VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA INFORMAČNÍCH TECHNOLOGIÍ
ÚSTAV INTELIGENTNÍCH SYSTÉMŮ

FACULTY OF INFORMATION TECHNOLOGY
DEPARTMENT OF INTELLIGENT SYSTEMS

URČITÉ INTEGRÁLY V MAPLE, MATLAB A TKSL

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE
BACHELOR´S THESIS

AUTOR PRÁCE Jaroslav Barták
AUTHOR

BRNO 2008

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA INFORMAČNÍCH TECHNOLOGIÍ
ÚSTAV INTELIGENTNÍCH SYSTÉMŮ

FACULTY OF INFORMATION TECHNOLOGY
DEPARTMENT OF INTELLIGENT SYSTEMS

URČITÉ INTEGRÁLY V MAPLE, MATLAB A TKSL
DEFINITE INTEGRALS IN MAPLE, MATLAB AND TKSL

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE
BACHELOR´S THESIS

AUTOR PRÁCE
AUTHOR
Jaroslav Barták

VEDOUCÍ PRÁCE
SUPERVISOR
Doc.Ing.Jiří Kunovský, CSc.

BRNO 2008

Zadání

Určité integrály v Maple, Matlab a TKSL

Definite Integrals in Maple, Matlab and TKSL

Vedoucí:

Kunovský Jiří, doc. Ing., CSc., UITS FIT VUT

Přihlášen:

Barták Jaroslav

Zadání:

1. Prostudujte klasické výpočty určitých integrálů a seznamte se s metodou výpočtu určitých integrálů převodem na tvořící diferenciální rovnice.
2. Vytvořte programy a sbírku příkladů pro výpočet určitých integrálů v Maple, Matlab a TKSL.
3. Zhodnoťe náročnost a přesnost výpočtu a proveďte vzájemná srovnání.

Část požadovaná pro obhajobu SP:

Bod 1

Kategorie:

Modelování a simulace

Literatura:

- Podle pokynů vedoucího
- projekt má těsnou návaznost na výuku předmětů ITO, IPR a VNV

Licenční smlouva

Licenční smlouva je uložena v archivu Fakulty informačních technologii Vysokého učení technického v Brně.

Abstrakt

V této práci pojednávám o výpočtu různých typů určitých integrálů v programech Maple, Matlab a TKSL. Dále zde provádím srovnání výše uvedených programů na výpočet určitých integrálů. Toto srovnání provádím hlavně z hlediska použitelnosti výsledků výpočtu určitých integrálů v těchto programech. Dále v této práci přikládám příklady zdrojových souborů pro možnosti ověření si výsledků a jejich rozdílné interpretace programy. Díky těmto souborů je možné si všechny výpočty zopakovat a porovnat složitost zápisu určitých integrálů v těchto programech. Nakonec je uvedeno srovnání uvedených programů vzhledem k přívětivosti k uživateli.

Klíčová slova

Určitý integrál, Maple, Matlab, TKSL, Výpočet určitého integrálu, numerický výpočet určitého integrálu.

Abstract

This thesis discourses different types of definite integrals calculations, applying Maple, Matlab and TKSL software. Additionally, the thesis compares above software in terms of usability of calculated results of each program. For verification of calculations and comparison of different interpretations, there are examples of source code attached. By virtue of this files it is possible to revise the calculations of definite integrals and compare complexity of its record. Finally, the paper also compares above programs considering their user-friendliness.

Keywords

Definite integral,Maple,Matlab,TKSL, Calculation of definite integral, definite integral, numerice calculation fo definite integral.

Citace

Barták Jaroslav: Určité integrály v Maple,Matlab a TKSL. Brno, 2008, bakalářská práce, FIT VUT v Brně.

Určité integrály v Maple, Matlab a TKSL

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně pod vedením Doc.Ing.Jiřího Kunovského, CSc.
Uvedl jsem všechny literární prameny a publikace, ze kterých jsem čerpal.

……………………
Jaroslav Barták
1.května 2008, Brno

Poděkování

Zde bych velice rád poděkoval Doc. Ing. Jiřímu Kunovskému,CSc. , který mi poskytl odbornou pomoc a rady, které napomohly ke tvorbě této práce.

Obsah

1 Úvod

Tato práce se zabývá určitými integrály a jejich výpočtem s využitím výpočetní techniky. Dále se zabývá tvarem zápisu do jednotlivých programů, upravením integrálů do tvaru, ve kterém se mohou zapsat do těchto programů. Dále se zabývá přesností a použitelností vypočítaných výsledků z jednotlivých programů.

Ve druhé kapitole se práce zabývá rozebráním teorie integrálů a určitých integrálů a jsou zde přidány příklady jednotlivých typů integrálů a nakonec je zde jeden jednoduchý příklad výpočtu určitého integrálu.

Ve třetí kapitole se tato práce zabývá matematickými programy, ve kterých se počítají určité integrály. Dále je zde vždy vyřešen jednoduchý příklad pro zjištění, jak se v tom daném programu pracuje.

Ve čtvrté kapitole se řeší porovnání všech programů na jednom testovacím příkladu a porovnání jejich výsledku a zhodnocení vhodnosti těchto programů pro výpočty určitých integrálů.

V páté kapitole je malý průvodce po programu TKSL. Je zde několik užitečných klávesových zkratek pro práci v programu TKSL.

2 Teorie integrálů

2.1 Obecný tvar integrálu

Nejdříve bych chtěl uvést základní tvar integrálu. Základní tvar integrálu vypadá následovně:

$$\int \mathrm{f}(x)dx,$$

kde f(x) je funkce která se má integrovat a dx označuje podle které proměnné se bude funkce integrovat, protože můžeme mít funkce, které mají více proměnných proto je tam tato „značka“ důležitá.

Pro ilustraci toho jak vypadá integrál v praxi a kdy s ním počítáme, mám zde jeden jednoduchý příklad:

$$\int \sin(x)dx,$$

toto je velice jednoduchý příklad integrálu. Tento integrál má výsledek: –cos (x) + c, kde c znamená konstantu, která zde může vzniknout. Je to následek derivace. Protože, když derivujeme tak konstanta, která je ve funkci, zanikne, takže při integrování musíme s touto případnou konstantou počítat i když na výpočet vliv nemá tak tato konstanta může být v podstatě libovolná.

2.2 Obecný tvar určitého integrálu

Obecný tvar určitého integrálu se v podstatě nemění od normálního integrálu jediná odlišnost je taková, že ve tvaru určitého integrálu jsou meze vymezující rozsah tohoto určitého integrálu.

Takto by mohl vypadat určitý integrál:

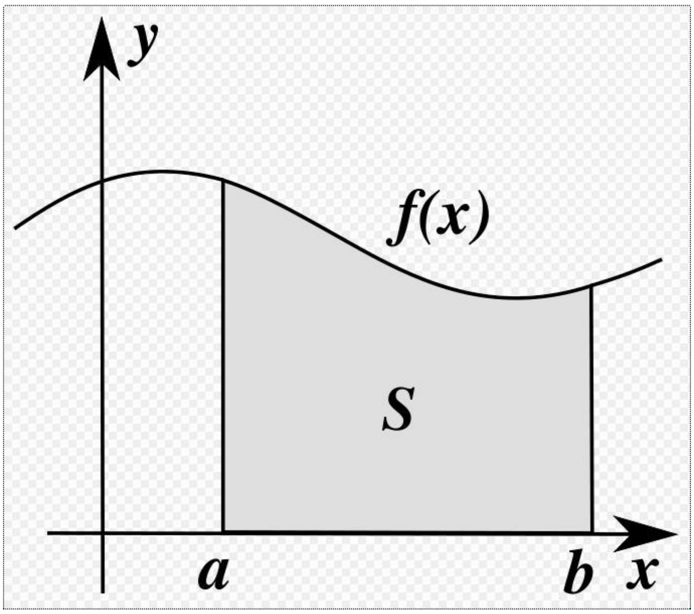
$$\int_{a}^{b} f(x)dx$$

V tomto integrálu je, jak jsem psal již výše jediný rozdíl v tom, že jsou udávány meze, ve kterých se integrál počítá. V tomto případě jsou tyto meze označeny písmeny a a b, kde a je spodní mez určitého integrálu a b je horní mez určitého integrálu.

Pro ilustraci zde uvedu i praktický příklad určitého integrálu. Použiji již výše uvedený integrál:

$$\int_{0}^{2\pi} \sin(x)dx$$

Jak jsem již napsal výše, 0 a 2π jsou meze integrálu. Obecně určitý integrál slouží k výpočtu plochy pod funkcí, kterou máme integrovat. Výsledné číslo může nabývat i záporných hodnot. Tato situace nastane, když se integrovaná křivka vyskytuje pod osou x.



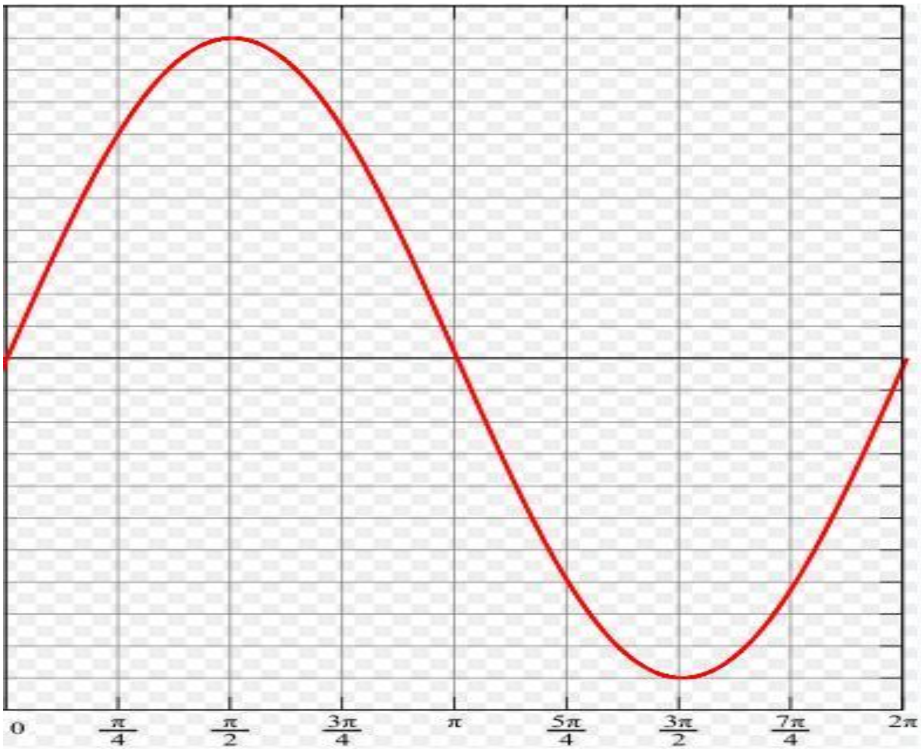
Obr.1 Určitý integrál

To znamená, že když integrujeme funkci sin (x) vypočítáme následujícím postupem tyto hodnoty:

$$\int_{0}^{2\pi} \sin(x)\,dx = [-\cos(x)]_0^{2\pi} = [-\cos(2\pi) - (-\cos(0))]$$

$$= [-1 - (-1)] = 0$$

Když se nad tímto výsledkem zamyslíme, tak i logicky se dá odvodit, že funkce sinus má v intervalu od 0 do 2π stejnou část svého průběhu nad osou tak i pod osou x.



Obr.2 Sinus

Takto se dá postupovat při řešení jednoduchých integrací. Pro integraci existuje řada pravidel.

2.3 Základní pravidla pro integrování

$$\int 0 \,\mathrm{d}x = c$$

$$\int a \,\mathrm{d}x = ax + c$$

$$\int x^n \,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c \text{ pro } x > 0, n \in \mathbb{R} \text{ a } n \neq -1$$

Pro přirozená *n* platí uvedený vztah pro všechna *x*.

$$\int \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x = \ln|x| + c \text{ pro } x \neq 0$$

$$\int \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + c$$

$$\int a^x \,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{ln(a)} + c \text{ pro } a > 0, a \neq 1$$

$$\int \sin x \,\mathrm{d}x = -\cos x + c$$

$$\int \cos x \,\mathrm{d}x = \sin x + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} \,\mathrm{d}x = -\mathrm{cotg}\, x + c \text{ pro } x \neq n\pi$$

kde *n* je celé číslo

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} \,\mathrm{d}x = \mathrm{tg}\, x + c \text{ pro } x \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}$$

kde *n* je celé číslo.

3 Programy pro výpočet určitých integrálů

Pro výpočet určitých integrálů můžeme použít analytickou metodu, to znamená, že jí budeme počítat ručně (ovšem tato metoda je vhodná pouze pro jednoduché určité integrály, které jsme schopni integrovat). Pro složitější určité integrály je vhodnější využít nějaký vhodný výpočetní prostředek. V této kapitole bych se chtěl zaměřit na práci s těmito matematickými programy: Maple, Matlab a TKSL, které v nějakém směru vypočítají hodnotu určitých integrálů nebo nějakou jejich modifikaci tak, aby tyto výsledky byly v praxi použitelné. Dále provedu srovnání těchto výsledku s výsledky ze všech těchto programů.

3.1 Program Maple

Program Maple je především určen pro matematické operace. Maple není specializovaný program jen pro výpočet integrálů a diferenciálních rovnic v programu Maple se dále nechají počítat kupříkladu matice, práce s maticemi, dále se zda nechají vykreslovat v podstatě všechny funkce poměrně jednoduchým způsobem. Dalo by se říci, že Maple dokáže vypočítat v podstatě veškeré běžné jak už jednoduché tak i ty obtížnější matematické výpočty. Tento program má přímo funkce pro výpočet určitých integrálů v sobě zabudované.

Já jsem pracoval ve verzi 11, která je k uživateli, který chce pracovat s určitými integrály poměrně přívětivá. Všechno potřebné pro výpočet určitých integrálů se zde nechá poměrně rychle a intuitivně nalézt. Samozřejmě je zde i spousta běžně používaných symbolů.

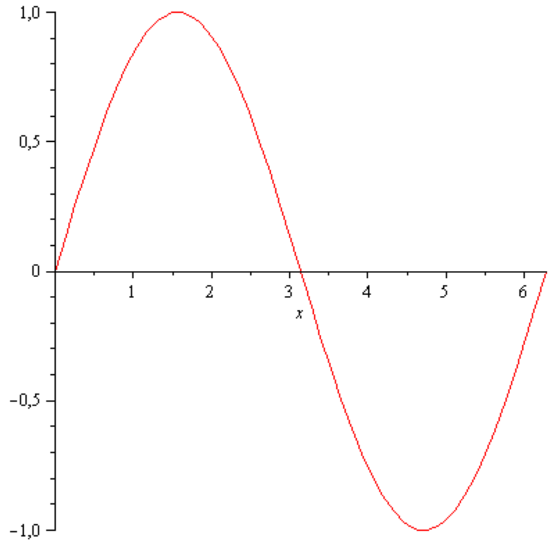
Práce s programem Maple je velice jednoduchá, vše je zde poměrně dobře roztříděné a nechá se zde velice rychle nalézt vše potřebné pro výpočet.

3.2 Řešení určitých integrálů v Maple

Pro zadávání určitých integrálů jsou v Maple přímo přednastavené vzory jednotlivých integrálů takže v podstatě stačí jen jednoduše doplnit předpřipravený vzor a máme zadán integrál v programu Maple.

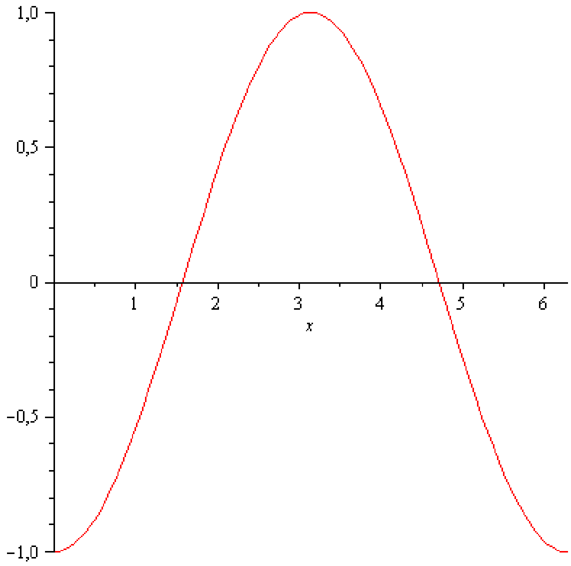
Pro vykreslení funkce je v Maple příkaz plot za který se píší argumenty v tomto tvaru plot(f,x=i). Kde f je vykreslovaná funkce, x je řídící proměnná a v i jsou udány meze ve kterých se má funkce vykreslovat.

Pro začátek jsem zvolil velice jednoduchou funkci sin(x) které jsem nastavil meze od 0 do 2*π tzn. bude zde vidět celá jedna perioda funkce sinus. Takto jsem nejprve vykreslil jednoduchou funkci sinus:



Obr.3 Funkce sin(x) od 0 do 2π

Po té co jsem vytvořil funkci sinus jsem se zaměřil na samotný výpočet určitých integrálů. Jako první příklad jsem opět použil funkci sin(x), kterou jsem v Maple nejprve integroval a potom jsem jí opět nechal vykreslit:



Obr.4 Integrovaná funkce sin(x)

Potom jsem se provedl ruční integrovaní funkce sin(x). Podle tabulky pravidel, (kterou jsem uvedl o několik stránek dříve), nám vychází, že integrovaná funkce sin(x) = -cos(x). To znamená, že opravdu program Maple provedl správný výpočet a přesně ukázal, jak bude funkce vypadat potom, co jí budeme integrovat.

Po této zkoušce programu Maple jsem zkusil integrovat o něco složitější integrály například:

$$\int_0^{10} \frac{1}{(x+1)^2+5} \sin x \cos x \, dx$$

Ovšem zde se mi zobrazil poměrně překvapivý výsledek:

$$\int_0^{10} \frac{1}{(x+1)^2+5} \sin x \cos x \, dx =$$

$$\begin{aligned}
&-\tfrac{1}{10}\,\mathrm{I}\sqrt{5}\,\mathrm{Si}(2+2\,\mathrm{I}\sqrt{5})\cos(2)\cosh(\sqrt{5})^2 - \tfrac{1}{20}\,\mathrm{I}\sqrt{5}\,\mathrm{Ci}(2+2\,\mathrm{I}\sqrt{5})\sin(2) - \tfrac{1}{10}\sqrt{5}\,\mathrm{Si}(2 \\
&\quad - 2\,\mathrm{I}\sqrt{5})\sin(2)\sinh(\sqrt{5})\cosh(\sqrt{5}) - \tfrac{1}{20}\,\mathrm{I}\sqrt{5}\,\mathrm{Ci}(22-2\,\mathrm{I}\sqrt{5})\sin(2) - \tfrac{1}{10}\,\mathrm{I}\sqrt{5}\,\mathrm{Si}(-22 \\
&\quad - 2\,\mathrm{I}\sqrt{5})\cos(2)\cosh(\sqrt{5})^2 - \tfrac{1}{10}\sqrt{5}\,\mathrm{Ci}(2-2\,\mathrm{I}\sqrt{5})\cos(2)\sinh(\sqrt{5})\cosh(\sqrt{5}) - \tfrac{1}{10}\,\mathrm{I}\sqrt{5}\,\mathrm{Ci}(2 \\
&\quad - 2\,\mathrm{I}\sqrt{5})\sin(2)\cosh(\sqrt{5})^2 + \tfrac{1}{10}\,\mathrm{I}\sqrt{5}\,\mathrm{Si}(2-2\,\mathrm{I}\sqrt{5})\cos(2)\cosh(\sqrt{5})^2 - \tfrac{1}{10}\sqrt{5}\,\mathrm{Si}(2 \\
&\quad + 2\,\mathrm{I}\sqrt{5})\sin(2)\sinh(\sqrt{5})\cosh(\sqrt{5}) - \tfrac{1}{20}\,\mathrm{I}\sqrt{5}\,\mathrm{Si}(2-2\,\mathrm{I}\sqrt{5})\cos(2) + \tfrac{1}{20}\,\mathrm{I}\sqrt{5}\,\mathrm{Si}(-22 \\
&\quad - 2\,\mathrm{I}\sqrt{5})\cos(2) - \tfrac{1}{10}\sqrt{5}\,\mathrm{Ci}(2+2\,\mathrm{I}\sqrt{5})\cos(2)\sinh(\sqrt{5})\cosh(\sqrt{5}) + \tfrac{1}{10}\,\mathrm{I}\sqrt{5}\,\mathrm{Ci}(2 \\
&\quad + 2\,\mathrm{I}\sqrt{5})\sin(2)\cosh(\sqrt{5})^2 + \tfrac{1}{10}\,\mathrm{I}\sqrt{5}\,\mathrm{Si}(-22+2\,\mathrm{I}\sqrt{5})\cos(2)\cosh(\sqrt{5})^2 - \tfrac{1}{10}\sqrt{5}\,\mathrm{Si}(-22 \\
&\quad + 2\,\mathrm{I}\sqrt{5})\sin(2)\sinh(\sqrt{5})\cosh(\sqrt{5}) + \tfrac{1}{20}\,\mathrm{I}\sqrt{5}\,\mathrm{Ci}(2-2\,\mathrm{I}\sqrt{5})\sin(2) + \tfrac{1}{20}\,\mathrm{I}\sqrt{5}\,\mathrm{Ci}(22 \\
&\quad + 2\,\mathrm{I}\sqrt{5})\sin(2) + \tfrac{1}{10}\sqrt{5}\,\mathrm{Ci}(22-2\,\mathrm{I}\sqrt{5})\cos(2)\sinh(\sqrt{5})\cosh(\sqrt{5}) + \tfrac{1}{10}\,\mathrm{I}\sqrt{5}\,\mathrm{Ci}(22 \\
&\quad - 2\,\mathrm{I}\sqrt{5})\sin(2)\cosh(\sqrt{5})^2 + \tfrac{1}{20}\,\mathrm{I}\sqrt{5}\,\mathrm{Si}(2+2\,\mathrm{I}\sqrt{5})\cos(2) - \tfrac{1}{10}\sqrt{5}\,\mathrm{Si}(-22 \\
&\quad - 2\,\mathrm{I}\sqrt{5})\sin(2)\sinh(\sqrt{5})\cosh(\sqrt{5}) - \tfrac{1}{20}\,\mathrm{I}\sqrt{5}\,\mathrm{Si}(-22+2\,\mathrm{I}\sqrt{5})\cos(2) - \tfrac{1}{10}\,\mathrm{I}\sqrt{5}\,\mathrm{Ci}(22 \\
&\quad + 2\,\mathrm{I}\sqrt{5})\sin(2)\cosh(\sqrt{5})^2 + \tfrac{1}{10}\sqrt{5}\,\mathrm{Ci}(22+2\,\mathrm{I}\sqrt{5})\cos(2)\sinh(\sqrt{5})\cosh(\sqrt{5})
\end{aligned}$$

Obr.5 Výsledek z Maple

Bohužel tento výsledek se mi nepodařilo ručně ověřit. Ovšem dá se předpokládat, že je to naprosto přesný výpočet tohoto určitého integrálu, který bude ovšem v praxi jen velice těžko použitelný. Je pravdou, že u některých dalších testovaných integrálů nebylo výsledkem prosté číslo, ale tvar, ze kterého bychom mohli teprve přesné číslo vypočítat, což je poměrně nevýhoda programu Maple.

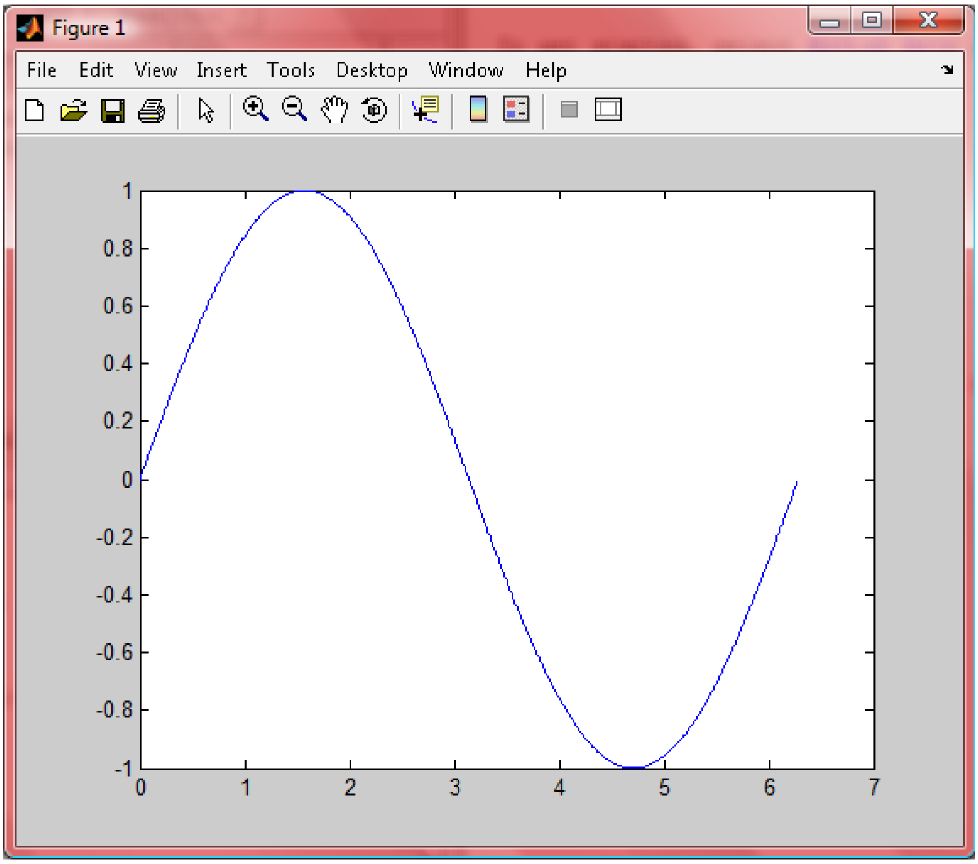
3.3 Program Matlab

Program Matlab je primárně určený pro matematické a fyzikální výpočty. Požadované příkazy se zapisují sekvenčně do zdrojového souboru jako volání do funkcí integrovaných v Matlabu. Pro výpočet určitých integrálů je zde funkce int(f,i), kde f je integrovaná funkce a i je interval ve kterém se tento integrál bude počítat (horní a dolní mez).

Aby funkce mohla být integrována v programu Matlab musejí její proměnné být zadány, jako symbolické. Toho dosáhneme pomocí příkazu syms a za tento příkaz potom s mezerou zadáváme seznam proměnných, které mají být symbolické.

3.4 Řešení určitých integrálů v Matlabu

Stejně, jako v předchozím programu Maple, jsem i v Matlabu nejprve vyzkoušel velice jednoduchou funkci. Nejprve jsem opět použil funkci sin(x) a nejprve jsem si vykreslil její normální průběh, který v Matlabu vypadá takto:



Obr.6 Sinus v Matlabu

Tím, že musíme v Matlabu zadávat příkazy sekvenčně za sebou, orientace se tím v tomto programu stává poněkud obtížnější. Ovšem i zde se na to nechá poměrně velice rychle zvyknout a tím, že je program Matlab dost univerzální dají se v něm počítat i jiné úlohy. Ovšem při řešení určitých integrálů jsem dále postupoval tak, že jsem integroval jednoduchou funkci sin(x), kde jsme si už výše ověřili výsledek –cos(x).

Po nastudování syntaxe v Matlabu je možné zadat příkazy v tomto pořadí, abychom dostali požadovaný výsledek:

int(sin(t))

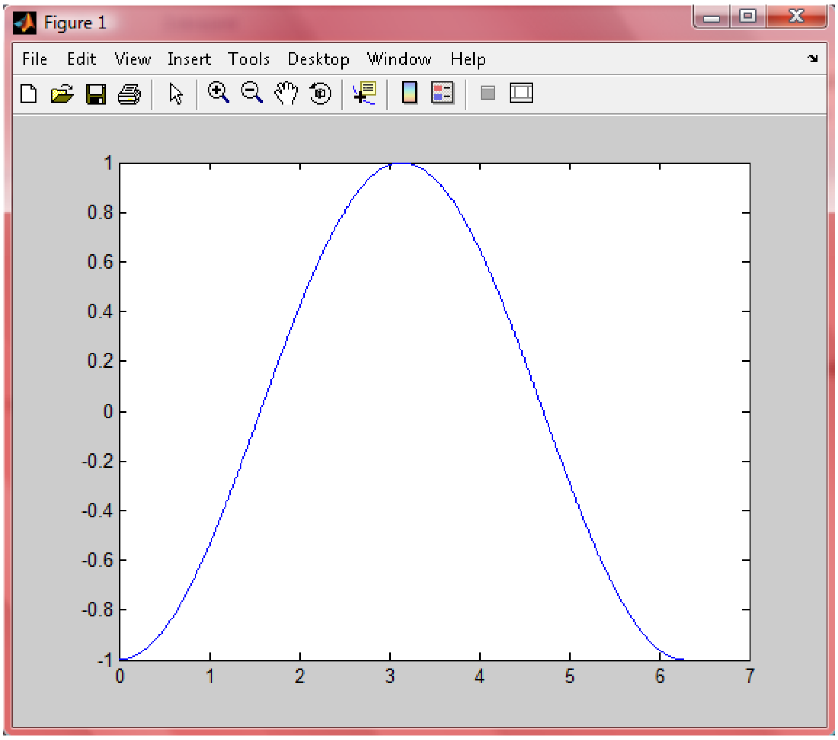
ans = -cos(t)

x = 0:.01:2*pi;

y=-cos(x);

plot(x,y)

Po této sekvenci příkazů dostaneme tento očekávaný výsledek, který si jednoduše ověříme výpočtem.



Obr.7 Integrovaná funkce sin(x) v Matlabu

Po tomto jednoduchém příkladu můžeme dále zkoušet testovat výpočetní možnosti programu Matlab. Dále jsem ještě vyzkoušel složitější typy určitých integrálů kupříkladu, jsem vyzkoušel určitý integrál, který se normálně počítá metodou per partes. Která již v ručním počítání není zrovna jednoduchá a je poměrně dost zdlouhavá.

Počítal jsem s tímto integrálem:

$$\int_{0}^{1} x^3 \sin x \, dx$$

Pro výpočet tohoto určitého integrálu jsem použil následující příkazy:
int((t^3)*sin(t)).

Tento příkaz provádí přímou integraci zadaného integrálu a výsledkem je vždy výraz který se vyskytuje za slovem ans.

ans =-t^3*cos(t)+3*t^2*sin(t)-6*sin(t)+6*t*cos(t)
Toto je výsledek po integrování je to obecný tvar po integraci.

int((t^3)*sin(t),0,2*pi)
Tento příkaz je velice podobný tomu na začátku tohoto výpočtu, ovšem jsou tam ještě dosazeny meze určitého integrálu.

ans =-8*pi^3+12*pi
Toto je konečný tvar po integraci. Jak je vidět je to poměrně přívětivý tvar ovšem stále to není zcela ideální.

3.5 Program TKSL

Program TKSL umožňuje řešení soustav diferenciálních rovnic na bázi numerické metody Taylorova rozvoje. Tato práci by se též měla zabývat výpočetními možnostmi programu TKSL v oblasti řešení určitých integrálů. Problém byl, zda-li se nechají převést určité integrály na požadovaný tvar diferenciálních rovnic.

3.5.1 Tvořící diferenciální rovnice

Nejprve vytvoříme několik určitých integrálů, které posléze budeme chtít převést na diferenciální rovnice. Pro příklad bych vybral několik jednodušších určitých integrálů a postupně postupoval ke složitějším případům určitých integrálů.

Příklady určitých integrálů pro program TKSL:

$$\int_{-2}^{1} (3t^2 + 2t - 9)dt$$

$$\int_{0}^{1} (\sin t^2 \cos(t))dt$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{(1-t^2)}} dt$$

$$\int_{0}^{10} \frac{1}{(t+1)^2+5} \sin(t)\cos(t) dt$$

$$\int_{0}^{1} (t+1)\ln(t) dt$$

$$\int_{0}^{1} (t^2+1)\sin(t) dt$$

$$\int_{0}^{1} t^3 \sin(t) dt$$

Výpočet integrálů vyžaduje vyčíslení určitého integrálu, abychom se vyhnuli složité integraci každého určitého integrálu, provedeme derivaci těchto integrálů. Pokud derivujeme celý integrál, přecházíme z integrálního tvaru do diferenciální rovnice.

$$\mathrm{I}' = 3t^2 + 2t - 9$$

$$\mathrm{I}' = \sin t^2 \cos(t)$$

$$\mathrm{I}' = \frac{1}{\sqrt{(1-t^2)}}$$

$$\mathrm{I}' = \frac{1}{(t+1)^2+5} \sin(t)\cos(t)$$

$$\mathrm{I}' = (t+1)\ln(t)$$

$$\mathrm{I}' = (t^2+1)\sin(t)$$

$$\mathrm{I}' = t^3 \sin(t)$$

Počáteční podmínky pro výpočet hodnot těchto rovnic jsou nulové.

Konkrétně například:

$$\mathrm{I} = \int_0^{10} \frac{1}{(t+1)^2+5} \sin(t)\cos(t) dt$$

se poměrně jednoduše zderivuje (provede se derivace pravé i levé strany) na:

$$\mathrm{I}' = \frac{1}{(t+1)^2+5} \sin(t)\cos(t)$$

To, že je počáteční podmínka nulová, znamená, že integrovaná funkce bude svůj počátek mít na y-ose nula a v tom to případě bude hodnota integrálu I(0)=0. Horní a dolní mez jsou v tomto případě nastaveny na 0 pro dolní mez a 10 pro horní mez.

3.5.2 Řešení integrálů v TKSL

Výpočet provedeme pro integrál:

$$\mathrm{I} = \int_0^{10} \frac{1}{(t+1)^2+5} \sin(t)\cos(t) dt$$

Je to tentýž integrál, jako v programu Maple, kdy Maple vypočítal velice nejasný a těžce kontrolovatelný výsledek. Na tomto určitém integrálu bych v další kapitole chtěl demonstrovat rozdíl výsledků, které nastaly mezi těmito programy. Pro doplnění ještě provedu srovnání s programem Matlab, abychom si mohli vytvořit ucelený obrázek o tom, jaké jsou rozdíly pro výpočet určitých integrálů v jednotlivých programech.

Program TKSL je napsaný v programovacím jazyce Pascal a ve velice podobné formátu jsou i psány vstupní soubory pro tento program. Do vstupního souboru musíme nejprve uvést proměnné, které budeme během výpočtu potřebovat a musíme je napsat v takové syntaxi, jakou nám nakazuje TKSL.

Pro představu zde napíši jeden příklad jak je možné tento soubor napsat:

Nejprve musíme provést definici konstant a proměnných, kde eps je největší povolená odchylka pro krok výpočtu numerické derivace. Pi zmanená hodnotu Ludolfova čísla v běžné praxi označujícího se π a konečně tmax je nastavení implicitní horní meze do které se bude integrál počítat, dolní mez je implicitně nastavená na nulu.

```
var I;
const eps=1e-20,
```

pi=3.1415926535897932385,tmax=1;

Samotný text programu zapisujeme mezi klíčová slova system a sysend, kde system označuje začátek hlavního těla programu a sysend ustavuje konec těla programu. Dále definujeme určitý integrál, který se má vypočítat.

system

I'= (1/((t+1)*(t+1)+5))*sin(t)*cos(t)) &0;

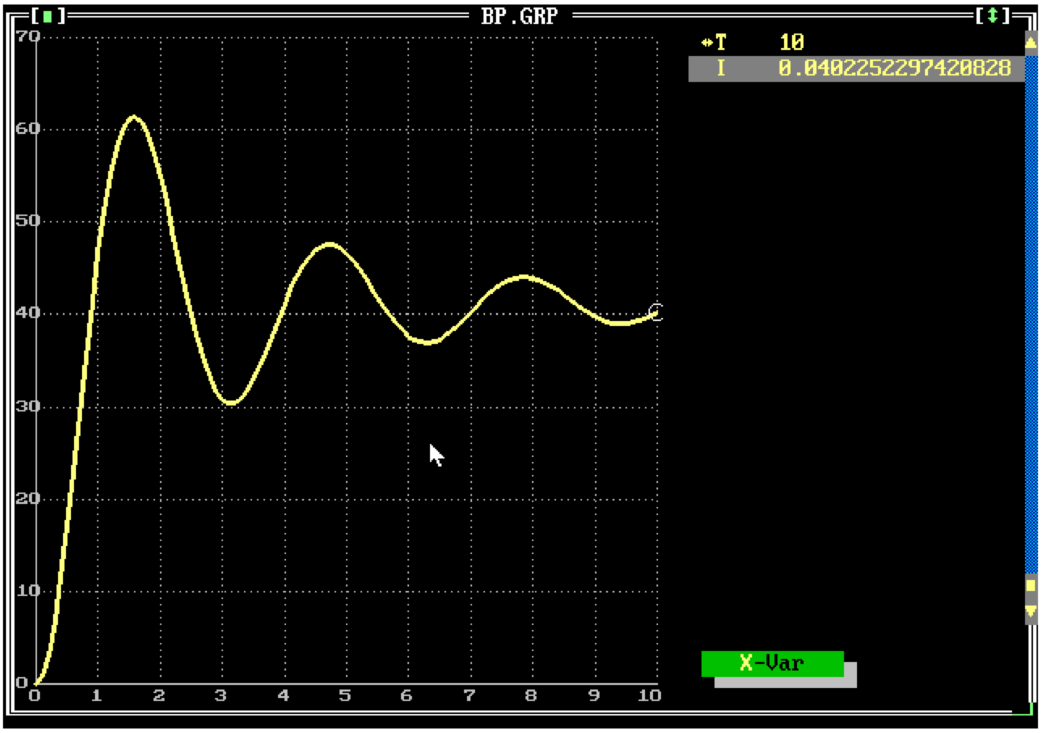
sysend.

Toto je v podstatě celý zápis, který stačí k tomu, abychom mohli vypočítat hodnotu určitého integrálu. Speciální znak & je tam pro určení počáteční podmínky, které je v našem případě nastavena na nulu.

3.5.3 Výsledky ze simulace v TKSL

Tento testovací příklad byl zvolen tak, aby mohl být dále porovnán s výsledky v ostatních matematicko-fyzikálních výpočetních programech, jako jsou v našem případě Matlab a Maple. Také byl tento příklad zvolen tak, aby byl dostatečně náročný a jeho výpočet zabral větší než nepatrný čas. Zvolil jsem ho tak, protože kdybychom si za příklad zvali jednoduchý určitý integrál tak by výpočet byl tak rychlý, že bychom jeho čas nemohli nějak kvalitně změřit a porovnat.

Zde ještě přidávám obrázek simulace výše uvedeného určitého integrálu:



Obr.8 Simulace v TKSL

4 Porovnání výsledků z programů Matlab, Maple a TKSL

V této kapitole této práce bych se chtěl zaměřit na srovnání výsledků v požadovaných programech. Dále bych chtěl zhodnotit jejich jak časovou náročnost při výpočtu určitých integrálů tak výstupní hodnoty, které dostaneme po vypočítání integrálů. A zhodnotit z pohledu uživatele jejich použitelnost a praktičnost pro další použití.

4.1 Testovací příklad

Jako testovací příklad jsem si vybral určitý integrál, který je poměrně složitý na „ruční“ vypočítání a také je dostatečně složitý i pro matematické programy.

Testovací určitý integrál:

$$\int_0^{10} \frac{1}{(x+1)^2+5} \sin(x) \cos(x) dx$$

Je to integrál s lomeným výrazem a goniometrickými funkcemi, to by mělo zaručit jeho dostatečnou náročnost pro výpočet v matematických programech.

4.2 Výsledky při počítání v programu Maple

Nejprve jsem tento integrál implementoval do programu Maple.

Zápis v tomto programu vypadal následovně:

$$\int \frac{1}{(x+1)^2+5} \cdot \sin(x) \cdot \cos(x) \, dx$$

Záměrně jsem nepoužil zápis určitého integrálu, protože by vypočítal výsledek, jako jsem již uvedl výše v kapitole 2.2 Řešení určitých integrálů v Maple.

Po této jemné úpravě mi Maple vypočítal o něco jednodušší, ale i tak je výsledek dosti nepřehledný a poměrně obtížný.

Výsledek po výpočtu integrálu:

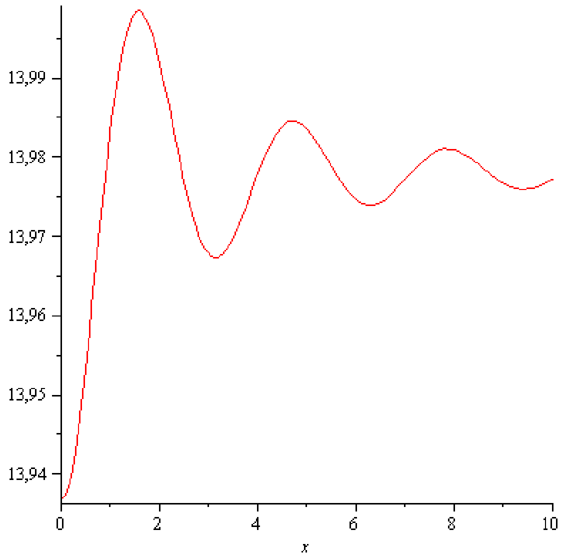
$$-\frac{1}{20} I \sqrt{5} \left(\mathrm{Si}\left(2x+2-2I\sqrt{5}\right) \cos\left(2-2I\sqrt{5}\right) - \mathrm{Ci}\left(2x+2-2I\sqrt{5}\right) \sin\left(2-2I\sqrt{5}\right)\right)$$
$$+\frac{1}{20} I \sqrt{5} \left(\mathrm{Si}\left(2x+2+2I\sqrt{5}\right) \cos\left(2+2I\sqrt{5}\right) - \mathrm{Ci}\left(2x+2+2I\sqrt{5}\right) \sin\left(2+2I\sqrt{5}\right)\right)$$

Obr.9 Výsledek integrálu v Maple

Poté jsem se snažil vykreslit průběh integrované funkce, k tomu jsem použil následující příkaz v Maplu:

$$plot\left(\int \frac{1}{(x+1)^2+5} \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)\, dx, x = 0\,..10\right)$$

Tímto zápisem jsem docílil toho, aby mi program Maple vykreslil průběh integrované funkce.



Obr.10 Testovací příklad v Maple

Ještě jsem v programu Maple změřil, jak dlouho bude trvat vykreslení grafu tohoto testovacího integrálu. Tento čas se pohyboval mezi hodnotami 1.4 až 1.5 sekundy

4.2.1 Zhodnocení programu Maple

V matematickém programu Maple se podle mého názoru pracuje velice pohodlně a je velmi komplexní v této rovině. Dokáže vypočítat velmi mnoho matematických operací.

Zápis určitých integrálů je zde velmi intuitivní a velice přehledný. To jsou bezesporu klady tohoto programu.

Ovšem jak je názorně vidět na testovacím příkladu výsledky, které nám Maple poskytuje, nejsou takové, jaké bychom mohli v praxi použít. Je sice žádoucí, aby výsledky byly co možná nejpřesnější ovšem ne na úkor jejich použitelnosti.

Moje hodnocení tohoto matematického programu je v podstatě kladné, pracuje se s ním dobře ovšem zobrazení výsledků není zcela ideální.

4.3 Výsledky při počítání v programu Matlab

Nejprve bylo třeba zapsat testovací určitý integrál do matematicko-fyzikálního programu Matlab.

Zápis testovacího integrálu v Matlabu vypadal takto:

int(1/((t+1)^2+5)*sin(t)*cos(t))

Kde int() je funkce pro integrování a to co je uvnitř závorek je integrál který se má vypočítat pomocí Matlabu.

Takto Matlab interpretoval výsledek integrace:

ans=-1/20*i*5^(1/2)*(sinint(2*t+2-2*i*5^(1/2))*cos(2-2*i*5^(1/2))-cosint(2*t+2-2*i*5^(1/2))*sin(2-2*i*5^(1/2)))+1/20*i*5^(1/2)*(sinint(2*t+2+2*i*5^(1/2))*cos(2+2*i*5^(1/2))-cosint(2*t+2+2*i*5^(1/2))*sin(2+2*i*5^(1/2)))

Poté jsem ještě samozřejmě vyzkoušel dosadit meze integrálu, ale podle očekávání z programu vyšel velice podobný výsledek, jaký nastav v případě Maple.

int(1/((t+1)^2+5)*sin(t)*cos(t) ,0,10)

Po tomto příkazu jsem dostal tento výsledek:

ans=-1/10*i*5^(1/2)*cosint(2-2*i*5^(1/2))*sin(2)*cosh(5^(1/2))^2-1/20*i*5^(1/2)*cosint(2+2*i*5^(1/2))*sin(2)-1/10*5^(1/2)*sinint(-22+2*i*5^(1/2))*sin(2)*sinh(5^(1/2))*cosh(5^(1/2))-1/20*i*5^(1/2)*sinint(2-2*i*5^(1/2))*cos(2)-1/10*i*5^(1/2)*sinint(-22-2*i*5^(1/2))*cos(2)*cosh(5^(1/2))^2+1/10*5^(1/2)*cosint(22-2*i*5^(1/2))*cos(2)*sinh(5^(1/2))*cosh(5^(1/2))+1/10*i*5^(1/2)*cosint(2+2*i*5^(1/2))*sin(2)*cosh (5^(1/2))^2+1/20*i*5^(1/2)*cosint(22+2*i*5^(1/2))*sin(2)-1/10*5^(1/2)*sinint(-22-2*i*5^(1/2))*sin(2)*sinh(5^(1/2))*cosh(5^(1/2))+1/20*i*5^(1/2)*cosint(2-2*i*5^(1/2))*sin(2)+1/20*i*5^(1/2)*sinint(-22-2*i*5^(1/2))*cos(2)+1/10*5^(1/2)*cosint(22+2*i*5^(1/2))*cos(2)*sinh(5^(1/2))*cosh(5^(1/2))+1/10 *i*5^(1/2)*sinint(2-2*i*5^(1/2))*cos(2)*cosh(5^(1/2))^2+1/10*i*5^(1/2)*cosint(22-2*i*5^(1/2))*sin(2)*cosh(5^(1/2))^2-1/10*5^(1/2)*sinint(2-2*i*5^(1/2))*sin(2)*sinh(5^(1/2))*cosh(5^(1/2))+1/10*i*5^(1/2)*sinint(-22+2*i*5^(1/2))*cos(2)*cosh(5^(1/2))^2+1/20*i*5^(1/2)*sinint(2+2*i*5^(1/2))*cos(2)-1/10*5^(1/2)*cosint(2-2*i*5^(1/2))*cos(2)*sinh(5^(1/2))*cosh(5^(1/2))-1/10*i*5^(1/2)*sinint(2+2*i*5^(1/2))*cos(2)*cosh(5^(1/2))^2-1/10*i*5^(1/2)*cosint(22+2*i*5^(1/2))*sin(2)*cosh(5^(1/2))^2-1/10*5^(1/2)*sinint(2+2*i*5^(1/2))*sin(2)*sinh(5^(1/2))*cosh(5^(1/2))-1/20*i*5^(1/2)*sinint(-22+2*i*5^(1/2))*cos(2)-1/20*i*5^(1/2)*cosint(22-2*i*5^(1/2))*sin(2)-1/10*5^(1/2)*cosint(2+2*i*5^(1/2))*cos(2)*sinh(5^(1/2))*cosh(5^(1/2))

Doba tohoto výpočtu byla většinou něco mezi těmito hodnotami: 0.8-1.2 sekundy

Po tomto výsledku se dá tato funkce vykreslit jen s velkými obtížemi a při úpravě a přizpůsobení funkcí.

Po vyzkoušení jednoduššího integrálu:

$$\int_{0}^{2\pi} x^3 \sin(x) dx$$

Se mi podařilo dobrat se k určitému výsledku, kterým byl tento výsledek:

ans = -8*pi^3+12*pi

Tento tvar ovšem taky není v praxi příliš dobře použitelný a je třeba jej ještě upravit, abychom dosáhli požadovaného výsledku.

4.3.1 Zhodnocení programu Matlab

Po tomto pokusu vytvořit alespoň nějaký výsledek v Matlabu jsem usoudil to, že se program Matlab příliš nehodí na výpočet určitých integrálů a není tudíž pro tuto funkci příliš vhodný. Po dalších pokusech se mi podařilo vykreslit a vypočítat jen jednoduché integrály jakou jsou integrály sin(x) a podobné jednoduché příklady. Toto se ještě povedlo provést velice zdlouhavým způsobem, kdy jsem nejprve musel integrovat funkci a posléze jí nechat vykreslit a až poté kdy jsem věděl jak má výsledek vypadat, tak se mi povedlo dobrat určitým výsledkům.

Co se týče uživatelského rozhraní programu Matlab je podstatně chudší než prostředí Maple ovšem Matlab má i své výhody mezi které patří vytvářený funkcí a jiné výpočty.

Takže hodnocení Matlabu z ohledem na to jak počítá určité integrály, což je předmětem této práce není tento program příliš vhodný. Jednoduché integrály se tu nechají řešit ovšem složitější úlohy jsou v podstatě odsouzeny k neúspěchu.

4.4 Výsledky při počítání v simulačním programu TKSL

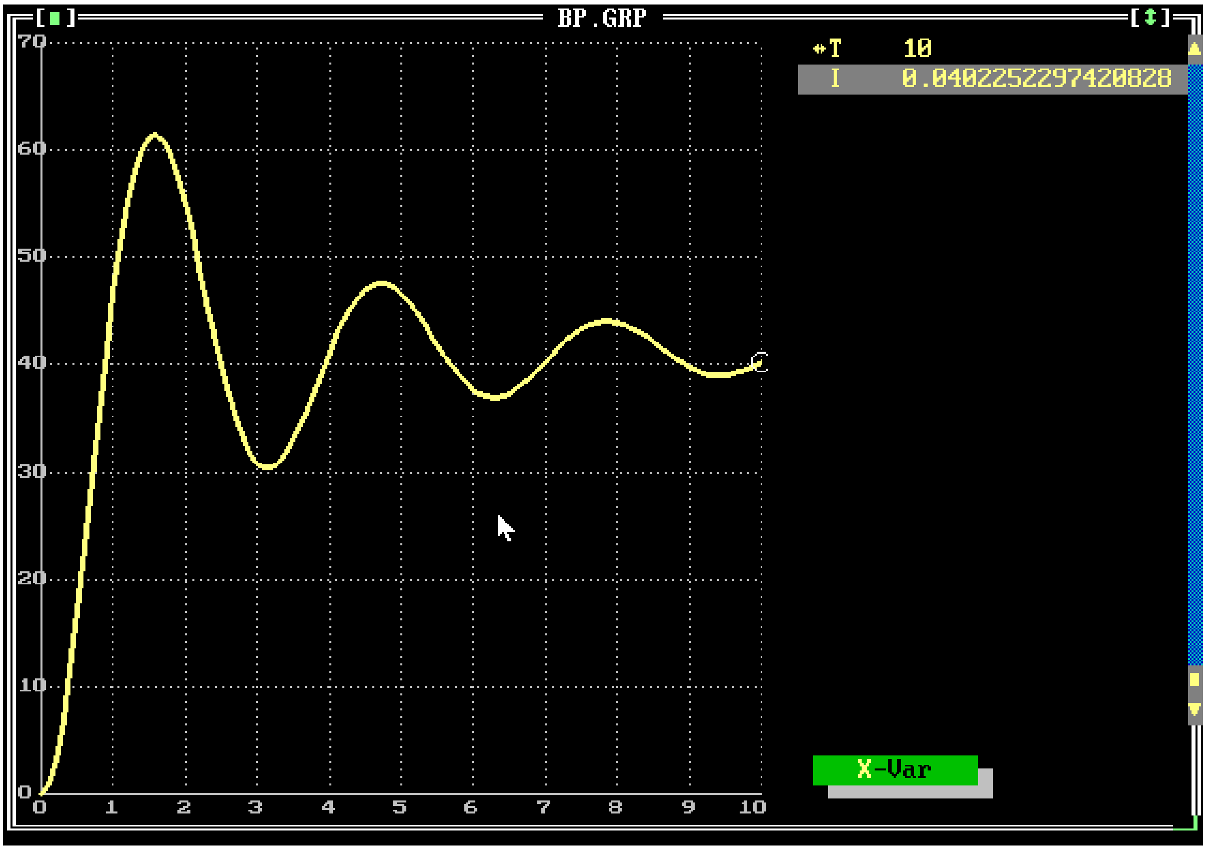
Simulační program TKSL je velice specializovaný program pro výpočet diferenciálních rovnic. Proto při práci s tímto programem bylo třeba veškeré určité integrály převést na diferenciální rovnice a až potom s nimi počítat.

Po použití testovacího příkladu, který jsme do TKSL museli zapsat v následujícím formátu, aby byl správně zpracován:

```
I'= 1/((t+1)*(t+1)+5)*sin(t)*cos(t) &0;
```

Po kompilaci tohoto příkladu musíme nastavit horní a dolní mez určitého integrálu a dále nastavujeme, jak velký krok se bude používat. Nastavení kroku výpočtu slouží ke zlepšení přesnosti výpočtu. Po tomto nastavení konečně můžeme pustit simulaci a vykreslení grafu.

Po vykreslení grafu dostaneme tento obrázek:



Obr.11 Testovací příklad v TKSL

Z tohoto grafu je vidět, že výsledek je stejný jako výsledek z programu Maple, ovšem TKSL má tu výhodu, že dokáže vypočítat výsledek velice přesně a udá ho ve formátu, který je velice přívětivý a dále snadno použitelný. Při simulaci tohoto testovacího příkladu jsme dostali výsledek 0.0402252297420828. Z tohoto výsledku můžeme určit, že TKSL počítá s přesností na 16 desetinných míst. Což je velmi dobrá přesnost a naprosto postačuje pro další zpracování obdržených výsledků.

4.4.1 Zhodnocení simulačního programu TKSL

Po práci s TKSL jsem usoudil, že tento program se nejlépe hodí pro podobné výpočty, jakými se tato práce zabývá. Tento program řeší jak už problémy Maple s velice nejasnými výsledky tak i problémy Matlabu kde se složitější integrály dají počítat velice špatně a někdy dokonce nevedou k úspěchu.

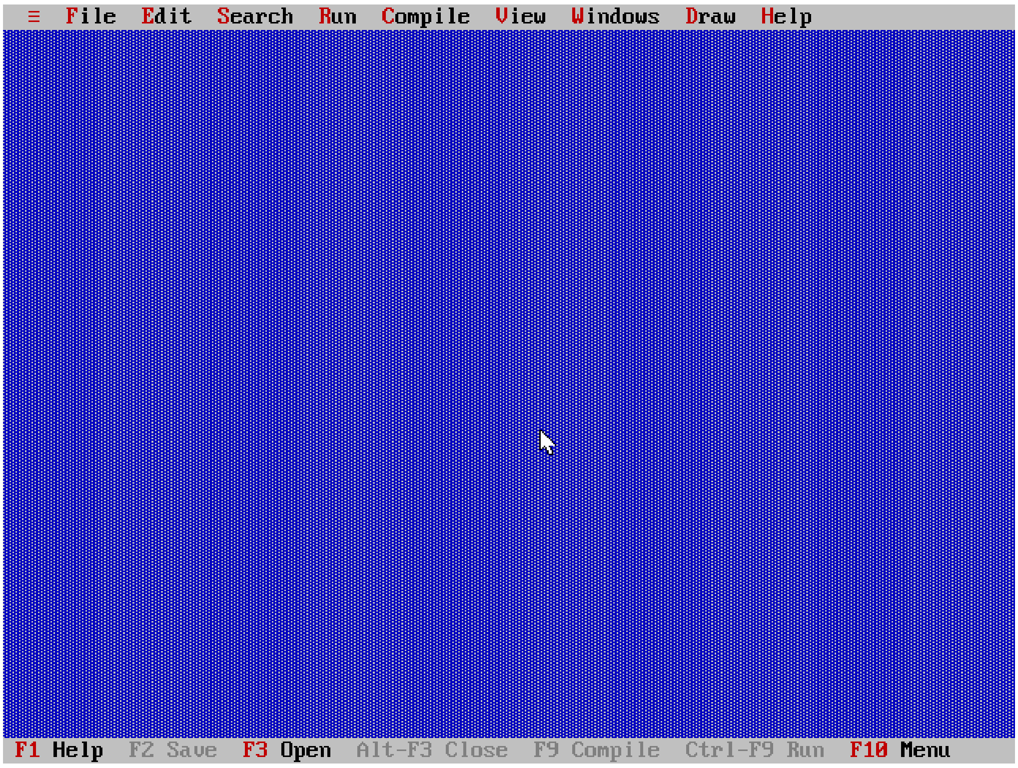
Poté co se v tomto programu nastuduje práce s ním a jeho syntaxe. A dokážeme integrály převést do tvaru diferenciálních rovnic, což není velký problém. Když nepožadujeme grafické provedení integrálů, což pro samotný výsledek žádný efekt nemá, je tento program ideálním nástrojem pro výpočet integrálů ať už jednoduchých tak i poměrně obtížnějších.

Dále tento program dokáže velice rychle a kvalitně počítat koeficienty Fourierovy transformace.

5 Uživatelské rozhraní TKSL

V této kapitole bych se chtěl zaměřit na TKSL a uvést zde několik věcí které usnadní práci v TKSL a rychlejší orientaci v tomto programu.

Takto vypadá prostředí TKSL:



Obr.12 Uživatelské rozhraní TKSL

Zde se zaměříme na základní operace, které nám budou postačovat pro simulaci výpočtu určitých integrálů.

V prvé řadě se zaměříme na nabídku FILE. V této nabídce jsou operace se souborem například otevření souboru(OPEN), vytvoření nového souboru(NEW),a uložení souborů(SAVE).Tyto operace nám budou stačit pro práci se vstupními soubory.

Další důležitá nabídka je nabídka COMPILE, kde je podstatná položka: Compile (F9). Compile slouží pro přeložení zdrojového souboru.

Nabídka Run a položka Run(Ctrl+F9)slouží pro spuštění samotné simulace. Dále jsou v této nabídce důležité položky Variables(Alt+F4) a Constants (Ctrl+F4). V položce Variables můžeme nastavit, jaké proměnné se budou zobrazovat v okně simulace. V položce Constants nastavujeme interval, ve kterém proběhne simulace. Dále se v této nabídce nastavuje největší odchylka a krok simulace. A poslední důležitá věc kterou bych chtěl uvést je, že složené závorky slouží jako komentáře, které se při kompilaci vypouští a nekompilují se.

Toto jsou ve stručnosti položky, které jsou potřebné pro základní práci s programem TKSL. A postačují pro základní práci s tímto programem.

6 Závěr

Díky této práci jsem se blíže seznámil s výpočty určitých integrálů a matematickými programy, které umožňují výpočet určitých integrálů. Tato práce mi umožnila hlouběji prostudovat matematické výpočetní programy a získat v nich alespoň minimální schopnost pracovat. U každého z programů jsem se pokusil zhodnotit jeho vhodnost pro tyto výpočty a také jak se v jednotlivých programech pracuje.

Pro příklady určitých integrálů jsem použil zahraniční literaturu, která mi nabídla mnoho příkladu určitých integrálů. Některé z nich jsem použil v této práci.

Nakonec jsem ještě provedl porovnání programů přímo na testovacím příkladu, který měl ukázat, jak který program se hodí pro výpočet určitých integrálů. Nejvíce jsem se však zaměřil na program TKSL, který je přímo na takovéto výpočty navrhnut.

Co se týče rozšíření tak přínosem by bylo o něco lepší uživatelské rozhraní v TKSL a trochu více intuitivní ovládání popřípadě ještě lepší kompatibilita s operačními systémy. Tento program není jednoduše spustitelný v nových operačních systémech.

Literatura

[1] Jirásek F.,Braniš K.,Horák S.,Vacek M., *Sbírka úloh z matematiky pro SOŠ a studijní obory SOU*. Státní pedagogické nakladatelství v Praze, 1989.

[2] Wikipedia,otevřená encyklopedie http://cs.wikipedia.org/wiki/Ur%C4%8Dit%C3%BD_integr%C3%A1l

[3] Daněček J,Dlouhý O.,Přibyl O., *Matematika I Modul 08 Určitý integrál*. Brno, 2004.

[4] Prskavec L., *Tvorba učebního textu v Matlab*. Praha, 2002.

[5] Gradštejn I.S.,Ryžík I.M., *Tablici integralov, riadov i proizvedenij*. Moskva, 1962.

Příloha I

Obsah přiloženého média

Na přiloženém médiu jsou soubory s testovacími příklady. Přiložené CD obsahuje soubory pro TKSL a Maple do Matlabu se zapisují příkazy sekvenčně. Na médiu je soubor, kde jsou tyto příkazy zapsány v jednom souboru. Dále je zde tato práce ve formátu pdf. A nakonec je zde program TKSL, ve kterém se nechají výsledky zkontrolovat.

Příloha II

Zdrojový kód s příklady určitých integrálů

II.1 Zdrojový soubor pro program Matlab

Toto je několik příkladů pro práci v Matlabu. Výpočet těchto integrálů je velice podobný jako u programu Maple. Když napíšeme příkaz ve formátu int(F(x),0,2) tak proběhne výpočet určitého integrálu v mezích od 0 do 2. Pro vykreslení funkce se používá příkaz plot.

```
syms  t
int(1/((t+1)^2+5)*sin(t)*cos(t) ,0,10)
int((t^3)*sin(t))
int(sin(2*t),0,2*pi)
int(1/t)
int(3*t^2+2*t-9)
int(t/(t^2-4))
int(t*log(t))
int((1/t^2)*sin(1/t))
int(sin(t)^7)
int(t^3*sin(t),0,1)
int((t^2-3)/sqrt(t),0.1,6)
int(sin(t)^2*cos(t),0,pi/2)
int(tan(t)-cos(t),0,1)
int((t^2+1)*sin(t),0,1)
int((t-2)*sin(2*t),0,1)
```

II.2 Zdrojový soubor pro program Maple

Pro jednoduchost jsem všechny počítané integrály uvedl v jednom souboru pro vypočítání stačí stisknout tlačítko s vykřičníky

$$\int_{-2}^{1} 3\cdot x\cdot x + 2\cdot x - 9 \,\mathrm{d}x$$

$$\int_{0.1}^{1} \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x$$

$$\int_{3}^{7} \frac{x}{x^2 - 4} \,\mathrm{d}x$$

$$\int_{1}^{2} x\cdot \ln(x) \,\mathrm{d}x$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\cdot\sin(x)\cdot\cos(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int_0^1 (1+3\cdot x)\cdot\sin(1-2\cdot x)\cdot\pi\,\mathrm{d}x$$

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}\,\mathrm{d}x$$

$$\int_{\frac{2}{\pi}}^{2\cdot\pi} \frac{1}{x^2}\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{(1+\tan(x))}\cdot(1+\tan(x)\cdot\cos(x)\cdot\cos(x))\,\mathrm{d}x$$

$$\int_1^{10} \frac{(\sin(x)\ \cdot\sin(x))}{\pi}\,\mathrm{d}x$$

$$\int_0^{2\cdot\pi} \sin(x)\ \cdot\sin(x)\cdot\sin(x)-\cos(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int_0^{10} \frac{1}{(x+1)^2+5}\cdot\sin(x)\cdot\cos(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int_{-2}^{-0.1} \sqrt{x+5}^{-2}+\frac{\cos(x)\cdot\cos(x)}{x+5}\,\mathrm{d}x$$

$$\int_0^1 \tan(x)-\cos(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int_{0.1}^6 \frac{x^2-3}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$$

$$\int_{-3}^3 \sin(x)\cdot\sin(x)\cdot\sin(x)\cdot\sin(x)\cdot\sin(x)\cdot\sin(x)\cdot\sin(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int_0^1 (x+1)\cdot\ln(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int_0^1 x\cdot\sin(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int_0^1 (x-2)\cdot\sin(2\cdot x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int_0^1 (x^2+1)\cdot\sin(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int_0^1 x^3\cdot\sin(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int\sin(x)\,\mathrm{d}x$$

$$plot\left(\int\sin(x)\,\mathrm{d}x, x=0..2\cdot\pi\right)$$

$$plot\left(\int \frac{1}{(x+1)^2+5}\cdot \sin(x)\cdot \cos(x)\, dx, x=0..10\right)$$

II.3 Zdrojový soubor pro simulační program TKSL

Zde je zdrojový kód několika integrálů v syntaxi programu TKSL. Pro větší přehlednost jsem všechny integrály uvedl do jednoho souboru a posléze jsem je zakomentoval, abych nemusel vytvářet pro každý určitý integrál svůj vlastní soubor.

```
var I;
const eps=1e-20,
pi=3.1415926535897932385,tmax=1;
system

{I'= 3*t*t+2*t-9 &0;}                 {od -2 do 1}
{I'= 1/t &0;}                         {od 0 do 1 ale nulu nemuzeme pocitat}
{I'= t/(t*t-4) &0;}                   {od 3 do 7}
{I'= t*ln(t)&0;}            {od 1 do 2}
{I'=sin(t)*sin(t)*cos(t) &0;}         {od 0 do pi/2}
{I'=(1+3*t)*sin(1-2*t)*pi &0;}        {od 0 do 1}
{I'= 1/sqrt(1-t*t) &0;}               {od -1 do 1}
{I'=(1/t*t)*sin(1/t) &0;}             {od pi/2 do 2*pi}
{I'= (1/((1+tg(t))*(1+tg(t)))*cos(t)*cos(t))&0;}    {od 0 do pi/2}
{I'=(sin(t)*sin(t))/pi &0;}{od 1 do 10}
{I'=sin(t)*sin(t)*sin(t)-cos(t) &0;}          {od 0 do 2*pi}
{I'= (1/((t+1)*(t+1)+5))*sin(t)*cos(t) &0;}          {od 0 do 10}
{I'= sqrt(t+5)*sqrt(t+5)+(cos(t)*cos(t)/(t+5)) &0;}          {od -2 do 0 ale v nule uz se hodnota
                                                              priblizuje k minus nekonecnu}
{I'= tg(t)-cos(t) &0;}                        {od 0 do 1}
{I'= (t*t-3)/sqrt(t) &0;}                     {od 0 do 6 ale nulu nemuzeme zahrnout}
{I'= sin(t)*sin(t)*sin(t)*sin(t)*sin(t)*sin(t)*sin(t) &0;}     {od -3 do 3}
{I' = (t+1)*ln (t) &0;}               {od 0 do 1 ale nulu musime vynechat jinak v ni je to
                                      nekonecno}
{I'= t* sin(t) &0;}                   {od 0 do 1}

{I'=(t-2)*sin(2*t)&0;}                {od 0 do 1}
{I'= (t*t+1)*sin(t) &0;}    {od 0 do 1}
```

```
    {I'=t*t*t*sin(t) &0;}                    {od 0 do 1}
sysend.
```

Seznam příloh

Seznam obrázků