikace přímo nezabývá, nicméně bude jich využíváno ve značné míře. Následující práce se bude ubírat směrem modelování konkrétních obvodů a jejich teoretickému i praktickému řízení. K dosažení těchto cílů je popsaný výklad nezbytným základem.

7. Literatura

[1] Blaha, P., Vavřín, P.: Řízení a regulace 1, skripta, VUT Brno, 1990
[2] Murina, M.: Teorie obvodů, skripta, VUTIUM Brno, 2000.
[3] Vavřín, P.: Teorie automatického řízení 1, skripta, VUT Brno, 1981
[4] Vavřín, P.: Teorie řízení 1 – 1. část, skripta, VUT Brno, 1980
[5] Vavřín, P.: Teorie řízení 1 – 2. část, skripta, VUT Brno, 1980
[6] Spíral, L.,Ovsjannikov, V.: Optimalizace průmyslových regulačních obvodů, SNTL, Praha, 1982
[7] Kotek, Štecha: Teorie automatického řízení spojitých lineárních systémů, Skriptum ČVUT, Praha, 1977